ϵ–N 論法における変数に代入すべき項の選択方法

川邊達治[1]　佐々木克巳[2]
e-mail: sasaki@nanzan-u.ac.jp

概要　本論文は、ϵ–N 論法の証明における、変数に代入すべき項の選択方法を系統的にまとめた結果を示す。対象とした証明は、数列の収束に関する 11 の基本的性質の証明である。代入すべき項が依存する変数の傾向を示してから、具体的な選択方法を示す。選択方法を構成する手法は、飯高 [1], 一樂 [2], 高木 [4], 田島 [5], 細井 [6] で個別の性質に対して用いられているものを採用している。

1　対象とする性質

本研究が対象とする 11 の性質を以下に示す。ここでは、自然数 $(1, 2, \cdots)$ 全体の集合を $\mathbb{N}$ とおく。

1. 2 つの数列 $\{a_i\}$,$\{b_i\}(i \in \mathbb{N})$ がどちらも収束するならば、数列 $\{a_i + b_i\}(i \in \mathbb{N})$ も収束する。
2. 2 つの数列 $\{a_i\}, \{b_i\}(i \in \mathbb{N})$ がどちらも収束するならば、数列 $\{a_i \cdot b_i\}(i \in \mathbb{N})$ も収束する。
3. 3 つの数列 $\{a_i\}, \{b_i\}, \{c_i\}(i \in \mathbb{N})$ があって、すべての n に対して、$a_n \leq b_n \leq c_n$ を満たすとする。このとき、$\{a_i\}$ も $\{c_i\}$ がどちらも α に収束するならば、$\{b_i\}$ も同じ α に収束する。
4. 数列 $\{a_i\}(i \in \mathbb{N})$ が収束ならば、数列 $\{\frac{1}{a_i}\}(i \in \mathbb{N})$ も収束する。
5. 数列 $\{a_i\}(i \in \mathbb{N})$ が α に収束するならば、数列 $\{\frac{a_1 + \cdots + a_i}{i}\}(i \in \mathbb{N})$ も同じ α に収束する。
6. 数列 $\{a_i\}(i \in \mathbb{N})$ が α に収束ならば、数列 $\{a_i\}$ の任意の部分列 $\{a_{k_i}\}(i \in \mathbb{N})$ も同じ α に収束する。
7. コーシー列が収束する部分列をもつならば、もとのコーシー列自身も収束する。
8. 数列 $\{a_i\}(i \in \mathbb{N})$ が $\alpha(\neq 0)$ に収束するとき、ある番号 N に対し、$n \geq N$ のすべての n に対して a_n は α と同符号である。
9. 数列 $\{a_i\}(i \in \mathbb{N})$ の収束先は一意である。
10. 数列 $\{a_i\}(i \in \mathbb{N})$ が α に収束し、すべての n に対して $a_n \leq b$ であるならば、$\alpha \leq b$ である。
11. 数列 $\{\frac{1}{i}\}(i \in \mathbb{N})$ が 0 に収束する。

ただし、4 では、$i \in \mathbb{N}$ に対して $a_i \neq 0$ を前提とする。

これらの性質を ϵ–N 論法で簡潔に表現するために、次の記号を用いる。

1　実数を表す変数 ϵ,ϵ_1,$\epsilon_2, \cdots, a, b, \alpha, \beta, M, \cdots$

2　自然数を表す変数 $n, n_1, \cdots, N, N_1, \cdots, m, i, \cdots$

3　論理記号 $\wedge$(かつ), $\Rightarrow$ (ならば), $\forall$(すべて), $\exists$(〜が存在する), $\neg$(〜でない), $\perp$ (矛盾)

また、本論文では、数列 $\{a_n\}(i \in \mathbb{N})$ が実数 α に収束することを

$$\forall\epsilon(0 < \epsilon \Rightarrow \exists N \forall n(N \leq n \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon))$$

[1]南山大学大学院数理情報研究科
[2]南山大学情報理工学部

と定義する。

　この約束に基づいて、11 の性質の仮定（$\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \cdots$ とおく）と結論（C とおく）を表現すると、次のようになる。

1. H_1:$\forall\epsilon_1(0<\epsilon_1 \Rightarrow \exists N_1\forall n_1(N_1 \le n_1 \Rightarrow |a_{n_1}-\alpha|<\epsilon_1))$
   H_2:$\forall\epsilon_2(0<\epsilon_2 \Rightarrow \exists N_2\forall n_2(N_2 \le n_2 \Rightarrow |b_{n_2}-\beta|<\epsilon_2))$
   C:$\forall\epsilon(0<\epsilon \Rightarrow \exists N\forall n(N \le n \Rightarrow |a_n+b_n-(\alpha+\beta)|<\epsilon))$
2. H_1:$\forall\epsilon_1(0<\epsilon_1 \Rightarrow \exists N_1\forall n_1(N_1 \le n_1 \Rightarrow |a_{n_1}-\alpha|<\epsilon_1))$
   H_2:$\forall\epsilon_2(0<\epsilon_2 \Rightarrow \exists N_2\forall n_2(N_2 \le n_2 \Rightarrow |b_{n_2}-\alpha|<\epsilon_2))$
   C:$\forall\epsilon(0<\epsilon \Rightarrow \exists N\forall n(N \le n \Rightarrow |a_n\cdot b_n-\alpha\cdot\beta|<\epsilon))$
3. H_1:$\forall\epsilon_1(0<\epsilon_1 \Rightarrow \exists N_1\forall n_1(N_1 \le n_1 \Rightarrow |a_{n_1}-\alpha|<\epsilon_1))$
   H_2:$\forall\epsilon_2(0<\epsilon_2 \Rightarrow \exists N_2\forall n_2(N_2 \le n_2 \Rightarrow |c_{n_2}-\alpha|<\epsilon_2))$
   H_3:$\forall m(a_m \le b_m \wedge b_m \le c_m)$
   C:$\forall\epsilon(0<\epsilon \Rightarrow \exists N\forall n(N \le n \Rightarrow |b_n-\alpha|<\epsilon))$
4. H_1:$\forall\epsilon_1(0<\epsilon_1 \Rightarrow \exists N_1\forall n_1(N_1 \le n_1 \Rightarrow |a_{n_1}-\alpha|<\epsilon_1))$
   C:$\forall\epsilon(0<\epsilon \Rightarrow \exists N\forall n(N \le n \Rightarrow |\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{\alpha}|<\epsilon))$
5. H_1:$\forall\epsilon_1(0<\epsilon_1 \Rightarrow \exists N_1\forall n_1(N_1 \le n_1 \Rightarrow |a_{n_1}-\alpha|<\epsilon_1))$
   C:$\forall\epsilon(0<\epsilon \Rightarrow \exists N\forall n(N \le n \Rightarrow |\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}-\alpha|<\epsilon))$
6. H_1:$\forall\epsilon_1(0<\epsilon_1 \Rightarrow \exists N_1\forall n_1(N_1 \le n_1 \Rightarrow |a_{n_1}-\alpha|<\epsilon_1))$
   H_3:$\forall m(m \le k_m)$
   C:$\forall\epsilon(0<\epsilon \Rightarrow \exists N\forall n(N \le n \Rightarrow |a_{k_n}-\alpha|<\epsilon))$
7. H_1:$\forall\epsilon_1(0<\epsilon_1 \Rightarrow \exists N_1\forall n_1\forall n_1'(N_1 \le n_1 \wedge N_1 \le n_1' \Rightarrow |a_{n_1}-a_{n_1'}|<\epsilon_1))$
   H_2:$\forall\epsilon(0<\epsilon_2 \Rightarrow \exists N_2\forall n_2(N_2 \le n_2 \Rightarrow |a_{k_{n_2}}-\alpha|<\epsilon_2))$
   H_3:$\forall m(m \le k_m)$
   C:$\forall\epsilon(0<\epsilon \Rightarrow \exists N\forall n(N \le n \Rightarrow |a_n-\alpha|<\epsilon))$
8. H_1:$\forall\epsilon_1(0<\epsilon_1 \Rightarrow \exists N_1\forall n_1(N_1 \le n_1 \Rightarrow |a_{n_1}-\alpha|<\epsilon_1))$
   C:$\exists N\forall n(N \le n \Rightarrow (\alpha>0 \Rightarrow a_n>0)\wedge(\alpha<0 \Rightarrow a_n<0))$
9. H_1:$\forall\epsilon_1(0<\epsilon_1 \Rightarrow \exists N_1\forall n_1(N_1 \le n_1 \Rightarrow |a_{n_1}-\alpha|<\epsilon_1))$
   H_2:$\forall\epsilon_2(0<\epsilon_2 \Rightarrow \exists N_2\forall n_2(N_2 \le n_2 \Rightarrow |a_{n_2}-\beta|<\epsilon_2))$
   H_3:$\alpha \ne \beta$
   C:$\perp$
10. H_1:$\forall\epsilon_1(0<\epsilon_1 \Rightarrow \exists N_1\forall n_1(N_1 \le n_1 \Rightarrow |a_{n_1}-\alpha|<\epsilon_1))$
    H_2:$\forall n_2(a_{n_2} \le b)$
    H_3:$\alpha>b$
    C:$\perp$
11. C:$\forall\epsilon(0<\epsilon \Rightarrow \exists N\forall n(N \le n \Rightarrow |\dfrac{1}{n}-0|<\epsilon))$

これらの表現において、異なる役割の束縛変数は異なる記号を用いた。また、11 の性質ができる限り同じ形になるように記号を選んだ。これらによって、系統的分析を行いやすくなるからである。さらに、性質 6 と性質 7 では、仮定に部分列が現れる。部分列の定義は

$$\text{数列 } \{a_{k_i}\} \text{ が数列 } \{a_i\} \text{ の部分列} \Leftrightarrow \forall i\forall j(i<j \Rightarrow k_i<k_j)$$

であるが、この右辺から導かれる $\forall m(m \leq k_m)$ を仮定として加えている。

2　代入すべき項が依存する変数

この節と次の節で、ϵ–N 論法における変数に代入すべき項の選択の方法について述べる。

とくに、この節では、代入すべき項が、どの変数に依存して決まるのかを考える。結果として、証明すべき性質の仮定に “$\forall\epsilon_i\exists N_i$”、結論に “$\forall n$” が現れるか否かで、その依存する変数の傾向をまとめることができた。以下に詳細を述べる。

11 の性質の証明を、鹿島 [3] の自然演繹法の導出図の形で表現すると、それらはどれも下の図 1 の形、または、そこから不要な推論規則を削除した形でかける。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{0<\epsilon_1}\ (\Rightarrow \text{除})\ \dfrac{\forall\epsilon_1\cdots}{0<\epsilon_1\Rightarrow\exists N_1\cdots}\ (\forall\ \text{除})}{\exists N_1\cdots}\ (\Rightarrow \text{除}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{0<\epsilon_2}\ \dfrac{\forall\epsilon_2\cdots}{0<\epsilon_2\Rightarrow\exists N_2\cdots}\ (\forall\ \text{除})}{\exists N_2\quad\cdots}\ (\Rightarrow \text{除}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall n_1\cdots}{\vdots}\ (\forall\ \text{除})\ \dfrac{\forall n_2\cdots}{\vdots}\ (\forall\ \text{除})}{\vdots}}{\forall n\cdots}}{\exists N\cdots}\ (\exists\ \text{導})}{\exists N\cdots}\ (\exists\ \text{除})}{\dfrac{\dfrac{\exists N\cdots}{0<\epsilon\Rightarrow\exists N\cdots}\ (\Rightarrow \text{導})}{\forall\epsilon\cdots}\ (\forall\ \text{導})}\ (\exists\ \text{除})
$$

図 1　導出図の一般形

上の導出図から、変数に代入すべき項について次がわかる。ただし、$\epsilon_1, \epsilon_2, N, n_1, n_2, {n_1}'$ に代入すべき項は、各性質の仮定と結論に自由に現れる変数にも依存するが、本論文ではそのことを明記しない。

- ϵ, N_1, N_2, n に代入すべき項は、鹿島 [3] の推論規則の変数条件を満たす。本論文では、異なる役割の束縛変数に異なる記号を用いていることから、ϵ, N_1, N_2, n に代入すべき項は、それぞれ、ϵ, N_1, N_2, n とすればよい。
- ϵ_1,ϵ_2 に代入すべき項は ϵ のみに依存する。
- N に代入すべき項は ϵ,N_1,N_2 のみに依存する。
- n_1,n_2,${n_1}'$ に代入すべき項は ϵ,N_1,N_2,n のみに依存する。

実際に代入された項を、表 1 に示しておく。性質 2 には 3 通りの証明があり、表 1 では、それらを 2A,2B,2C とした。性質 4 についても同様である。表 1 において、2A の ϵ' は $-1+\sqrt{1+\dfrac{\epsilon}{|\alpha\beta|}}$ を、2B の ϵ'' は $\dfrac{\epsilon}{1+|\alpha|+|\beta|}$ を、5 の N_3 は $[\dfrac{(a_1-\alpha)+\cdots+(a_{N_1}-\alpha)}{\epsilon}]+1$ を表す。ただし、実数 x に対して、$[x]$ は、x を超えない最大の整数を表す。

ここから、依存する変数の表を作ると表 2 のようになる。この表から、 N へ代入すべき項については、仮定に “$\forall\epsilon_i\exists N_i$” が現れるか否かで次の傾向が読み取れる。

表 1: 代入すべき項

変数	ϵ_1	ϵ_2	N	n_1	n_2	${n_1}'$	m
1	$\frac{\epsilon}{2}$	$\frac{\epsilon}{2}$	$\max(N_1, N_2)$	n	n	-	-
2A	$\lvert\alpha\rvert\epsilon'$	$\lvert\beta\rvert\epsilon'$	$\max(N_1, N_2)$	n	n	-	-
2B	$\min(1, \epsilon'')$	$\min(1, \epsilon'')$	$\max(N_1, N_2)$	n	n	-	-
2C	$\frac{\epsilon}{2M}$	$\frac{\epsilon}{2\lvert\alpha\rvert}$	$\max(N_1, N_2)$	n	n	-	-
3	ϵ	ϵ	$\max(N_1, N_2)$	n	n	-	n
4A	$\min(\frac{\lvert\alpha\rvert}{2}, \frac{\lvert\alpha\rvert^2\epsilon}{2})$	-	N_1	n	-	-	-
4B	$\frac{\lvert\alpha\rvert^2\epsilon}{1+\lvert\alpha\rvert\epsilon}$	-	N_1	n	-	-	-
5	$\frac{\epsilon}{2}$	-	$\max(N_1, N_3)$	$N_1, N_1+1, \cdots, n$	-	-	-
6	ϵ	-	N_1	k_n	-	-	n
7	$\frac{\epsilon}{2}$	$\frac{\epsilon}{2}$	$\max(N_1, N_2)$	n	n	k_n	n
8	$\lvert\alpha\rvert$	-	N_1	n	-	-	-
9	$\frac{\lvert\alpha-\beta\rvert}{2}$	$\frac{\lvert\alpha-\beta\rvert}{2}$	-	$\max(N_1, N_2)$	$\max(N_1, N_2)$	-	
10	$\alpha - b$	-	-	N_1	N_1	-	-
11	-	-	$[\frac{1}{\epsilon}]+1$	-	-	-	-

表 2: 依存する変数

変数	ϵ_1	ϵ_2	N	n_1	n_2	${n_1}'$	m
1	ϵ	ϵ	N_1, N_2	n	n	-	-
2A	ϵ	ϵ	N_1, N_2	n	n	-	-
2B	ϵ	ϵ	N_1, N_2	n	n	-	-
2C	ϵ	ϵ	N_1, N_2	n	n	-	-
3	ϵ	ϵ	N_1, N_2	n	n	-	n
4A	ϵ	-	N_1	n	-	-	-
4B	ϵ	-	N_1	n	-	-	-
5	ϵ	ϵ	N_1, ϵ	N_1, n	—	-	-
6	ϵ	-	N_1	n	-	-	n
7	ϵ	ϵ	N_1, N_2	n	n	n	n
8	なし	-	N_1	n	-	-	-
9	なし	なし	-	N_1, N_2	N_1, N_2	-	-
10	なし	-	-	N_1	N_1	-	-
11	-	-	ϵ	-	-	-	-

- 現れるとき（性質 1〜8）：N_i に依存
- 現れないとき（性質 11）：ϵ のみに依存

ただし、性質 5 においては、ϵ にも依存する。同様に、n_1, n_2 へ代入すべき項については、結論に "$\forall n$" が現れるか否かで次の傾向が読み取れる。

- 現れるとき（性質 1〜8）：n に依存
- 現れないとき（性質 9,10）：N_i のみに依存

ただし、性質 5 においては、N_i にも依存する。

3　代入すべき項の選択方法

前節では、代入すべき項が、どの変数に依存するかについて述べた。この節では、それをもう一歩踏み込んで、$\epsilon_1, \epsilon_2, N, n_1, n_2$ に代入すべき具体的な項の選択方法について述べる。この選択方法を構成する手法は、飯高 [1], 一樂 [2], 高木 [4], 田島 [5], 細井 [6] で個別の性質に対して用いられているものから抽出した。本稿では、それらを系統的にまとめている。以下では、混乱のない限り、「変数に代入すべき項を選ぶ」を、簡単に、「変数を選ぶ」と表現する。

前節の導出図（図 1）より、5 つの変数は、各性質に応じた次の形の条件を満たすように選べばよい。

$$\forall n_1 P_1, \forall n_2 P_2, \mathrm{H}_3 \Rightarrow \forall n P \tag{1}$$

ただし、$\forall n_1 P_1, \forall n_2 P_2, \mathrm{H}_3, \forall n P$ のそれぞれは、性質によってはなかったり、$\perp$ であったりする。(1) を満たす変数は

$$P_1, P_2, \mathrm{H}_3 \Rightarrow P \tag{2}$$

を満たすように選べばよい。n_1 に複数の項を代入する場合もある。この場合は、その複数の項を

$$P_1[n_{1,1}/n], \cdots, P_1[n_{1,\ell}/n_1], P_2, \mathrm{H}_3 \Rightarrow P \tag{3}$$

を満たす $n_{1,1}, \cdots, n_{1,\ell}$ として選ぶことになる。以下は、(2) を満たす変数の選び方を述べる。P が $N \leq n \Rightarrow Q$、P_i が $N_i \leq n_i \Rightarrow Q_i$ の形のときは、3 条件

$$N \leq n \Rightarrow N_1 \leq n_1 \tag{4}$$

$$N \leq n \Rightarrow N_2 \leq n_2 \tag{5}$$

$$N \leq n, Q_1, Q_2, \mathrm{H}_3 \Rightarrow Q \tag{6}$$

または、2 条件

$$N \leq n \Rightarrow N_1 \leq n_1 \tag{7}$$

$$N \leq n, Q_1, P_2, \mathrm{H}_3 \Rightarrow Q \tag{8}$$

などを満たすように選べばよい。最初の 3 条件の場合には、ϵ_1,ϵ_2 は、(6) を満たすように選ぶ。N は、3 条件を満たすように選ぶ。条件

$$\forall N(N \geq N' \Rightarrow (4))$$
$$\forall N(N \geq N'' \Rightarrow (5))$$
$$\forall N(N \geq N''' \Rightarrow (6))$$

を満たす、N',N'',N''' をそれぞれ求めて、$N = \max(N', N'', N''')$ とすればよい。他の場合も同様である。

次に (4) を満たす N,n_1 の選択方法を述べる。(5),(7) も同様である。本論文で扱った例では、次の 2 通りである。

- $N_1 \leq N$ を満たす N,$n_1 = N_1, N_1 + 1, \cdots, n$
- $(N, n_1) = (N_1, n)$

最後に (6) を満たす $\epsilon_1, \epsilon_2, N, n_1, n_2$ の選択方法を 2 つ述べる。(8) も同様である。

(i)　1 つ目は、(6) が $N \leq n, |A| < \epsilon_1, |B| < \epsilon_2, \mathrm{H}_3 \Rightarrow |C| < \epsilon$ の形のときの選択方法である。この選択方法は具体的には、次の 3 つのステップからなる。

ステップ１：$|C| \leq C'$ を満たす C' で

$$\frac{|A|, |B| \text{ の式}}{|a_n|, |b_n|, n \text{ の式}}$$

の形のものを求める。ただし、$x_1, x_2, \cdots, x_n$ の式とは、$x_1, x_2, \cdots, x_n$ についての多項式で、すべての係数が正であるもののことである。

ステップ２：$C' < f$ となる f で、$\epsilon_1, \epsilon_2, N, n_1, n_2$ で表現 されたものを求める。

ステップ３：$f \leq \epsilon$ を満たすように $\epsilon_1, \epsilon_2, N, n_1, n_2$ に代入すべき項を選ぶ。

最初の 2 つのステップで得られる C', f は、$|C| \leq C' < f$ を満たすので、ステップ３で求めた項が、それぞれに代入すべき項だとわかる。

ステップ１は、三角不等式

$$(i.1) \quad |X + Y| \leq |X| + |Y|$$

などを用いる。ステップ２は、

$(i.2)$	$N \leq n$（前提）
$(i.3)$	$|A| < \epsilon_1$（前提）
$(i.4)$	$|B| < \epsilon_2$（前提）
$(i.5)$	H_3（前提）
$(i.6)$	$|\alpha| - \epsilon_1 < |a_n|$（$A = a_n - \alpha$ の場合, $(i.3)$ より）
$(i.7)$	$|\beta| - \epsilon_2 < |b_n|$（$B = b_n - \beta$ の場合, $(i.4)$ より）
$(i.8)$	$|a_n| < M$（$\{a_i\}$ の有界性より）

などを用いる。$(i.6)$ は、三角不等式と $(i.3)$ から、

$$|\alpha| - |a_n| \leq |a_n - \alpha| < \epsilon_1$$

なので、ここから得られる。$(i.7)$ も同様である。また、ステップ 2 において、

$$\epsilon_i \leq 1$$
$$\epsilon_i \leq \frac{\alpha}{2}$$

などの条件を加えて f を求めて、ステップ 3 において、加えた条件と $f \leq \epsilon$ を満たすように ϵ_i を選ぶ方法 $(i.9)$ も有効である。加えた条件が、$\epsilon_i \leq 1$ のときは、$f \leq \epsilon$ を満たす ϵ_1 を ${\epsilon_1}'$ とすると、$\epsilon_1 = \min(1, {\epsilon_1}')$ とすればよい。

(ii) 2 つ目は、(6) の Q_i または Q が $|A - \alpha| < \epsilon$ の形のときの選び方である。具体的には、$|A - \alpha| < \epsilon$ を $\alpha - \epsilon < A < \alpha + \epsilon$ に変形し、「⇒」の前後を比較する方法である。(i) で述べた $(i.9)$ も有効である。

以下では、表 1 にある項が上の方法で選べることを、その手順にしたがって確かめる。これらの選択方法は、結果として、いくつかの文献で説明されている方法と同様になることがある。以下では、その文献の例を注釈に示す。また、その手法を説明したり、その結果の代入方法で証明したりしている文献の例も示す。

1. 和[3]

$N_1 \leq n_1 \Rightarrow |a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1(P_1)$,$N_2 \leq n_2 \Rightarrow |b_{n_2} - \beta| < \epsilon_2(P_2)$ から $N \leq n \Rightarrow |a_n + b_n - (\alpha+\beta)| < \epsilon(C)$ が導かれるように変数 $\epsilon_1, \epsilon_2, N, n_1, n_2$ に代入すべき項を選ぶ。3 条件

$$N \leq n \Rightarrow N_1 \leq n_1$$
$$N \leq n \Rightarrow N_2 \leq n_2$$
$$|a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1, |b_{n_2} - \beta| < \epsilon_2 \Rightarrow |a_n + b_n - (\alpha + \beta)| < \epsilon$$

を満たすように選ぶ。

この場合、N は 3 つ目の条件に依存させる必要がなく、最初の 2 条件を満たすように N, n_1, n_2 を選べばよい。例えば、

$$N = \max(N_1, N_2), n_1 = n, n_2 = n$$

とすればよい。

3 つ目の条件を満たす ϵ_1, ϵ_2 を方法 (i) で求める。まず、三角不等式 $(i.1)$ を用いて、

$$\begin{aligned} |a_n + b_n - (\alpha + \beta)| &= |a_n - \alpha + b_n - \beta| \\ &\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \end{aligned}$$

を得る（ステップ 1）。次に、2 つの前提 $|a_n - \alpha| < \epsilon_1(i.3), |b_n - \beta| < \epsilon_2(i.4)$ を用いて

$$\begin{aligned} |a_n + b_n - (\alpha + \beta)| &\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \\ &< \epsilon_1 + \epsilon_2 \end{aligned}$$

[3] この選択方法は、飯高 [1] とほぼ同じである。

を得る（ステップ２）。最後に、$\epsilon_1 + \epsilon_2 \leq \epsilon$ を満たす ϵ_1, ϵ_2 を選ぶのだが、例えば、

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2}$$

とすればよい（ステップ３）。

2. 積[4][5]

$N_1 \leq n_1 \Rightarrow |a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1(P_1)$ と $N_2 \leq n_2 \Rightarrow |b_{n_2} - \alpha| < \epsilon_2(P_2)$ から $N \leq n \Rightarrow |a_n \cdot b_n - \alpha \cdot \beta| < \epsilon(P)$ が導かれるように変数 $\epsilon_1, \epsilon_2, N, n_1, n_2$ 代入すべき項を選ぶ。3 条件

$$N \leq n \Rightarrow N_1 \leq n_1$$
$$N \leq n \Rightarrow N_2 \leq n_2$$
$$|a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1, |b_{n_2} - \beta| < \epsilon_2 \Rightarrow |a_n \cdot b_n - \alpha \cdot \beta| < \epsilon$$

を満たすように選ぶ。

この場合、N は 3 つ目の条件に依存させる必要がなく、最初の 2 条件を満たすように N, n_1, n_2 を選べばよい。例えば、

$$N = \max(N_1, N_2), n_1 = n, n_2 = n$$

とすればよい。

3 つ目の条件を満たす ϵ_1, ϵ_2 を 3 通りの方法 2A,2B,2C で求める。いずれも方法 (i) である。
2A:まず、三角不等式 $(i.1)$ を用いて、

$$\begin{aligned}|a_n \cdot b_n - \alpha \cdot \beta| &= |(a_n - \alpha)(b_n - \beta) + \beta(a_n - \alpha) + \alpha(b_n - \beta)| \\ &\leq |(a_n - \alpha)(b_n - \beta)| + |\beta||a_n - \alpha| + |\alpha||b_n - \beta|\end{aligned}$$

を得る（ステップ１）。次に、2 つの前提 $|a_n - \alpha| < \epsilon_1(i.3), |b_n - \beta| < \epsilon_2(i.4)$ を用いて

$$\begin{aligned}|a_n \cdot b_n - \alpha \cdot \beta| &\leq |(a_n - \alpha)(b_n - \beta)| + |\beta||a_n - \alpha| + |\alpha||b_n - \beta| \\ &< \epsilon_1\epsilon_2 + |\beta|\epsilon_1 + |\alpha|\epsilon_2 \qquad (9)\end{aligned}$$

を得る（ステップ２）。最後に、$\epsilon_1\epsilon_2 + |\beta|\epsilon_1 + |\alpha|\epsilon_2 \leq \epsilon$ を満たす ϵ_1, ϵ_2 を選ぶのだが、$\epsilon_1 = |\alpha|\epsilon', \epsilon_2 = |\beta|\epsilon'$ とおくと、

$$|\alpha\beta|({\epsilon'}^2 + 2\epsilon') \leq \epsilon$$

なので、これを満たす ϵ' を選べばよい。例えば、方程式 $|\alpha\beta|({\epsilon'}^2 + 2\epsilon') = \epsilon$ を解くと、

$$\epsilon' = -1 + \sqrt{1 + \frac{\epsilon}{|\alpha\beta|}}$$

が求まる。$1 + \dfrac{\epsilon}{|\alpha\beta|} > 1$ より、$\epsilon' > 0$ である。したがって、

$$\epsilon_1 = |\alpha|(-1 + \sqrt{1 + \frac{\epsilon}{|\alpha\beta|}}), \epsilon_2 = |\beta|(-1 + \sqrt{1 + \frac{\epsilon}{|\alpha\beta|}})$$

[4] 2B の選択方法は、飯高 [1] とほぼ同じである。
[5] 一樂 [2] では、2C における $(i.1), (i.8)$ を説明している。

とすればよい（ステップ３）。
2B:(9) までは、2A と同じである。(9) で $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon''$ とおくと、

$$|a_n \cdot b_n - \alpha \cdot \beta| < \epsilon''^2 + |\alpha|\epsilon'' + |\beta|\epsilon''$$

であり、さらに、$\epsilon'' \leq 1$ という条件を加えると、$\epsilon''^2 \leq \epsilon''$ となることから、

$$|a_n \cdot b_n - \alpha \cdot \beta| < \epsilon''(1 + |\alpha| + |\beta|)$$

を得る（ステップ２）。次に、$\epsilon''(1 + |\alpha| + |\beta|) \leq \epsilon$ を満たす ϵ'' を選ぶのだが、例えば

$$\epsilon'' = \frac{\epsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|}$$

とすればよい。したがって、

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \min(1, \frac{\epsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|}) \quad (i.9)$$

とすればよい（ステップ３）。
2C:まず、三角不等式 $(i.1)$ を用いて

$$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - (\alpha \cdot \beta)| &= |a_n b_n - \alpha b_n + \alpha b_n - \alpha\beta| \\ &= |b_n(a_n - \alpha) + \alpha(b_n - \beta)| \\ &\leq |b_n||a_n - \alpha| + |\alpha||b_n - \beta| \end{aligned}$$

を得る（ステップ１）。次に２つの前提 $|a_n - \alpha| < \epsilon_1(i.3), |b_n - \beta| < \epsilon_2(i.4)$ と $\{b_i\}$ の有界性 $|b_n| < M(i.8)$ を用いて

$$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - (\alpha \cdot \beta)| &\leq |b_n||a_n - \alpha| + |\alpha||b_n - \beta| \\ &< M\epsilon_1 + |\alpha|\epsilon_2 \end{aligned}$$

を得る（ステップ２）。最後に、$M\epsilon_1 + |\alpha|\epsilon_2 \leq \epsilon$ を満たす ϵ_1,ϵ_2 を選ぶのだが、例えば、

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2M}, \epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2|\alpha|}$$

とすればよい（ステップ３）。

3. はさみうちの定理[6]
　$N_1 \leq n_1 \Rightarrow |a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1(P_1)$, $N_2 \leq n_2 \Rightarrow |c_{n_2} - \alpha| < \epsilon_2(P_2)$, $\forall m(a_m \leq b_m \wedge b_m \leq c_m)(\mathrm{H}_3)$ から $N \leq n \Rightarrow |b_n - \alpha| < \epsilon(P)$ が導かれるように変数 $\epsilon_1, \epsilon_2, N, n_1, n_2, m$ に代入すべき項を選ぶ。
３条件

$$N \leq n \Rightarrow N_1 \leq n_1$$
$$N \leq n \Rightarrow N_2 \leq n_2$$
$$|a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1, |c_{n_2} - \alpha| < \epsilon_2, \forall m(a_m \leq b_m \wedge b_m \leq c_m) \Rightarrow |b_n - \alpha| < \epsilon$$

[6]一樂 [2] では、方法 (ii) を説明している。

を満たすように選べばよい。

この場合、N は3つ目の条件に依存させる必要がなく、最初の2条件を満たすように N, n_1, n_2 を選べばよい。例えば、

$$N = \max(N_1, N_2), n_1 = n, n_2 = n$$

とすればよい。

3つ目の条件を満たす ϵ_1, ϵ_2 を方法 (ii) で求める。まず、2つの前提 $|a_n - \alpha| < \epsilon_1, |c_n - \alpha| < \epsilon_2$ を、それぞれ

$$\alpha - \epsilon_1 < a_n < \alpha + \epsilon_1$$
$$\alpha - \epsilon_2 < c_n < \alpha + \epsilon_2$$

と変形する。ここで $\forall m(a_m \leq b_m \wedge b_m \leq c_m)(\mathrm{H}_3)$ を用いるには、$m = n$ とすればよい。よって

$$\alpha - \epsilon_1 < a_n \leq b_n \leq c_n < \alpha + \epsilon_2$$

を得る。次に $|b_n - \alpha| < \epsilon$ を

$$\alpha - \epsilon < b_n < \alpha + \epsilon$$

と変形する。2つの式を比べると、$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ とすればよいとわかる。

4. 逆数[7][8]

$N_1 \leq n_1 \Rightarrow |a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1(P_1)$ から $N \leq n \Rightarrow |\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}| < \epsilon(P)$ が導かれるように変数 ϵ_1, N, n_1 に代入すべき項を選ぶ。2条件

$$N \leq n \Rightarrow N_1 \leq n_1$$
$$|a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1 \Rightarrow |\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}| < \epsilon$$

を満たすように選べばよい。

この場合、N は2つ目の条件に依存させる必要がなく、最初の条件を満たすように N, n_1 を選べばよい。例えば、

$$N = N_1, n_1 = n$$

とすればよい。

2つ目の条件を満たす ϵ_1 を方法 (i),(ii) でそれぞれ求める。
4A:まず、

$$|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}| = \frac{|a_n - \alpha|}{|a_n||\alpha|}$$

と変形する（ステップ１）。次に、前提 $|a_n - \alpha| < \epsilon_1(i.3)$ と $|\alpha| - \epsilon_1 < |a_n|(i.6)$ を用いて、

$$\begin{aligned} |\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}| &= \frac{|a_n - \alpha|}{|a_n||\alpha|} \\ &< \frac{\epsilon_1}{(|\alpha| - \epsilon_1)|\alpha|} \end{aligned}$$

[7] 4A の選択方法は、飯高 [1] とほぼ同じである。
[8] 4B の選択の結果は、細井 [6] と一致している。

を得る。ここで $\epsilon_1 \leq \frac{|\alpha|}{2}$ という条件を加えると、$|\alpha| - \epsilon_1 \geq \frac{|\alpha|}{2}$ だから、

$$\begin{aligned} |\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}| &< \frac{\epsilon_1}{(|\alpha| - \epsilon_1)|\alpha|} \\ &\leq \frac{2\epsilon_1}{|\alpha|^2} \end{aligned}$$

を得る（ステップ２）。最後に、$\frac{2\epsilon_1{}'}{|\alpha|^2} \leq \epsilon$ を満たす $\epsilon_1{}'$ を選び、$\epsilon_1 = \min(\frac{|\alpha|}{2}, \epsilon_1{}')$ とするのだが、例えば、$\epsilon_1{}' = \frac{|\alpha|^2\epsilon}{2}$ とし、

$$\epsilon_1 = \min(\frac{|\alpha|}{2}, \frac{|\alpha|^2\epsilon}{2}) \quad (i.9)$$

とすればよい（ステップ３）。
4B:まず、前提 $|a_n - \alpha| < \epsilon_1$ を

$$\alpha - \epsilon_1 < a_n < \alpha + \epsilon_1$$

と変形し、さらに辺々の逆数をとる。

$\alpha > 0$ のとき:右側の不等式について、$a_n > 0, \alpha + \epsilon_1 > 0$ なので、

$$\frac{1}{\alpha + \epsilon_1} < \frac{1}{a_n}$$

を得る。左側の不等式についても同様に考えるのだが、$\alpha - \epsilon_1$ の符号が問題となる。そこで、$\alpha - \epsilon_1 > 0$（すなわち、$\epsilon_1 < |\alpha|$）という条件を加える。すると、

$$\frac{1}{a_n} < \frac{1}{\alpha - \epsilon_1}$$

を得る。したがって、

$$\frac{1}{\alpha + \epsilon_1} < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{\alpha - \epsilon_1} \tag{10}$$

を得る。

$\alpha < 0$ のとき:上の場合と同様にして、$\alpha + \epsilon_1 < 0$（すなわち、$\epsilon_1 < |\alpha|$）という条件を加えると、(10) を得る。

したがって、いずれの場合も、条件 $\epsilon_1 < |\alpha|$ のもとで (10) を得る。また、$|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}| < \epsilon$ を

$$\frac{1 - \alpha\epsilon}{\alpha} < \frac{1}{a_n} < \frac{1 + \alpha\epsilon}{\alpha}$$

と変形する。2 つの式を比べると、

$$\frac{1 - \alpha\epsilon}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha + \epsilon_1} \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{\alpha - \epsilon_1} \leq \frac{1 + \alpha\epsilon}{\alpha} \tag{11}$$

を満たすように ϵ_1 を選べばよいとわかる。

$\alpha > 0$ のとき:$1 - \alpha\epsilon \leq 1 + \alpha\epsilon$ であり、条件 $\epsilon_1 < |\alpha|$ のもとで $\alpha - \epsilon_1 > 0$ なので、

$$
\begin{aligned}
(11) \quad &\Leftrightarrow \quad (1-\alpha\epsilon)(\alpha+\epsilon_1) \leq \alpha \quad \text{かつ} \quad \alpha \leq (1+\alpha\epsilon)(\alpha-\epsilon_1) \\
&\Leftrightarrow \quad (1-\alpha\epsilon)\epsilon_1 \leq \alpha^2\epsilon \quad \text{かつ} \quad (1+\alpha\epsilon)\epsilon_1 \leq \alpha^2\epsilon \\
&\Leftrightarrow \quad (1+\alpha\epsilon)\epsilon_1 \leq \alpha^2\epsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \epsilon_1 \leq \frac{\alpha^2\epsilon}{1+\alpha\epsilon}
\end{aligned}
$$

を得る。したがって、条件

$$\epsilon_1 < \alpha \quad \text{かつ} \quad \epsilon_1 \leq \frac{\alpha^2\epsilon}{1+\alpha\epsilon}$$

を満たすように ϵ_1 を選べばよい $(i.9)$。ここで、

$$\frac{\alpha^2\epsilon}{1+\alpha\epsilon} < \frac{\alpha^2\epsilon}{\alpha\epsilon} = \alpha$$

だから、

$$\epsilon_1 \leq \frac{\alpha^2\epsilon}{1+\alpha\epsilon}$$

のみを満たすように ϵ_1 を選べばよい。例えば、

$$\epsilon_1 = \frac{\alpha^2\epsilon}{1+\alpha\epsilon} = \frac{|\alpha|^2\epsilon}{1+|\alpha|\epsilon}$$

とすればよい。

$\alpha < 0$ のとき:$1 + \alpha\epsilon \leq 1 - \alpha\epsilon$ であり、条件 $\epsilon_1 < |\alpha|$ のもとで $\alpha + \epsilon_1 < 0$ なので、同様に、条件

$$\epsilon_1 < -\alpha \quad \text{かつ} \quad \epsilon_1 \leq \frac{\alpha^2\epsilon}{1+(-\alpha)\epsilon}$$

を満たすように ϵ_1 を選べばよい $(i.9)$。ここで、

$$\frac{\alpha^2\epsilon}{1+(-\alpha)\epsilon} < \frac{\alpha^2\epsilon}{-\alpha\epsilon} = -\alpha$$

だから、

$$\epsilon_1 \leq \frac{\alpha^2\epsilon}{1+(-\alpha)\epsilon}$$

のみを満たすように ϵ_1 を選べばよい。例えば、

$$\epsilon_1 = \frac{\alpha^2\epsilon}{1+(-\alpha)\epsilon} = \frac{|\alpha|^2\epsilon}{1+|\alpha|\epsilon}$$

とすればよい。

以上より、いずれの場合も

$$\epsilon_1 = \frac{|\alpha|^2\epsilon}{1+|\alpha|\epsilon}$$

とすればよい。

5. 平均[9]

$N_1 \leq n_1 \Rightarrow |a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1(P_1)$ から $N \leq n \Rightarrow |\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \alpha| < \epsilon(P)$ が導かれるように変数 ϵ_1, N, n_1 に代入すべき項を選ぶ。

結果として、(3) の形で代入すべき項を選ぶことになるが、ここでは、その理由を示すために、まずは、(2) の形で考える。2 条件

$$N \leq n \Rightarrow N_1 \leq n_1$$
$$N \leq n, |a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1 \Rightarrow |\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}| < \epsilon$$

を満たすように選べばよい。2 つ目の条件を満たす $N, \epsilon_1, \epsilon_2, n_1$ を方法 (i) で求める。まず、三角不等式を用いて

$$\begin{aligned} |\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \alpha| &= |\frac{a_1 + \cdots + a_{N_1 - 1}}{n} + \frac{a_{N_1} + \cdots + a_n}{n} - \alpha| \\ &= |\frac{(a_1 - \alpha) + \cdots + (a_{N_1 - 1} - \alpha)}{n} + \frac{(a_{N_1} - \alpha) + \cdots + (a_n - \alpha)}{n}| \\ &\leq |\frac{(a_1 - \alpha) + \cdots + (a_{N_1 - 1} - \alpha)}{n}| + \frac{|a_{N_1} - \alpha| + \cdots + |a_n - \alpha|}{n} \end{aligned}$$

を得る。ここで、ステップ 2 を考えると、前提 $|a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1$ の n_1 には、$n, n-1, \cdots$ などの複数の項を代入する必要性、すなわち、(3) の形で考える必要性がわかる。さらに、1 つ目の条件を考えると、n_1 には $N_1, N_1 + 1, \cdots, n$ を代入すべきとわかる。

以下、(3) の形で考える。上の考察から、n_1 に代入すべき項を $N_1, N_1 + 1, \cdots, n$ と考え、変数 ϵ_1, N に代入すべき項を、$(n - N_1 + 2)$ 個の条件

$$\begin{aligned} N &\leq n \quad \Rightarrow N_1 \leq N_1 \\ N &\leq n \quad \Rightarrow N_1 \leq N_1 + 1 \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ N &\leq n \quad \Rightarrow N_1 \leq n \\ N &\leq n, \quad |a_{N_1} - \alpha| < \epsilon_1, \cdots, |a_n - \alpha| < \epsilon_1 \Rightarrow |\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \alpha| < \epsilon \end{aligned}$$

を満たすように選ぶ。最初の $(n - N_1 + 1)$ 個の条件を満たすには、$N \geq N_1$ を満たすように N を選べばよい。

最後の条件を満たす N, ϵ_1 を方法 (i) で求める。まず、上の (2) の形の考察より、

$$|\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \alpha| \leq |\frac{(a_1 - \alpha) + \cdots + (a_{N_1 - 1} - \alpha)}{n}| + \frac{|a_{N_1} - \alpha| + \cdots + |a_n - \alpha|}{n}$$

を得る（ステップ 1）。次に、前提 $|a_{N_1} - \alpha| < \epsilon_1, \cdots, |a_n - \alpha| < \epsilon_1$ を用いると、

$$\begin{aligned} |\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \alpha| &\leq |\frac{(a_1 - \alpha) + \cdots + (a_{N_1 - 1} - \alpha)}{n}| + \frac{|a_{N_1} - \alpha|}{n} + \cdots + \frac{|a_n - \alpha|}{n} \\ &< |\frac{(a_1 - \alpha) + \cdots + (a_{N_1 - 1} - \alpha)}{n}| + \frac{\epsilon_1}{n} + \cdots + \frac{\epsilon_1}{n} \\ &< |\frac{(a_1 - \alpha) + \cdots + (a_{N_1 - 1} - \alpha)}{n}| + \frac{n - N_1 + 1}{n}\epsilon_1 \end{aligned}$$

[9] 細井 [6] では、ϵ_1 の選び方を説明している。

を得る。さらに、n を大きくすると $\dfrac{(a_1-\alpha)+\cdots+(a_{N_1-1}-\alpha)}{n}$ が限りなく 0 に近づくことを用いる。具体的には、$\epsilon_1>0$ に対し、ある番号 N_3 をとると、

$$N_3 \le n \Rightarrow \left| \frac{(a_1-\alpha)+\cdots+(a_{N_1-1}-\alpha)}{n} \right| < \epsilon_1 \tag{12}$$

すなわち

$$N_3 \le n \Rightarrow \left| \frac{(a_1-\alpha)+\cdots+(a_{N_1-1}-\alpha)}{\epsilon_1} \right| < n$$

が成り立つことを用いる。これを満たす N_3 は、

$$\left| \frac{(a_1-\alpha)+\cdots+(a_{N_1-1}-\alpha)}{\epsilon_1} \right| < N_3(\le n)$$

を満たすように選べばよいので、例えば

$$N_3 = \left[\frac{(a_1-\alpha)+\cdots+(a_{N_1}-\alpha)}{\epsilon_1} \right] + 1$$

とすればよい。よって、 $N \ge N_3$ とすれば、前提 $N \le n(i.2)$ より (12) の「⇒」の右辺が成り立ち、

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} - \alpha \right| &< \left| \frac{(a_1-\alpha)+\cdots+(a_{N_1-1}-\alpha)}{n} \right| + \frac{n-N_1+1}{n}\epsilon_1 \\ &< \epsilon_1 + \frac{n-N_1+1}{n}\epsilon_1 \end{aligned}$$

を得る。$1 \le N_1$ から $n-N_1+1 \le n$ なので、

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} - \alpha \right| &< \epsilon_1 + \frac{n-N_1+1}{n}\epsilon_1 \\ &< \epsilon_1 + \epsilon_1 = 2\epsilon_1 \end{aligned}$$

を得る（ステップ２）。最後に $2\epsilon_1 \le \epsilon$ を満たす ϵ_1 選ぶのだが、例えば、

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2}$$

とすればよい（ステップ３）。

$N \ge N_1$ であれば最初の $(n-N_1+1)$ 個の条件を満たし、$N \ge N_3$ であれば最後の条件を満たすので、求める N は $\max(N_1, N_3)$ となる。

6. 部分列[10]

$N_1 \le n_1 \Rightarrow |a_{n_1}-\alpha| < \epsilon_1(P_1)$,$\forall m(m \le k_m)(\mathrm{H}_3)$ から $N \le n \Rightarrow |a_{k_n}-\alpha| < \epsilon(P)$ が導かれるように変数 ϵ_1, N, n_1, m に代入すべき項を選ぶ。2 条件

$$\forall m(m \le k_m), N \le n \Rightarrow N_1 \le n_1$$
$$N \le n, |a_{n_1}-\alpha| < \epsilon_1 \Rightarrow |a_{k_n}-\alpha| < \epsilon$$

を満たすように選べばよい。

[10] この代入方法は、飯高 [1] で用いている。

2つ目の条件を満たす ϵ_1, n_1 は、例えば $(\epsilon_1, n_1) = (\epsilon, k_n)$ である。このとき1つ目の条件は、

$$\forall m(m \leq k_m), N \leq n \Rightarrow N_1 \leq k_n$$

となる。(H_3) を用いるには $m = n$ とすればよい。さらに、$N_1 \leq N$ を満たすように N を選ぶと、

$$\begin{aligned} n \leq k_n, N \leq n \quad &\Rightarrow \quad N_1 \leq N \leq n \leq k_n \\ &\Rightarrow \quad N_1 \leq k_n \end{aligned}$$

となり、1つ目の条件を満たす。具体的には、$N = N_1$ とすればよい。

7. コーシー列

$N_1 \leq n_1 \wedge N_1 \leq {n_1}' \Rightarrow |a_{n_1} - a_{{n_1}'}| < \epsilon_1(P_1)$,$N_2 \leq n_2 \Rightarrow |a_{k_{n_2}} - \alpha| < \epsilon_2(P_2)$,$\forall m(m \leq k_m)(\mathrm{H}_3)$ から $N \leq n \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon(P)$ が導かれるように変数 $\epsilon_1, \epsilon_2, N, n_1, {n_1}', n_2, m$ に代入すべき項を選ぶ。3条件

$$\forall m(m \leq k_m), N \leq n \Rightarrow N_1 \leq n_1 \wedge N_1 \leq {n_1}'$$
$$N \leq n \Rightarrow N_2 \leq n_2$$
$$\forall m(m \leq k_m), N \leq n, |a_{n_1} - a_{{n_1}'}| < \epsilon_1, |a_{k_{n_2}} - \alpha| < \epsilon_2 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon$$

を満たすように選べばよい。

この場合、N は3つ目の条件に依存させること必要はなく、最初の2条件を満たすように N を選べばよい。例えば、

$$N = \max(N_1, N_2)$$

である。また、最初の2条件を満たす $n_1, {n_1}', n_2$ は、$n_1 \geq n, {n_1}' \geq n, n_2 \geq n$ を満たしていればよい $(*)$。

3つ目の条件を満たす $\epsilon_1, \epsilon_2, n_1, {n_1}', n_2$ を方法 (i) で求める。まず、三角不等式 $(i.1)$ を用いると

$$\begin{aligned} |a_n - \alpha| \quad &= \quad |a_n - a_{n'} + a_{n'} - \alpha| \\ &\leq \quad |a_n - a_{n'}| + |a_{n'} - \alpha| \end{aligned}$$

を得る。2つの前提 $|a_{n_1} - a_{{n_1}'}| < \epsilon_1(i.3), |a_{k_{n_2}} - \alpha| < \epsilon_2(i.4)$ を用いるためには、$n_1 = n$,$n' = {n_1}' = k_{n_2}$ とすればよい。n_2 は、$n_2 = n$ とすればよい（すなわち、$(n_1, {n_1}', n_2) = (n, k_n, n)$）。具体的には、

$$\begin{aligned} |a_n - \alpha| \quad &\leq \quad |a_{n_1} - a_{{n_1}'}| + |a_{k_n} - \alpha| \\ &< \quad \epsilon_1 + \epsilon_2 \end{aligned}$$

を得る（ステップ１，２）。次に、$\epsilon_1 + \epsilon_2 \leq \epsilon$ を満たす ϵ_1, ϵ_2 を選ぶのだが、例えば

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2}$$

とすればよい（ステップ３）。

最後に、$m = n$ のときの (H_3)、すなわち、$n \leq k_n$ を用いると、$(*)$ から $(n_1, {n_1}', n_2) = (n, k_n, n)$ が最初の2条件も満たすことがわかる。

8. 同符号

$N_1 \le n_1 \Rightarrow |a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1 (P_1$より$)$ から $N \le n \Rightarrow (\alpha > 0 \Rightarrow a_n > 0) \wedge (\alpha < 0 \Rightarrow a_n < 0) (P)$ が導かれるように変数 ϵ_1, N, n_1 に代入すべき項を選ぶ。2 条件

$$N \le n \Rightarrow N_1 \le n_1$$
$$|a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1 \Rightarrow (\alpha > 0 \Rightarrow a_n > 0) \wedge (\alpha < 0 \Rightarrow a_n < 0)$$

を満たすように選べばよい。

この場合、N と n_1 は 2 つ目の条件に依存させる必要がなく、1 つ目の条件を満たすように N, n_1 を選べばよい。例えば、

$$N = N_1, n_1 = n$$

とすればよい。

2 つ目の条件を満たす ϵ_1 を方法 (ii) で求める。

$\alpha > 0$ のとき: 前提 $|a_n - \alpha| < \epsilon_1$ より、$\alpha - \epsilon_1 < a_n$ を得る。よって、$0 \le \alpha - \epsilon_1$ を満たす $\epsilon_1 > 0$ を選べばよい。$\alpha > 0$ より、例えば、

$$\epsilon_1 = \alpha = |\alpha|$$

とすればよい。

$\alpha < 0$ のとき: 前提 $|a_n - \alpha| < \epsilon_1$ より、$a_n < \alpha + \epsilon_1$ を得る。よって、$\alpha + \epsilon_1 \le 0$ を満たす ϵ_1 を選べばよい。$\alpha < 0$ より、$-\alpha > 0$ であるから、例えば、

$$\epsilon_1 = -\alpha = |\alpha|$$

とすればよい。

以上より、いずれの場合も、$\epsilon_1 = |\alpha|$ とすればよい。

9. 一意性[11]

$N_1 \le n_1 \Rightarrow |a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1 (P_1)$,$N_2 \le n_2 \Rightarrow |a_{n_2} - \beta| < \epsilon_2 (P_2)$,$\alpha \ne \beta (\mathrm{H}_3)$ から $\perp$ (P) が導かれるように変数 $\epsilon_1, \epsilon_2, n_1, n_2$ に代入すべき項を選ぶ。3 条件

$$\Rightarrow N_1 \le n_1$$
$$\Rightarrow N_2 \le n_2$$
$$|a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1, |a_{n_2} - \beta| < \epsilon_2, \alpha \ne \beta \Rightarrow \perp$$

を満たすように選べばよい。

n_1, n_2 は、3 つ目の条件より、$n_1 = n_2$ であることが望ましい。他の 2 つの条件も満たすには、例えば

$$n_1 = n_2 = \max(N_1, N_2)$$

[11] この代入方法は、一樂 [2] で用いている。

とすればよい。

3 つ目の条件を満たす ϵ_1, ϵ_2 を方法 (i) で求める。
$\alpha > \beta$ のとき:まず、三角不等式 $(i.1)$ を用いると、

$$\begin{aligned} \alpha - \beta = |\alpha - \beta| &= |\alpha - a_{n_1} + a_{n_2} - \beta| \\ &\leq |a_{n_1} - \alpha| + |b_{n_2} - \beta| \end{aligned}$$

を得る（ステップ１）。次に、2 つの前提 $|a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1 (i.3), |a_{n_2} - \beta| < \epsilon_2 (i.4)$ を用いると

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &\leq |a_{n_1} - \alpha| + |b_{n_2} - \beta| \\ &< \epsilon_1 + \epsilon_2 \end{aligned}$$

を得る（ステップ２）。最後に、矛盾（ここでは $\alpha - \beta < \alpha - \beta$）を導きたいので、

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 = \alpha - \beta$$

を満たす ϵ_1, ϵ_2 を選ぶのだが、例えば、

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{|\alpha - \beta|}{2}$$

とすればよい。
$\beta > \alpha$ のとき:上の場合と同様に考えると、

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{|\alpha - \beta|}{2}$$

とすればよいことがわかる。
以上より、いずれの場合も、

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{|\alpha - \beta|}{2}$$

とすればよい。

10. 上限[12]
$N_1 \leq n_1 \Rightarrow |a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1 (P_1)$,$a_{n_2} \leq b (P_2)$,$\alpha > b (\mathrm{H}_3)$ から $\perp$ (P) が導かれるように変数 ϵ_1, n_1, n_2 に代入すべき項を選ぶ。2 条件

$$\Rightarrow N_1 \leq n_1$$
$$|a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1, a_{n_2} \leq b, \alpha > b \Rightarrow \perp$$

を満たすように選べばよい。1 つ目の条件を満たすには、

$$n_1 = N_1$$

とすればよい。
2 つ目の条件を満たす ϵ_1, n_2 を方法 (ii) で求める。

[12] この代入方法は、一樂 [2] で用いている。

前提 $|a_{N_1} - \alpha| < \epsilon_1$ より、$\alpha - \epsilon_1 < a_{N_1}$ を得る。$a_{n_2} \leq b(P_2)$ を用いるには、

$$n_2 = N_1$$

とすればよい。$\alpha - \epsilon_1 < a_{N_1}$ と条件 P_2（すなわち、$a_{N_1} \leq b$）より、

$$\alpha - \epsilon_1 < b$$

を得る。矛盾（ここでは $\alpha - \epsilon_1 < \alpha - \epsilon_1$）を導きたいので、$\alpha - \epsilon_1 = b$ を満たす ϵ_1 を選ぶ。すなわち

$$\epsilon_1 = \alpha - b$$

とすればよい。

11. 数列 $\{\frac{1}{i}\}$ の収束[13]

$N \leq n \Rightarrow |\frac{1}{n}| < \epsilon(P)$ を満たすように変数 N に代入すべき項を選ぶ。$|\frac{1}{n}| < \epsilon$ は $\frac{1}{\epsilon} < n$ と同値であるから、例えば、

$$N = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$$

とすればよい。

参考文献

[1] 飯高茂：『微積分と集合　そのまま使える答えの書き方』. 講談社サイエンティフィク, 東京, 1999.

[2] 一樂重雄：『集合と位相　そのまま使える答えの書き方』. 講談社サイエンティフィク, 東京, 2001.

[3] 鹿島亮：『数理論理学』. 朝倉書店, 東京, 2009.

[4] 高木貞治：『解析概論』. 岩波書店, 東京, 2010.

[5] 田島一郎：『イプシロン・デルタ』. 共立出版, 東京, 1978.

[6] 細井勉：『わかるイプシロン・デルタ』. 日本評論社, 東京, 1995.

[13] 細井 [6] で、N の選び方を説明している。ただし、そこでは $N = [\frac{1}{\epsilon} + 1]$ としている。