# 形式体系に基づく実証明の分析

加藤あや美 (南山大学大学院数理情報研究科)
佐々木克巳 (南山大学情報理工学部)
e-mail: sasaki@nanzan-u.ac.jp

**概要** 本研究は、シークエント体系 SNK に基づいて、集合の分野で扱われている定理の証明を分析する。本研究で扱う定理は、ド・モルガン律と分配律である。具体的には、18 冊の文献から証明を抽出し、それらを体系 SNK に基づいた方法で表現し、分類・整理する。また、この分類毎に、多く用いられた推論規則を用いた証明の形を作成する。

## 1 はじめに

本研究は、集合の分野で扱われている定理の証明を分析する。本研究で扱う定理は、ド・モルガン律と分配律、すなわち、3 つの集合 $A, B, C$ に対する次の 4 つの性質である。

**性質 1** $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

**性質 2** $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

**性質 3** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

**性質 4** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

これらの 4 つの性質に対し、次の手順でその証明を分析する。

1. 各性質に対して、文献 [1-6,8-19] から証明を抽出する。
2. 手順 1 で抽出した証明をシークエントの変化で表現する。この表現を、実際の証明図と名付ける。
3. 手順 2 の証明図に、SNK 推論規則を補って SNK 証明図を作成する。この証明図を、省略なしの証明図と名付ける。
4. 手順 3 の証明図を、その形から分類する。
5. 各分類に対して、多く用いられている推論規則の組み合わせを調べる。
6. 手順 5 の結果から、適切な証明図を作成する。
7. 各性質に対し、方法 1 の右 $\subseteq$ 左と左 $\subseteq$ 右を比較する。

手順 1 において、性質 1 の証明は文献 [1-3,5-6,10-12,17-19] から、性質 2 の証明は文献 [2,6,10,18] から、性質 3 の証明は文献 [1-4,6,9-10,12-14,16] から、性質 4 の証明は文献 [1-2,4-6,8,10-11,15,18-19] から抽出した。これらの証明は、次のいずれかの方法で示されていた。

**方法 1** (左辺 $\subseteq$ 右辺) と (右辺 $\subseteq$ 左辺) を示す方法

**方法 2** $\forall x(x \in$ 左辺 $\Leftrightarrow x \in$ 右辺$)$ を示す方法

以下、方法 1 の (左辺 $\subseteq$ 右辺),(右辺 $\subseteq$ 左辺) をそれぞれ (左 $\subseteq$ 右),(右 $\subseteq$ 左) と略記する。以下の、2 節では本研究で用いる体系 SNK について述べる。3 節では、ド・モルガン律に対して手順 2〜4 を行った結果について述べる。4 節では、ド・モルガン律に対して手順 5〜6 を行った結果について述べる。5 節では、分配律に対して手順 2〜4 を行った結果について述べる。6 節では、分配律に対して手順 5〜6 を行った結果について述べる。7 節では、手順 7 について述べる。

## 2 体系 SNK

この節では、本研究で用いる体系 SNK について述べる。
論理式は次の言語を用いて、普通の方法で定義する。

1. 対象変数 $x$
2. 述語記号
   - (集合 $A$ に対して、)1 変数の述語記号 “$\in A$”
   - (集合 $A, B$ に対して、)0 変数の述語記号 “$A \subseteq B$”
   - (集合 $A, B$ に対して、)0 変数の述語記号 “$A = B$”
3. 論理記号 $\wedge$(かつ),$\vee$(または),$\supset$(ならば),$\neg$(でない),$\forall$(すべて)

論理式を表すのに、$P$,$Q$,$R$,$P_1$,$P_2$,$\cdots$などの記号を、論理式の有限集合を表すのに $\Gamma$,$\Delta$ を用いる。また、論理式 $(P \supset Q) \wedge (Q \supset P)$ を $P \Leftrightarrow Q$ と略記する。論理式の解釈は、述語記号をそのまま集合の文と解釈し、各論理記号をそのまま日本語に反映させて解釈して定まるものとする。本研究では、論理式 $P$ と $P$ からその解釈で定まる文を同一視して、その文も $P$ で表すことにする。

体系 SNK の定義は、文献 [7] に従う。ここでは、その概観を述べる。まず、式について述べる。表現

$$\Gamma \to P$$

を式という。$\Gamma$ をこの式の左辺、$P$ を右辺という。左辺に “{”,“}”,“$\cup$” が出現するときは、適宜省略する。例えば、

$$\{P_1, P_2\} \cup \Gamma \to Q$$

を

$$P_1, P_2, \Gamma \to Q$$

のように省略する。次に、推論規則について述べる。式 $S, S_1, \cdots, S_n$ に対し、図式

$$\frac{S_1 \qquad \cdots \qquad S_n}{S}$$

を推論規則という。$S$ をこの推論規則の下式、各 $S_i$ をこの推論規則の上式という。最後に、SNK 証明図について述べる。SNK 証明図は、SNK 公理 $P \to P$ と SNK 推論規則から普通の方法で定義する。証明図の一番下の式を終式、一番上の式を始式という。なお、SNK 証明図は終式から上に向かって作成することが多いので、ある SNK 推論規則を優先するとは、この SNK 推論規則を証明図の下側で適用することとする。

本研究では、実際の証明に近い SNK 証明図を作成したいので、文献 [7] の SNK 推論規則 $Def$ をより具体的に定義し、さらにいくつかの推論規則を文献 [7] の SNK 推論規則に追加する。以下、集合を表す記号として、$A$,$B$,$C$,$X$ などを用いる。

文献 [7] では、文 $P_1$ が文 $P_2$ により定義されているとき、

$$\frac{P_2, \Gamma \to Q}{P_1, \Gamma \to Q} \qquad \frac{\Gamma \to P_2}{\Gamma \to P_1} \tag{1}$$

の 2 つの SNK 推論規則 $Def$ に導入した。$P_1, P_2$ の具体的な関係は表 1 に定める。表 1 には、各 $P_1, P_2$ に対応する推論規則の名前も記しておく。

表 1: $Def$

| 名前 | $P_1$ | $P_2$ |
|---|---|---|
| $\subseteq Def$ | $A \subseteq B$ | $\forall x(x \in A \supset x \in B)$ |
| $\cap Def$ | $x \in A \cap B$ | $x \in A \wedge x \in B$ |
| $\cup Def$ | $x \in A \cup B$ | $x \in A \vee x \in B$ |
| 差 $Def$ | $x \in A - B$ | $x \in A \wedge x \notin B$ |
| 補 $Def$ | $x \in A^c$ | $x \notin A$ |
| ※ $\notin Def$ | $x \notin A$ | $\neg(x \in A)$ |
| =set | $A = B$ | $\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ |

※ $A$ が集合を表す変数のときは、$x \notin A$ と $\neg(x \in A)$ を同一視してこれを SNK 推論規則としない。

文 $P_1$ と文 $P_2$ に

- $P_1 \Leftrightarrow P_2$ がよく用いられている性質である。

という関係があるときも、(1) の形の推論規則を SNK 推論規則に追加する。$P_1, P_2$ の具体的な関係は表 2 のとおりであり、そこでは各 $P_1, P_2$ に対応する推論規則の名前も記しておく。

表 2: 追加すべき推論規則

| 名前 | $P_1$ | $P_2$ |
|---|---|---|
| $dM1$ | $\neg(P \vee Q)$ | $\neg P \wedge \neg Q$ |
| $dM2$ | $\neg(P \wedge Q)$ | $\neg P \vee \neg Q$ |
| $dis1$ | $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ | $P \wedge (Q \vee R)$ |
| $dis2$ | $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ | $P \vee (Q \wedge R)$ |
| $\wedge$の律 | $(x \in A \wedge \notin B) \wedge (x \in A \wedge \notin C)$ | $x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)$ |

また、論理式 Q に現れる論理式 $P_1$ のいくつかを論理式 $P_2$ で置き換えた論理式を $Q[P_2/P_1]$ としたとき、表 1, 表 2 の $P_1$,$P_2$ の組に対して、

$$\frac{Q[P_2/P_1], \Gamma \to R}{Q, \Gamma \to R} \qquad \frac{\Gamma \to Q[P_2/P_1]}{\Gamma \to Q}$$

を追加する。この推論規則の名前は、$P_1$,$P_2$ に対する表 1 の規則の名前に*をつけたものとする。さらに、次の 9 つの推論規則も追加すべき推論規則に追加する。

$$\frac{\Gamma \to A \subseteq B}{\Gamma \to A \cap C \subseteq B \cap C}\ (Inf1) \qquad \frac{\Gamma \to B \subseteq C}{\Gamma \to A \cup B \subseteq A \cup C}\ (Inf2)$$

$$\frac{\Gamma \to P \vee (\neg P \vee Q \wedge R)}{\Gamma \to P \vee (Q \wedge R)}\ (Inf3) \qquad \frac{\Gamma \to A \subseteq B \quad \Gamma \to A \subseteq C}{\Gamma \to A \subseteq B \cap C}\ (Inf4)$$

$$\frac{\Gamma \to A \subseteq C \quad \Gamma \to B \subseteq C}{\Gamma \to A \cup B \subseteq C}\ (Inf5) \qquad \frac{x \in B \cap C \to x \in B \quad \to B \subseteq A \cup B}{x \in B \cap C \to x \in A \cup B}\ (Inf6)$$

$$\frac{P, \Gamma \to Q \quad \neg P, \Gamma \to Q}{\Gamma \to Q}\ (EM) \qquad \frac{\neg P, \Gamma \to Q}{\Gamma \to P \vee Q}\ (RAA2)$$

$$\frac{Q, \Gamma \to R}{\neg P, P \vee Q, \Gamma \to R}\ (\text{選言三段論法})$$

表 2 の $dM1$,$dM2$,$dis1$,$dis2$,∧の律 と、それに*をつけた $dM1*$,$dM2*$,$dis1*$,$dis2*$,∧の律* 、および、最後に追加した 9 つの SNK 推論規則 $Inf1$,$Inf2$,$Inf3$,$Inf4$, $Inf5$, $Inf6$, $EM$, $RAA2$, 選言三段論法を追加すべき推論規則と呼ぶ。

# 3　ド・モルガン律の証明の分類

この節では、ド・モルガン律に対して手順 2〜4 を行った結果について述べる。手順 1 における文献は [1-3,5-6,10-12,17-19] である。

## 3.1　実際の証明図

まず、手順 2 で作成した実際の証明図について述べる。作成方法は、次のとおりである。

- 上式が下式よりも簡単になる。
- 左辺の推論規則を優先する。

本研究では、11 冊の文献から抽出した証明文に対し、実際の証明図を作成した。以下に、方法 1 で証明している文献から 2 つを抽出し、その (右 ⊆ 左) の実際の証明図を示す。左の証明図が、文献 [5](右 ⊆ 左) であり、右の証明図が、文献 [19](右 ⊆ 左) である。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \notin A, x \notin B \to x \notin A \cup B}{x \notin A, x \notin B \to x \in (A \cup B)^c}}{x \in A^c, x \in B^c \to x \in (A \cup B)^c}}{x \in A^c \cap B^c \to x \in (A \cup B)^c}}{\to A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{x \notin A, x \notin B \to x \notin A \cup B}{x \in A^c, x \in B^c \to x \notin A \cup B}}{x \in A^c \cap B^c \to x \notin A \cup B}}{\to A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c}$$

なお、一般には 1 つの証明に対して、複数の「実際の証明図」をかくことができる。文献 [5] の (右 ⊆ 左) の証明から、別の方法で作成した「実際の証明図」を以下に示す。

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{x \notin A, x \notin B \to x \notin A \cup B}{x \in A^c, x \in B^c \to x \notin A \cup B}}{x \in A^c \cap B^c \to x \notin A \cup B}}{x \in A^c \cap B^c \to x \in (A \cup B)^c}}{\to A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c}$$

### 3.2 省略なしの証明図

次に、手順 3 で作成した省略なしの証明図について述べる。省略なしの証明図とは、次のように作成された証明図である。

- 実際の証明図における推論規則のうち、SNK 推論規則以外のものを、次のいずれかの SNK 推論規則の組み合わせで表現する。
  ・$=set, \to \forall$,0 個か 2 個の $Def$ の組み合わせ
  ・$\subseteq Def, \to \forall$,0 個か 1 個の $\to \supset$ の組み合わせ
  ・0 個以上の $Def$,0 個以上の $\to \wedge$,0 個以上の $\to \vee$,0 個か 1 個のそれ以外の規則の組み合わせ
- 方法 1 を使用した証明図の推論規則を補う際、すべての上式が公理になる推論規則は省略する。
- 方法 2 を使用した証明図は、始式を省略する。
- 推論規則を補う優先順位は、以下の小さい番号のものを図の下側に補う順位とする。
  1. $Def, Def*$
  2. 追加すべき推論規則
     $\wedge$ の律は方法 2 の場合のみ使用し、2 つ以上が適用できるときは全体が短くなるものを優先する。
  3. $\to \wedge, \to \vee$
- 上の 1,2,3 のそれぞれにおいて、右辺 (あるいは $\Leftrightarrow$ の右) を主論理式とする推論規則は、左辺 (あるいは $\Leftrightarrow$ の左) を主論理式とする推論規則を適用できないときのみに適用する。

### 3.3 証明の分類

最後に手順 4 の結果、すなわち、手順 3 の結果から証明を分類した結果について述べる。3.1,3.2 節の方法で作成した省略なしの証明図が同じ証明、または、その省略なしの証明図の推論規則の順番のみ異なる証明は、同じ分類に属すとした。

性質 1 について述べる。性質 1 の分類は、5 種類あった。

次の省略なしの証明図に対応する証明を、分類 1.1 とおく。文献は、[2],[11],[12] である。

$$\begin{array}{cl}
x \in A, x \notin B \to x \in A \land x \notin B \quad x \in A, x \notin C \to x \in A \land x \notin C & \\ \hline
x \in A, x \notin B, x \notin C \to (x \in A \land x \notin B) \land (x \in A \land x \notin C) & (\to \land) \\ \hline
x \in A, x \notin B, x \notin C \to x \in A - B \land x \in A - C & (\text{差}\ Def*) \\ \hline
x \in A, x \notin B, x \notin C \to x \in (A - B) \cap (A - C) & (\cap Def) \\ \hline
x \in A, \neg(x \in B \lor x \in C) \to x \in (A - B) \cap (A - C) & (dM1) \\ \hline
x \in A, \neg(x \in B \cup C) \to x \in (A - B) \cap (A - C) & (\cup Def*) \\ \hline
x \in A, x \notin B \cup C \to x \in (A - B) \cap (A - C) & (\notin Def) \\ \hline
x \in A - (B \cup C) \to x \in (A - B) \cap (A - C) & (\text{差}\ Def) \\ \hline
\to x \in A - (B \cup C) \supset x \in (A - B) \cap (A - C) & (\to\supset) \\ \hline
\to \forall x(x \in A - (B \cup C) \supset x \in (A - B) \cap (A - C)) & (\to \forall) \\ \hline
\to A - (B \cup C) \subseteq (A - B) \cap (A - C) & (\subseteq Def)
\end{array}$$

$$\begin{array}{cl}
x \in A, x \notin B, x \notin C \to x \in A \land (x \notin B \land x \notin C) & \\ \hline
x \in A, x \notin B, x \notin C \to x \in A \land \neg(x \in B \lor x \in C) & (dM1*) \\ \hline
x \in A, x \notin B, x \notin C \to x \in A \land \neg(x \in B \cup C) & (\cup Def*) \\ \hline
x \in A, x \notin B, x \notin C \to x \in A \land x \notin B \cup C & (\notin Def*) \\ \hline
x \in A, x \notin B, x \notin C \to x \in A - (B \cup C) & (\text{差}\ Def) \\ \hline
x \in A - B, x \in A - C \to x \in A - (B \cup C) & (\text{差}\ Def) \\ \hline
x \in (A - B) \cap (A - C) \to x \in A - (B \cup C) & (\cap Def) \\ \hline
\to x \in (A - B) \cap (A - C) \supset x \in A - (B \cup C) & (\to\supset) \\ \hline
\to \forall x(x \in (A - B) \cap (A - C) \supset x \in A - (B \cup C)) & (\to \forall) \\ \hline
\to (A - B) \cap (A - C) \subseteq A - (B \cup C) & (\subseteq Def)
\end{array}$$

次の「$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$」または「$\mathcal{P}$ と $\mathcal{R}$」の省略なしの証明図に対応する証明を、分類 1.2 とおく。文献は $\mathcal{Q}$ の形が [5]、$\mathcal{R}$ の形が [19] である。5 ページでは、文献 [5] の、別の方法で作成した証明も示した。その証明から省略なしの証明図を作ると $\mathcal{R}$ となる。その意味で、$\mathcal{Q}$ と $\mathcal{R}$ は同じ分類に属すと考えた。左の証明図が、$\mathcal{P}$ であり、右の証明図が、$\mathcal{Q}$ である。

$$\begin{array}{cl}
x \notin A, x \notin B \to x \notin A \land x \notin B & \\ \hline
x \notin A, x \notin B \to x \in A^c \land x \in B^c & (\text{補}\ Def) \\ \hline
x \notin A, x \notin B \to x \in A^c \cap B^c & (\cap Def) \\ \hline
\neg(x \in A \lor x \in B) \to x \in A^c \cap B^c & (dM1) \\ \hline
\neg(x \in A \cup B) \to x \in A^c \cap B^c & (\cup Def) \\ \hline
x \notin A \cup B \to x \in A^c \cap B^c & (\notin Def) \\ \hline
x \in (A \cup B)^c \to x \in A^c \cap B^c & (\text{補}\ Def) \\ \hline
\to x \in (A \cup B)^c \supset x \in A^c \cap B^c & (\to\supset) \\ \hline
\to \forall x(x \in (A \cup B)^c \supset x \in A^c \cap B^c) & (\to \forall) \\ \hline
\to (A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c & (\subseteq Def)
\end{array}$$

$$\begin{array}{cl}
x \notin A, x \notin B \to x \notin A \land x \notin B & \\ \hline
x \notin A, x \notin B \to \neg(x \in A \lor x \in B) & (dM1) \\ \hline
x \notin A, x \notin B \to \neg(x \in A \cup B) & (\cup Def) \\ \hline
x \notin A, x \notin B \to x \notin A \cup B & (\notin Def) \\ \hline
x \notin A, x \notin B \to x \in (A \cup B)^c & (\text{補}\ Def) \\ \hline
x \in A^c, x \in B^c \to x \in (A \cup B)^c & (\text{補}\ Def) \\ \hline
x \in A^c \cap B^c \to x \in (A \cup B)^c & (\cap Def) \\ \hline
\to x \in A^c \cap B^c \supset x \in (A \cup B)^c & (\to\supset) \\ \hline
\to \forall x(x \in A^c \cap B^c \supset x \in (A \cup B)^c) & (\to \forall) \\ \hline
\to A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c & (\subseteq Def)
\end{array}$$

$\mathcal{R}$ ($\vdots$ の部分は、$\mathcal{Q}$ と同じである)

$$\begin{array}{cl}
\vdots & \\ \cline{1-1}
x \notin A, x \notin B \to x \notin A \cup B & (\notin Def) \\ \cline{1-1}
x \in A^c, x \in B^c \to x \notin A \cup B & (\text{補}\, Def) \\ \cline{1-1}
x \in A^c \cap B^c \to x \notin A \cup B & (\cap Def) \\ \cline{1-1}
x \in A^c \cap B^c \to x \in (A \cup B)^c & (\text{補}\, Def) \\ \cline{1-1}
\vdots & (\to \supset)
\end{array}$$

次の省略なしの証明図に対応する証明を、分類 1.3 とおく。文献は、[3,10,17,18] である。

$$\begin{array}{cl}
(\text{補}\, Def*) & \\
\to x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c & \\ \cline{1-1}
\to x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c & (\cap Def*) \\ \cline{1-1}
\to \neg(x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c & (dM1*) \\ \cline{1-1}
\to \neg(x \in A \cup B) \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c & (\cup Def*) \\ \cline{1-1}
\to x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c & (\notin Def*) \\ \cline{1-1}
\to x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c & (\text{補}\, Def*) \\ \cline{1-1}
\to \forall x(x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c) & (\to \forall) \\ \cline{1-1}
\to (A \cup B)^c = A^c \cap B^c & (= set)
\end{array}$$

次の省略なしの証明図に対応する証明を、分類 1.4 とおく。文献は、[1] である。$X$ は、全体集合である。($\vdots$ の部分は、分類 1.3 と同じである)

$$\begin{array}{cl}
(\wedge\text{の律}*) & \\
\to x \in X \wedge x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow (x \in X \wedge x \notin A) \wedge (x \in X \wedge x \notin B) & \\ \cline{1-1}
\to x \in X \wedge x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c & (\text{補}\, Def*) \\ \cline{1-1}
\to x \in X \wedge x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c & (\cap Def*) \\ \cline{1-1}
\to x \in X \wedge \neg(x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c & (dM1*) \\ \cline{1-1}
\to x \in X \wedge \neg(x \in A \cup B) \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c & (\cup Def*) \\ \cline{1-1}
\to x \in X \wedge x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c & (\notin Def*) \\ \cline{1-1}
\vdots & (\text{補}\, Def*)
\end{array}$$

次の省略なしの証明図に対応する証明を、分類 1.5 とおく。文献は、[6] である。

$$\begin{array}{cl}
(\wedge\text{の律}*) & \\
\to x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in A \wedge x \notin C & \\ \cline{1-1}
\to x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \Leftrightarrow x \in A - B \wedge x \in A - C & (\text{差}\, Def*) \\ \cline{1-1}
\to x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cap (A - C) & (\cap Def*) \\ \cline{1-1}
\to x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cap (A - C) & (dM1*) \\ \cline{1-1}
\to x \in A \wedge \neg(x \in B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cap (A - C) & (\cup Def*) \\ \cline{1-1}
\to x \in A \wedge x \notin B \cup C \Leftrightarrow x \in (A - B) \cap (A - C) & (\notin Def*) \\ \cline{1-1}
\to x \in A - (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cap (A - C) & (\text{差}\, Def*) \\ \cline{1-1}
\to \forall x(x \in A - (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cap (A - C)) & (\to \forall) \\ \cline{1-1}
\to A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C) & (= set)
\end{array}$$

結果として 5 つの分類は、表 3 に示す性質をもつ。この表より、5 つの分類が証明すべき形およびその方法による分類と一致しているということが分かる。

性質 2 について述べる。性質 2 の分類は、3 種類あった。
次の省略なしの証明図に対応する証明を、分類 2.1 とおく。文献は、[2] である。

$$\begin{array}{cl}
x \in A, x \notin B \lor x \notin C \to x \in A \land (x \notin B \lor x \notin C) & \\ \hline
x \in A, x \notin B \lor x \notin C \to (x \in A \land x \notin B) \lor (x \in A \land x \notin C) & (dis1) \\ \hline
x \in A, x \notin B \lor x \notin C \to x \in A - B \lor x \in A - C & (差\ Def) \\ \hline
x \in A, x \notin B \lor x \notin C \to x \in (A - B) \cup (A - C) & (\cup Def) \\ \hline
x \in A, \neg(x \in B \land x \in C) \to x \in (A - B) \cup (A - C) & (dM2) \\ \hline
x \in A, \neg(x \in B \cap C) \to x \in (A - B) \cup (A - C) & (\cap Def) \\ \hline
x \in A, x \notin B \cap C \to x \in (A - B) \cup (A - C) & (\notin Def) \\ \hline
x \in A - (B \cap C) \to x \in (A - B) \cup (A - C) & (差\ Def) \\ \hline
\to x \in A - (B \cap C) \supset x \in (A - B) \cup (A - C) & (\to \supset) \\ \hline
\to \forall x(x \in A - (B \cap C) \supset x \in (A - B) \cup (A - C) & (\to \forall) \\ \hline
\to A - (B \cap C) \subseteq (A - B) \cup (A - C) & (\subseteq Def)
\end{array}$$

$$\begin{array}{cl}
x \in A, x \notin B \lor x \notin C \to x \in A \land (x \notin B \lor x \notin C) & \\ \hline
x \in A, x \notin B \lor x \notin C \to x \in A \land \neg(x \in B \land x \in C) & (dM2) \\ \hline
x \in A, x \notin B \lor x \notin C \to x \in A \land \neg(x \in B \cap C) & (\cap Def*) \\ \hline
x \in A, x \notin B \lor x \notin C \to x \in A \land x \notin B \cap C & (\notin Def) \\ \hline
x \in A, x \notin B \lor x \notin C \to x \in A - (B \cap C) & (差\ Def) \\ \hline
(x \in A \land x \notin B) \lor (x \in A \land x \notin C) \to x \in A - (B \cap C) & (dis1) \\ \hline
x \in A - B \lor x \in A - C \to x \in A - (B \cap C) & (差\ Def) \\ \hline
x \in (A - B) \cup (A - C) \to x \in A - (B \cap C) & (\cup Def) \\ \hline
\to x \in (A - B) \cup (A - C) \supset A - (B \cap C) & (\to \supset) \\ \hline
\to \forall x(x \in (A - B) \cup (A - C) \supset A - (B \cap C)) & (\to \forall) \\ \hline
\to (A - B) \cup (A - C) \subseteq A - (B \cap C) & (\subseteq Def)
\end{array}$$

次の省略なしの証明図に対応する証明を、分類 2.2 とおく。文献は、[6] である。

$$\begin{array}{cl}
(dis1*) & \\
\to x \in A \land (x \notin B \lor x \notin C) \Leftrightarrow (x \in A \land x \notin B) \lor (x \in A \land x \notin C) & \\ \hline
\to x \in A \land (x \notin B \lor x \notin C) \Leftrightarrow x \in A - B \lor x \in A - C & (差\ Def*) \\ \hline
\to x \in A \land (x \notin B \lor x \notin C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A - C) & (\cup Def*) \\ \hline
\to x \in A \land \neg(x \in B \land x \in C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A - C) & (dM2*) \\ \hline
\to x \in A \land \neg(x \in B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A - C) & (\cap Def*) \\ \hline
\to x \in A \land x \notin B \cap C \Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A - C) & (\notin Def*) \\ \hline
\to x \in A - (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A - C) & (差\ Def*) \\ \hline
\to \forall x(x \in A - (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A - C)) & (\to \forall) \\ \hline
\to A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C) & (= set)
\end{array}$$

次の省略なしの証明図に対応する証明を、分類 2.3 とおく。文献は、[10,18] である。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\text{補}\, Def*)}{\to x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \vee x \in B^c}\ (\cup Def*)}{\to x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c}\ (dM2*)}{\to \neg(x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c}\ (\cap Def*)}{\to \neg(x \in A \cap B) \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c}\ (\notin Def*)}{\to x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c}\ (\text{補}\, Def*)}{\to x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c}\ (\to \forall)}{\to \forall x (x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c)}\ (= set)}{\to (A \cap B)^c = A^c \cup B^c}
$$

結果として 3 つの分類は、表 4 に示す性質をもつ。この表より、3 つの分類が証明すべき形およびその方法による分類と一致しているということが分かる。

表 3: 性質 1 の分類

| 分類 | 証明方法 | 文献 |
|---|---|---|
| 分類 1.1 | $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ を方法 1 で示す | [2,11,12] |
| 分類 1.2 | $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ を方法 1 で示す | [5,19] |
| 分類 1.3 | $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ を方法 2 で示し、$x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A$ を用いる | [3,10,17,18] |
| 分類 1.4 | $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ を方法 2 で示し、$x \in A^c \Leftrightarrow x \in X - A$ を用いる | [1] |
| 分類 1.5 | $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ を方法 2 で示す | [6] |

表 4: 性質 2 の分類

| 分類 | 証明方法 | 文献 |
|---|---|---|
| 分類 2.1 | $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ を方法 1 で示す | [2] |
| 分類 2.2 | $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ を方法 2 で示す | [6] |
| 分類 2.3 | $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ を方法 2 で示す | [10,18] |

## 4 ド・モルガン律の証明の分析

この節では、ド・モルガン律に対して手順 5〜6 を行った結果について述べる。

### 4.1 推論規則の組み合わせ

まず、手順 5 の結果について述べる。この手順における推論規則の組み合わせとは、「省略なしの証明図に現れる推論規則」の組み合わせで、もとになる実際の証明図に用いられているものである。

文献ごとの推論規則の組み合わせを、性質 1 については表 5 に、性質 2 については表 6 にまとめた。さらに、複数の文献の証明で構成される各分類 (1.1,1.2,1.3,2.3) に対して、使われていた推論規則の組み合わせを表 7 にまとめた。方法 1 で証明していた文献は、証明の向きを「左 $\subseteq$ 右」と

「右 $\subseteq$ 左」で示した。ただし、その推論規則の組み合わせを左 $\subseteq$ 右と右 $\subseteq$ 左で行っていた場合は「両方」と表記した。

表 5: 性質 1 の推論規則の組み合わせ

| 文献 | 推論規則の組み合わせ | 証明の向き |
|---|---|---|
| [1],[3],[6],[17] | $= set, \to \forall$ | |
| | $\notin Def*, \cup Def*, dM1*$ | |
| [2],[11],[12] | $\subseteq Def, \to \forall, \to \supset$ | 両方 |
| | $\notin Def, \cup Def*, dM1*$ | 両方 |
| [5] | $\subseteq Def, \to \forall, \to \supset$ | 両方 |
| | $\notin Def, \cup Def, dM1$ | 両方 |
| [10] | $= set, \to \forall$ | |
| | 補 $Def*, \notin Def*$ | |
| [18] | $= set, \to \forall$ | |
| | $\notin Def*, \cup Def*, dM1*$ | |
| | $\cap Def*,$ 補 $Def*$ | |
| [19] | $\subseteq Def, \to \forall, \to \supset$ | 左 $\subseteq$ 右 |
| | $\subseteq Def, \to \forall, \to \supset,$ 補 $Def$ | 右 $\subseteq$ 左 |
| | $\cap Def,$ 補 $Def*$ | 左 $\subseteq$ 右 |
| | $\notin Def, \cup Def, dM1$ | 両方 |

表 6: 性質 2 の推論規則の組み合わせ

| 文献 | 推論規則の組み合わせ | 証明の向き |
|---|---|---|
| [2] | $\subseteq Def, \to \forall, \to \supset$ | 両方 |
| | $\notin Def, \cap Def*, dM2*$ | 左 $\subseteq$ 右 |
| | 差 $Def*, dis1*$ | 右 $\subseteq$ 左 |
| | $\notin Def, \cap Def*, dM2*$ | 右 $\subseteq$ 左 |
| [6] | $= set, \to \forall, \cup Def*,$ 差 $Def*$ | |
| | $\notin Def*, \cap Def*, dM2*$ | |
| [10] | $= set, \to \forall$ | |
| | 補 $Def*, \notin Def*$ | |
| [18] | $= set, \to \forall$ | |
| | $\notin Def*, \cap Def*, dM2*$ | |
| | 補 $Def*, \cup Def*$ | |

### 4.2 適切な証明図

次に、手順 6 の結果について述べる。

ここで述べる適切な証明図とは、多くの文献で用いられている推論規則の組み合わせで構成された証明図のことである。具体的には、複数の文献の証明で構成される分類を対象として、次の

表 7: 分類ごとの推論規則の組み合わせ

| 分類 | 推論規則の組み合わせ | 証明の向き | 文献の数 (使ったいた文献/全文献) |
|---|---|---|---|
| 1.1 | $\subseteq Def, \to\forall, \to\supset$ | 両方 | 3/3 |
| | $\notin Def, \cup Def, dM1*$ | 両方 | 3/3 |
| 1.2 | $\subseteq Def, \to\forall, \to\supset$ | 左 $\subseteq$ 右 | 2/2 |
| | $\subseteq Def, \to\forall, \to\supset$ | 右 $\subseteq$ 左 | 1/2 |
| | $\subseteq Def, \to\forall, \to\supset$, 補 $Def$ | 右 $\subseteq$ 左 | 1/2 |
| | $\notin Def, \cup Def, dM1$ | 両方 | 2/2 |
| | $\cap Def$, 補 $Def$ | 左 $\subseteq$ 右 | 1/2 |
| 1.3 | $= set, \to\forall$ | | 4/4 |
| | $\notin Def*, \cup Def*, dM1*$ | | 3/4 |
| | 補 $Def*, \notin Def*$ | | 1/4 |
| | $\cap Def$, 補 $Def$ | | 1/4 |
| 2.3 | $= set, \to\forall$ | | 2/2 |
| | 補 $Def*, \notin Def*$ | | 1/2 |
| | $\notin Def*, \cap Def*, dM2*$ | | 1/2 |
| | 補 $Def*, \cup Def*$ | | 1/2 |

ように適切な証明図を作成した。

1. 「省略なしの証明図に現れる推論規則」の組み合わせのうち、実際の証明図に用いられているものを抽出する。
2. 1 で抽出した組み合わせのうち、全体の半数以上で使われていたものを抽出する。
3. 2 で抽出した組み合わせの中で、共通の推論規則が含まれている 2 つ以上の組み合わせがあった場合、それらの組み合わせを合併した組み合わせを採用する。
4. 3 で採用した組み合わせをつなげてできる証明図を、適切な証明図とする。

本研究が対象とした証明の範囲では、この方法で適切な証明図が一意に定まる。分類ごとの適切な証明図は、次のとおりである。ここでは、推論規則の組合せの名前は、組み合わされた SNK 推論規則を並べたものとした。さらに、それらが、$\to$ の左辺と右辺のどちらについて行っているものかを分かりやすくするために、各 SNK 推論規則の名前に $\to, \Leftrightarrow$ をつけた。

分類 1.1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}(\to \text{差}\, Def*)\\ x \in A, x \notin B, x \notin C \to x \in A - B \wedge x \in A - C\end{array}}{x \in A, x \notin B, x \notin C \to x \in (A - B) \cap (A - C)}\,(\to \cap Def)}{x \in A, x \notin B \cup C \to x \in (A - B) \cap (A - C)}\,(\notin Def* \to, \cup Def* \to, dM1* \to)}{x \in A - (B \cup C) \to x \in (A - B) \cap (A - C)}\,(\text{差}\, Def \to)}{\to A - (B \cup C) \subseteq (A - B) \cap (A - C)}\,(\subseteq Def, \to\forall, \to\supset)$$

$$
\begin{array}{cl}
(\to\notin Def*, \to\cup Def*, \to dM1*) & \\
x \in A, x \notin B, x \notin C \to x \in A \land x \notin B \cup C & \\ \cline{1-1}
x \in A, x \notin B, x \notin C \to x \in A - (B \cup C) & (\to \text{差}\ Def) \\ \cline{1-1}
x \in A - B, x \in A - C \to x \in A - (B \cup C) & (\text{差}\ Def \to) \\ \cline{1-1}
x \in (A - B) \cap (A - C) \to x \in A - (B \cup C) & (\cap Def \to) \\ \cline{1-1}
\to (A - B) \cap (A - C) \subseteq A - (B \cup C) & (\subseteq Def, \to \forall, \to\supset)
\end{array}
$$

分類 1.2

$$
\begin{array}{cl}
(\to \cap Def, \to \text{補}\ Def) & \\
x \notin A, x \notin B \to x \in A^c \cap B^c & \\ \cline{1-1}
x \notin A \cup B \to x \in A^c \cap B^c & (\notin Def \to, \cup Def \to, dM1 \to) \\ \cline{1-1}
x \in (A \cup B)^c \to x \in A^c \cap B^c & (\text{補}\ Def \to) \\ \cline{1-1}
\to (A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c & (\subseteq Def, \to \forall, \to\supset)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cl}
(\to\notin Def, \to \cup Def, \to dM1) & \\
x \notin A, x \notin B \to x \notin A \cup B & \\ \cline{1-1}
x \in A^c, x \in B^c \to x \notin A \cup B & (\text{補}\ Def \to) \\ \cline{1-1}
x \in A^c \cap B^c \to x \notin A \cup B & (\cap Def \to) \\ \cline{1-1}
x \in A^c \cap B^c \to x \in (A \cup B)^c & (\to \text{補}\ Def) \\ \cline{1-1}
\to A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c & (\subseteq Def, \to \forall, \to\supset)
\end{array}
$$

分類 1.3

$$
\begin{array}{cl}
(\text{補}\ Def*) & \\
\to x \notin A \land x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \land x \in B^c & \\ \cline{1-1}
\to x \notin A \land x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c & (\Leftrightarrow \cap Def*) \\ \cline{1-1}
\to x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c & (\notin Def \Leftrightarrow, \cup Def* \Leftrightarrow, dM1* \Leftrightarrow) \\ \cline{1-1}
\to x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c & (\text{補}\ Def* \Leftrightarrow) \\ \cline{1-1}
\to (A \cup B)^c = A^c \cap B^c & (= set, \to \forall)
\end{array}
$$

分類 2.3

$$
\begin{array}{cl}
(\text{補}\ Def*) & \\
\to x \notin A \lor x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \lor x \in B^c & \\ \cline{1-1}
\to x \notin A \lor x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c & (\Leftrightarrow \cup Def*) \\ \cline{1-1}
\to x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c & (\text{補}\ Def* \Leftrightarrow, \notin Def* \Leftrightarrow, \cap Def* \Leftrightarrow, dM2* \Leftrightarrow) \\ \cline{1-1}
\to (A \cap B)^c = A^c \cup B^c & (= set, \to \forall)
\end{array}
$$

## 5　分配律の証明の分類

この節では、分配律に対して手順 2〜4 を行った結果について述べる。手順 1 における文献は [1-6,8-16,18-19] である。ただし、文献 [9] の $(A\cap C)\cup(B\cap C) \subseteq (A\cup B)\cap C$ 証明は、もとの証明文の意図を正しく反映しているか曖昧なので対象から外す。実際の証明図の作成方法 (手順 2) と省略なしの証明図の作成方法 (手順 3) は 3 節と同様である。ただし、後者は、次の 7 つの式の上には推論規則を補わない。7 つのうち、最初の 2 つを、それぞれ式 1, 式 2 とおく。

$x \in A, A \subseteq A \cup B, A \subseteq A \cup C \to x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C$
$x \in A, A \subseteq A \cup (B \cap C) \to x \in A \cup (B \cap C)$
$\to B \cap C \subseteq B$
$\to B \cap C \subseteq C$
$\to A \subseteq A \cup B \wedge A \subseteq A \cup C$
$\to A \subseteq A \cup B$
$\to B \subseteq A \cup B$

手順 4 の結果、すなわち、手順 3 の結果から証明を分類した結果について述べる。方法 1 の証明は、(右 $\subseteq$ 左) の証明と (左 $\subseteq$ 右) の証明を独立に分類する。性質 3 の分類方法は、3.3 節と同じである。性質 4 については、性質 3 と同様の分類の仕方に加えて、分岐後の枝の部分のみが違う証明図も同じ分類に属すとした。

性質 3 について述べる。性質 3 の分類は、方法 1(左 $\subseteq$ 右) が 2 種類、(右 $\subseteq$ 左) が 3 種類、方法 2 が 1 種類であった。

次の「$\mathcal{P}$ または $\mathcal{Q}$」の省略なしの証明図に対応する証明を、分類 3.1,3.1$'$ とおく。文献は $\mathcal{P}$ の形が [3,10,16]、$\mathcal{Q}$ の形が [10] である。

$\mathcal{P}$

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overline{\to x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)}\,(dis1*)}{\to x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C}\,(\cap Def*)}{\to x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)}\,(\cup Def*)}{\to x \in A \wedge x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)}\,(\cup Def*)}{\to x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)}\,(\cap Def*)}{\to \forall x (x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C))}\,(\to \forall)}{\to A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}\,(= set)
$$

$\mathcal{Q}$ ($\vdots$ の部分は、$\mathcal{P}$ と同じである)

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overline{\to x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)}\,(dis1*)}{\to x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C}\,(\cap Def*)}{\to x \in A \wedge x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C}\,(\cup Def*)}{\vdots}
$$

なお、文献 [3],[10],[16] の証明の作り方を変えると、省略なしの証明図が $\mathcal{Q}$ になるようにできる。

次の「$\mathcal{P}$ または $\mathcal{Q}$」の省略なしの証明図に対応する証明を、分類 3.2 とおく。証明の向きは左 $\subseteq$ 右である。文献は $\mathcal{P}$ の形が [1,2]、$\mathcal{Q}$ の形が [12] である。

$\mathcal{P}$

$$
\begin{array}{cl}
x \in A, x \in B \vee x \in C \to x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) & \\ \hline
x \in A, x \in B \vee x \in C \to (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) & (dis1) \\ \hline
x \in A, x \in B \vee x \in C \to x \in A \cap B \vee x \in A \cap C & (\cap Def*) \\ \hline
x \in A, x \in B \vee x \in C \to x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) & (\cup Def) \\ \hline
x \in A, x \in B \cup C \to x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) & (\cup Def) \\ \hline
x \in A \cap (B \cup C) \to x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) & (\cap Def) \\ \hline
\to x \in A \cap (B \cup C) \supset x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) & (\to \supset) \\ \hline
\to \forall x (x \in A \cap (B \cup C) \supset x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)) & (\to \forall) \\ \hline
\to A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C) & (\subseteq Def)
\end{array}
$$

$\mathcal{Q}$ ($\vdots$ の部分は、$\mathcal{P}$ と同じである)

$$
\begin{array}{cl}
x \in A, x \in B \vee x \in C \to x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) & \\ \hline
x \in A, x \in B \vee x \in C \to (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) & (dis1) \\ \hline
x \in A, x \in B \cup C \to (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) & (\cup Def) \\ \hline
x \in A, x \in B \cup C \to x \in A \cap B \vee x \in A \cap C & (\cap Def*) \\ \hline
\vdots &
\end{array}
$$

なお、文献 [1],[2] の実際の証明図の作り方を変えると、省略なしの証明図が $\mathcal{Q}$ になるようにできる。

次の「$\mathcal{P}$ または $\mathcal{Q}$ または $\mathcal{R}$」の省略なしの証明図に対応する証明を、分類 3.3 とおく。証明の向きは左 $\subseteq$ 右である。文献は $\mathcal{P}$ の形が [4]、$\mathcal{Q}$ の形が [13]、$\mathcal{R}$ の形が [9,14] である。

$\mathcal{P}$

$$
\dfrac{
\begin{array}{cl}
x \in A, x \in C \to x \in A \wedge x \in C & \\ \hline
x \in A, x \in C \to x \in A \cap C & (\cap Def) \\ \hline
x \in A, x \in C \to x \in A \cap C \vee x \in B \cap C & (\to \vee) \\ \hline
x \in A, x \in C \to x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) & (\cup Def)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cl}
x \in B, x \in C \to x \in B \wedge x \in C & \\ \hline
x \in B, x \in C \to x \in B \cap C & (\cap Def) \\ \hline
x \in B, x \in C \to x \in A \cap C \vee x \in B \cap C & (\to \vee) \\ \hline
x \in B, x \in C \to x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) & (\cup Def)
\end{array}
}{
x \in A \vee x \in B, x \in C \to x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)
}\ (\vee \to)
$$

$$
\begin{array}{cl}
x \in A \vee x \in B, x \in C \to x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) & \\ \hline
x \in A \cup B, x \in C \to x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) & (\cup Def) \\ \hline
x \in (A \cup B) \cap C \to x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) & (\cap Def) \\ \hline
\to x \in (A \cup B) \cap C \supset x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) & (\to \supset) \\ \hline
\to \forall x (x \in (A \cup B) \cap C \supset x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)) & (\to \forall) \\ \hline
\to (A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C) & (\subseteq Def)
\end{array}
$$

$\mathcal{Q}$ ($\vdots$ の部分は、$\mathcal{P}$ と同様である)

$$
\dfrac{
\dfrac{x \in A, x \in B \to x \in A \wedge x \in B}{x \in A, x \in B \to (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)}\ (\to \vee)
\qquad \text{左と同様}
}{
\dfrac{x \in A, x \in B \vee x \in C \to (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)}{\dfrac{x \in A, x \in B \vee x \in C \to x \in A \cap B \vee x \in A \cap C}{\vdots}}\ (\cap Def*)
}\ (\vee \to)
$$

$\mathcal{R}$ ($\vdots$ の部分は、$\mathcal{P}$ と同様である)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x\in A, x\in B \to x\in A\wedge x\in B}{x\in A, x\in B \to x\in A\cap B}\,(\cap Def)}{x\in A, x\in B \to x\in A\cap B\vee x\in A\cap C}\,(\to\vee) \qquad \dfrac{\dfrac{x\in A, x\in C \to x\in A\wedge x\in C}{x\in A, x\in C \to x\in A\cap C}\,(\cap Def)}{x\in A, x\in C \to x\in A\cap B\vee x\in A\cap C}\,(\to\vee)}{\underline{x\in A, x\in B\vee x\in C \to x\in A\cap B\vee x\in A\cap C}}\,(\vee\to)$$

$$\vdots$$

なお、文献 [9],[14] の省略なしの証明図の作り方を変えると、その省略なしの証明図が $\mathcal{P}$ になるようにできる。また、文献 [13] の省略なしの証明図の作り方を変えると、その省略なしの証明図が $\mathcal{R}$ になるようにできる。

次の「$\mathcal{P}$ または $\mathcal{Q}$」の省略なしの証明図に対応する証明を、分類 $3.2'$ とおく。証明の向きは右 $\subseteq$ 左である。文献は $\mathcal{P}$ の形が [1,13]、$\mathcal{Q}$ の形が [2] である。

$\mathcal{P}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x\in A, x\in B\vee x\in C \to x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)}{(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)\to x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)}\,(dis1)}{(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)\to x\in A\wedge x\in B\cup C}\,(\cup Def*)}{(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)\to x\in A\cap(B\cup C)}\,(\cap Def)}{x\in A\cap B\vee x\in A\cap C\to x\in A\cap(B\cup C)}\,(\cap Def*)}{x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\to x\in A\cap(B\cup C)}\,(\cup Def)}{\to x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\supset x\in A\cap(B\cup C)}\,(\to\supset)}{\to\forall x(x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\supset x\in A\cap(B\cup C))}\,(\to\forall)}{\to(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)}\,(\subseteq Def)$$

$\mathcal{Q}$ ($\vdots$ の部分は、$\mathcal{P}$ と同じである)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x\in A, x\in B\vee x\in C \to x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)}{(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)\to x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)}\,(dis1)}{x\in A\cap B\vee x\in A\cap C\to x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)}\,(\cap Def*)}{\underline{x\in A\cap B\vee x\in A\cap C\to x\in A\wedge x\in B\cup C}}\,(\cup Def*)$$

$$\vdots$$

文献 [1],[13] の証明の作り方を変えると、省略なしの証明図が $\mathcal{Q}$ になるようにできる。その意味で、これらの 2 つは同じ分類にできると考えた。

次の省略なしの証明図に対応する証明を、分類 $3.3'$ とおく。証明の向きは右 $\subseteq$ 左であり、文献は [4] である。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(\cup Def)}{x\in A\to x\in A\cup B}\quad x\in C\to x\in C}{x\in A, x\in C\to x\in A\cup B\wedge x\in C}\,(\to\wedge)}{x\in A, x\in C\to x\in(A\cup B)\cap C}\,(\cap Def)}{x\in A\cap C\to x\in(A\cup B)\cap C}\,(\cap Def)\qquad\dfrac{\text{左と同様}}{x\in B\cap C\to x\in(A\cup B)\cap C}}{x\in A\cap C\vee x\in B\cap C\to x\in(A\cup B)\cap C}\,(\vee\to)}{x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)\to x\in(A\cup B)\cap C}\,(\cup Def)}{\to x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)\supset x\in(A\cup B)\cap C}\,(\to\supset)}{\dfrac{\to\forall x(x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)\supset x\in(A\cup B)\cap C)}{\to(A\cap C)\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap C}\,(\subseteq Def)}\,(\to\forall)$$

次の省略なしの証明図に対応する証明を、分類 3.4′ とおく。証明の向きは右 ⊆ 左であり、文献は [14] である。

$$\cfrac{\cfrac{\to A \subseteq A \cup B}{\to A \cap C \subseteq (A \cup B) \cap C}\ (Inf1) \qquad \cfrac{\to B \subseteq A \cup B}{\to B \cap C \subseteq (A \cup B) \cap C}\ (Inf1)}{\to (A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C}\ (Inf5)$$

結果として 6 つの分類は、表 8 に示す性質をもつ。

表 8: 性質 3 の分類

| 分類 | 証明の方法 | 文献 |
|---|---|---|
| 左 ⊆ 右 | | |
| 分類 3.1 | ⇔ を用いる | [3,6,10,16] |
| 分類 3.2 | $dis1$ を用いる | [1,2,12] |
| 分類 3.3 | ∨ → を用いる | [4,9,13,14] |
| 右 ⊆ 左 | | |
| 分類 3.1′ | ⇔ を用いる | [3,6,10,16] |
| 分類 3.2′ | $dis1$ を用いる | [1,2,13] |
| 分類 3.3′ | ∨ → を用いる | [4] |
| 分類 3.4′ | $Inf1$,$Inf5$ を用いる | [14] |

性質 4 について述べる。性質 4 の分類は、方法 1(左 ⊆ 右) が 3 種類、(右 ⊆ 左) が 4 種類、方法 2 が 1 種類であった。

次の省略なしの証明図に対応する証明を、分類 4.1,4.1′ とおく。文献は、[6,10] である。

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{(dis2*)}{\to x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)}}{\to x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C}\ (\cup Def*)}{\to x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)}\ (\cap Def*)}{\to x \in A \vee x \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)}\ (\cap Def*)}{\to x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)}\ (\cup Def*)}{\to \forall x (x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)}\ (\to \forall)}{\to A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}\ (= set)$$

次の「$\mathcal{P}$ または $\mathcal{Q}$」の省略なしの証明図に対応する証明を、分類 4.2 とおく。証明の向きは左 ⊆ 右である。文献は $\mathcal{P}$($\mathcal{P}_1$ は左の形) の形が [1,2,4,5,15]、$\mathcal{P}$($\mathcal{P}_1$ は右の形) の形が [11]、$\mathcal{Q}$ の形が [19] である。

$\mathcal{P}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{P}_1}{x\in A\to x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)}\,(\cap Def)\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x\in B\to x\in A\lor x\in B\quad x\in C\to x\in A\lor x\in C}{x\in B,x\in C\to(x\in A\lor x\in B)\land(x\in A\lor x\in C)}\,(\to\land)}{x\in B,x\in C\to x\in A\cup B\land x\in A\cup C}\,(\cup Def)}{x\in B\land x\in C\to x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)}\,(\cap Def)}{x\in B\cap C\to x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)}\,(\cap Def)}{x\in A\lor x\in B\cap C\to x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)}\,(\lor\to)}{x\in A\cup(B\cap C)\to x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)}\,(\cup Def)}{\to x\in A\cup(B\cap C)\supset x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)}\,(\to\supset)}{\to\forall x(x\in A\cup(B\cap C)\supset x\in(A\cup B)\cap(A\cup C))}\,(\to\forall)}{\to A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)}\,(\subseteq Def)$$

ただし、$\mathcal{P}_1$ は以下のいずれかの形である。

$$\dfrac{\dfrac{x\in A\to x\in A\lor x\in B\quad x\in A\to x\in A\lor x\in C}{x\in A\to(x\in A\lor x\in B)\land(x\in A\lor x\in C)}\,(\to\land)}{x\in A\to x\in A\cup B\land x\in A\cup C}\,(\cup Def*)\qquad\qquad \dfrac{\to A\subseteq A\cup B\land A\subseteq A\cup C\quad \text{式}1}{x\in A\to x\in A\cup B\land x\in A\cup C}\,(cut)$$

$\mathcal{Q}$ ($\vdots$ の部分は、$\mathcal{P}$ と同じであり、$\mathcal{P}_1$ は上の右の形である)

$$\dfrac{\mathcal{P}_1\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(\cap Def)}{x\in B\cap C\to x\in B}\quad \to B\subseteq A\cup B}{x\in B\cap C\to x\in A\cup B}\,(Inf6)\quad \text{左と同様}}{x\in B\cap C\to x\in A\cup B\land x\in A\cup C}\,(\to\land)}{x\in B\cap C\to x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)}\,(\cap Def)}{\vdots}\,(\lor\to)$$

次の省略なしの証明図に対応する証明を、分類 4.3 とおく。証明の向きは左 $\subseteq$ 右であり、文献は [8] である。

$$\dfrac{\dfrac{\to B\cap C\subseteq B}{\to A\cup(B\cap C)\subseteq A\cup B}\,(Inf2)\qquad \dfrac{\to B\cap C\subseteq C}{\to A\cup(B\cap C)\subseteq A\cup C}\,(Inf2)}{\to A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)}\,(Inf4)$$

次の省略なしの証明図に対応する証明を、分類 4.4 とおく。証明の向きは左 $\subseteq$ 右であり、文献は [18] である。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x\in A\lor(x\in B\land x\in C)\to x\in A\lor(x\in B\land x\in C)}{x\in A\lor(x\in B\land x\in C)\to x\in A\lor x\in B\land x\in A\lor x\in C}\,(dis2)}{x\in A\lor(x\in B\land x\in C)\to x\in A\cup B\land x\in A\cup C}\,(\cup Def*)}{x\in A\lor(x\in B\land x\in C)\to x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)}\,(\cap Def)}{x\in A\lor x\in B\cap C\to x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)}\,(\cap Def*)}{x\in A\cup(B\cap C)\to x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)}\,(\cup Def)}{\to x\in A\cup(B\cap C)\supset x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)}\,(\to\supset)}{\to\forall x(x\in A\cup(B\cap C)\supset x\in(A\cup B)\cap(A\cup C))}\,(\to\forall)}{\to A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)}\,(\subseteq Def)$$

次の「$\mathcal{P}$ または $\mathcal{Q}$」の省略なしの証明図に対応する証明を、分類 $4.2'$ とおく。証明の向きは右 $\subseteq$ 左である。文献は $\mathcal{P}$($\mathcal{P}_1$ は上の形) の形が [1]、$\mathcal{P}$($\mathcal{P}_1$ は下の形) の形が [4,5]、$\mathcal{Q}$ の形が [19] である。$\mathcal{P}$($\mathcal{P}_1$ は左の形) の証明図の「$x \in A$ のとき」の始式が異なっている証明図が $\mathcal{Q}$ である。$\mathcal{P}$($\mathcal{P}_1$ は左の形) の証明図の「$x \in B \cap C$ のとき」の証明について、さらに場合分けをしている証明図が $\mathcal{Q}$ である。

$\mathcal{P}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \in A \to x \in A \vee x \in B \cap C}{x \in A \to x \in A \cup (B \cap C)}\,(\cup Def) \qquad \mathcal{P}_1}{x \in A \cup B, x \in A \cup C \to x \in A \cup (B \cap C)}\,(EM)}{x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \to x \in A \cup (B \cap C)}\,(\cap Def)}{\to x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \supset x \in A \cup (B \cap C)}\,(\to \supset)}{\to \forall x(x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \supset x \in A \cup (B \cap C))}\,(\to \forall)}{\to (A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)}\,(\subseteq Def)$$

ただし、$\mathcal{P}_1$ は以下のいずれかの形である。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \in B, x \in C \to x \in B \wedge x \in C}{x \in B, x \in C \to x \in A \vee x \in B \wedge x \in C}\,(\to \vee)}{x \in B, x \in C \to x \in A \vee x \in B \cap C}\,(\cap Def*)}{x \in B, x \in C \to x \in A \cup (B \cap C)}\,(\cup Def)}{x \notin A, x \in A \vee x \in B, x \in A \vee x \in C \to x \in A \cup (B \cap C)}\,(\text{選言三段論法})}{x \notin A, x \in A \cup B, x \in A \cup C \to x \in A \cup (B \cap C)}\,(\cup Def)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \in B, x \in C \to x \in B \wedge x \in C}{x \in B, x \in C \to x \in B \cap C}\,(\cap Def)}{x \notin A, x \in A \vee x \in B, x \in A \vee x \in C \to x \in B \cap C}\,(\text{選言三段論法})}{x \notin A, x \in A \cup B, x \in A \cup C \to x \in B \cap C}\,(\cup Def)}{x \notin A, x \in A \cup B, x \in A \cup C \to x \in A \vee x \in B \cap C}\,(\to \vee)}{x \notin A, x \in A \cup B, x \in A \cup C \to x \in A \cup (B \cap C)}\,(\cup Def)$$

$\mathcal{Q}$ ($\vdots$ の部分は、$\mathcal{P}$ と同じである)

$$\dfrac{\dfrac{\to A \subseteq A \cup (B \cap C) \quad \text{式}2}{x \in A \to x \in A \cup (B \cap C)}\,(cut) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \in B, x \in C \to x \in B \wedge x \in C}{x \notin A, x \in A \vee x \in B, x \in A \vee x \in C \to x \in B \wedge x \in C}\,(\text{選言三段論法})}{x \notin A, x \in A \cup B, x \in A \cup C \to x \in B \wedge x \in C}\,(\cup Def)}{x \notin A, x \in A \cup B, x \in A \cup C \to x \in B \cap C}\,(\cap Def)}{x \notin A, x \in A \cup B, x \in A \cup C \to x \in A \vee x \in B \cap C}\,(\to \vee)}{x \notin A, x \in A \cup B, x \in A \cup C \to x \in A \cup (B \cap C)}\,(\cup Def)}{\vdots}\,(EM)$$

次の「$\mathcal{P}$ または $\mathcal{Q}$」省略なしの証明図に対応する証明を、分類 $4.3'$ とおく。証明の向きは右 $\subseteq$ 左である。文献は $\mathcal{P}$ の形が [2]、$\mathcal{Q}$ の形が [15] である。

$\mathcal{P}$

$$\begin{array}{c}
x \in B, x \in C \to x \in B \land x \in C \\ \hline
x \notin A, x \in A \lor x \in B, x \in A \lor x \in C \to x \in B \land x \in C \quad (\text{選言三段論法}) \\ \hline
x \notin A, x \in A \lor x \in B, x \in A \lor x \in C \to x \in B \cap C \quad (\cap Def) \\ \hline
x \in A \lor x \in B, x \in A \lor x \in C \to x \in A \lor x \in B \cap C \quad (RAA2) \\ \hline
x \in A \lor x \in B, x \in A \lor x \in C \to x \in A \cup (B \cap C) \quad (\cup Def) \\ \hline
x \in A \cup B, x \in A \cup C \to x \in A \cup (B \cap C) \quad (\cup Def) \\ \hline
x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \to x \in A \cup (B \cap C) \quad (\cap Def) \\ \hline
\to x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \supset x \in A \cup (B \cap C) \quad (\to \supset) \\ \hline
\to \forall x (x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \supset x \in A \cup (B \cap C)) \quad (\to \forall) \\ \hline
\to (A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C) \quad (\subseteq Def)
\end{array}$$

$\mathcal{Q}$ ($\vdots$ の部分は、$\mathcal{P}$ と同じである)

$$\begin{array}{c}
x \in B, x \in C \to x \in B \land x \in C \\ \hline
x \notin A, x \in A \lor x \in B, x \in A \lor x \in C \to x \in B \land x \in C \quad (\text{選言三段論法}) \\ \hline
x \notin A, x \in A \cup B, x \in A \cup C \to x \in B \land x \in C \quad (\cup Def) \\ \hline
x \notin A, x \in A \cup B, x \in A \cup C \to x \in B \cap C \quad (\cap Def) \\ \hline
x \in A \cup B, x \in A \cup C \to x \in A \lor x \in B \cap C \quad (RAA2) \\ \hline
\vdots
\end{array}$$

次の省略なしの証明図に対応する証明を、分類 $4.4'$ とおく。証明の向きは右 $\subseteq$ 左であり、文献は [8] である。

$$\begin{array}{c}
\dfrac{x \in A \lor x \in B \to x \in A \lor x \in B}{x \in A \lor x \in B \to x \in A \lor x \notin A \lor x \in B}\,(\to \land) \qquad x \in A \lor x \in C \to x \in A \lor x \in C \\ \hline
x \in A \lor x \in B, x \in A \lor x \in C \to (x \in A \lor x \notin A \lor x \in B) \land (x \in A \lor x \in C) \quad (\to \land) \\ \hline
x \in A \lor x \in B, x \in A \lor x \in C \to x \in A \lor (x \notin A \land x \in B \land x \in C) \quad (dis2) \\ \hline
x \in A \cup B, x \in A \cup C \to x \in A \lor (x \notin A \land x \in B \land x \in C) \quad (\cup Def) \\ \hline
x \in A \cup B, x \in A \cup C \to x \in A \lor (x \in B \land x \in C) \quad (Inf3) \\ \hline
x \in A \cup B, x \in A \cup C \to x \in A \lor x \in B \cap C \quad (\cap Def*) \\ \hline
x \in A \cup B, x \in A \cup C \to x \in A \cup (B \cap C) \quad (\cup Def) \\ \hline
x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \to x \in A \cup (B \cap C) \quad (\cap Def) \\ \hline
\to x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \supset x \in A \cup (B \cap C) \quad (\to \supset) \\ \hline
\to \forall x (x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \supset x \in A \cup (B \cap C)) \quad (\to \forall) \\ \hline
\to (A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C) \quad (\subseteq Def)
\end{array}$$

次の省略なしの証明図に対応する証明を、分類 $4.5'$ とおく。証明の向きは右 $\subseteq$ 左であり、文献は [11,18] である。

$$\begin{array}{c}
(dis2) \\
(x \in A \lor x \in B) \land (x \in A \lor x \in C) \to x \in A \lor (x \in B \land x \in C) \\ \hline
x \in A \cup B \land x \in A \cup C \to x \in A \lor (x \in B \land x \in C) \quad (\cup Def*) \\ \hline
x \in A \cup B \land x \in A \cup C \to x \in A \lor x \in B \cap C \quad (\cap Def*) \\ \hline
x \in A \cup B \land x \in A \cup C \to x \in A \cup (B \cap C) \quad (\cup Def) \\ \hline
x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \to x \in A \cup (B \cap C) \quad (\cap Def) \\ \hline
\to x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \supset x \in A \cup (B \cap C) \quad (\to \supset) \\ \hline
\to \forall x (x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \supset x \in A \cup (B \cap C)) \quad (\to \forall) \\ \hline
\to (A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C) \quad (\subseteq Def)
\end{array}$$

結果として 8 つの分類は、表 9 に示す性質をもつ。

表 9: 性質 4 の分類

| 分類 | 証明方法 | 文献 |
|---|---|---|
| 左 $\subseteq$ 右 | | |
| 分類 4.1 | $\Leftrightarrow$ を用いる | [6,10] |
| 分類 4.2 | $\vee \rightarrow$ を用いる | [1,2,4,5,11,15,19] |
| 分類 4.3 | $Inf2$,$Inf4$ を用いる | [8] |
| 分類 4.4 | $dis2$ を用いる | [18] |
| 右 $\subseteq$ 左 | | |
| 分類 4.1′ | $\Leftrightarrow$ を用いる | [6,10] |
| 分類 4.2′ | $EM$, 選言三段論法を用いる | [1,4,5,19] |
| 分類 4.3′ | $RAA2$, 選言三段論法を用いる | [2,15] |
| 分類 4.4′ | $Inf3$,$dis2$ を用いる | [8] |
| 分類 4.5′ | $dis2$ を用いる | [11,18] |

## 6　分配律の証明の分析

この節では、分配律に対して手順 5〜6 を行った結果について述べる。

### 6.1　推論規則の組み合わせ

まず、手順 5 の結果について述べる。この手順における推論規則の組み合わせとは、「省略なしの証明図に現れる推論規則」の組み合わせで、もとになる実際の証明図に用いられているものである。

文献ごとのの推論規則の組み合わせを、性質 3 については表 10 に、性質 4 については表 11 にまとめた。さらに、複数の文献の証明で構成される各分類 (3.1,3.2,3.3,3.1′,3.2′,4.1,4.2,4.1′,4.2′,4.3′,4.5′) に対して、使われていた推論規則の組み合わせを表 12 にまとめた。ただし、分類 4.2 は、$\mathcal{P}(\mathcal{P}_1$ は左の形) の形のみを対象とし、分類 4.2′ は $\mathcal{P}(\mathcal{P}_1$ は下の形) のみを対象とする。これら表における「証明の向き」の意味は、4 節と同じである。

表 10: 性質 3 の推論規則の組み合わせ

| 文献 | 推論規則の組み合わせ | 証明の向き |
|---|---|---|
| [1] | $\subseteq Def, \rightarrow\forall, \rightarrow\supset$ | 両方 |
| | $\cup Def, \cap Def*$ | 左 ⊆ 右 |
| [2] | $\subseteq Def, \rightarrow\forall$ | 両方 |
| | $\cap Def*, dis1$ | 右 ⊆ 左 |
| [3],[10] | $= set, \rightarrow\forall$ | |
| [4] | $\subseteq Def, \rightarrow\forall\supset$ | 両方 |
| | $\rightarrow\vee, \cup Def$ | 左 ⊆ 右 |
| | $\cap Def, \rightarrow\wedge$ | 右 ⊆ 左 |
| [6] | $= set, \rightarrow\forall,$ $\cap Def*, \cup Def*$ | |
| [9] | $\subseteq Def, \rightarrow\forall\supset$ | 両方 |
| | $\vee\rightarrow, \cup Def, \rightarrow\vee$ | 左 ⊆ 右 |
| | $\rightarrow\wedge, \cap Def$ | 右 ⊆ 左 |
| [12][a] | $\subseteq Def, \rightarrow\forall\supset$ | 左 ⊆ 右 |
| | $\cup Def, dis1$ | 左 ⊆ 右 |
| | $\cap Def*, \cup Def$ | 左 ⊆ 右 |
| [13] | $\subseteq Def, \rightarrow\forall\supset$ | 両方 |
| | $\cap Def*, \vee\rightarrow, \rightarrow\vee$ | 左 ⊆ 右 |
| | $\cap Def, \cup Def*$ | 右 ⊆ 左 |
| [14] | $\subseteq Def, \rightarrow\forall\supset$ | 左 ⊆ 右 |
| | $\vee\rightarrow, \rightarrow\vee$ | 左 ⊆ 右 |
| [16] | $= set, \rightarrow\forall$ | |
| | $\cap Def*, \cup Def*$ | |

[a][12] では、右 ⊆ 左の証明は「左 ⊆ 右と同様である」としている。

表 11: 性質 4 の推論規則の組み合わせ

| 文献 | 推論規則の組み合わせ | 証明の向き |
|---|---|---|
| [1] | $\subseteq Def, \rightarrow\forall\supset$ | 両方 |
| | $\cup Def, \rightarrow\wedge$ | 左 ⊆ 右 |
| | $\cup Def,$ 選言三段論法 | 右 ⊆ 左 |
| | $\cup Def, \cap Def*$ | 右 ⊆ 左 |
| [2] | $\subseteq Def, \rightarrow\forall$ | 両方 |
| | $\cup Def, \rightarrow\wedge$ | 左 ⊆ 右 |
| | $\cup Def, RAA2$ | 右 ⊆ 左 |
| [4] | $\subseteq Def, \rightarrow\forall\supset$ | 両方 |
| | $\cap Def*, \vee\rightarrow$ | 左 ⊆ 右 |
| | $\cup Def, \rightarrow\wedge$ | 左 ⊆ 右 |
| | $\cap Def, EM$ | 右 ⊆ 左 |
| | $\cup Def, \rightarrow\vee$ | 右 ⊆ 左 |
| | $\cup Def,$ 選言三段論法 | 右 ⊆ 左 |
| [5] | $\subseteq Def, \rightarrow\forall\supset$ | 両方 |
| | $\cup Def, \rightarrow\wedge$ | 左 ⊆ 右 |
| | $\cup Def, \rightarrow\vee$ | 右 ⊆ 左 |
| | $\cup Def,$ 選言三段論法 | 右 ⊆ 左 |
| [6],[10] | $= set, \rightarrow\forall$ | |
| [8] | $\subseteq Def, \rightarrow\forall\supset$ | 右 ⊆ 左 |
| | $\cup Def, dis2, \rightarrow\wedge$ | 右 ⊆ 左 |
| [11] | $\subseteq Def, \rightarrow\forall\supset$ | 両方 |
| | $\cup Def*, \rightarrow\wedge$ | 左 ⊆ 右 |
| | $\cup Def*, dis2$ | 右 ⊆ 左 |
| [15] | $\subseteq Def, \rightarrow\forall\supset$ | 両方 |
| | $\cup Def, \rightarrow\wedge$ | 左 ⊆ 右 |
| | $\cup Def, RAA2$ | 右 ⊆ 左 |
| | $\cup Def,$ 選言三段論法 | 右 ⊆ 左 |
| [18] | $\subseteq Def, \rightarrow\forall\supset$ | 両方 |
| | $\cup Def, \cap Def*$ | 右 ⊆ 左 |
| | $\cup Def*, dis2$ | 両方 |
| [19] | $\subseteq Def, \rightarrow\forall\supset$ | 両方 |
| | $\cup Def, \rightarrow\vee$ | 右 ⊆ 左 |
| | $\cup Def,$ 選言三段論法 | 右 ⊆ 左 |

表 12: 分類ごとの推論規則の組み合わせ

| 分類 | 推論規則の組み合わせ | 文献の数 (使ったいた文献/全文献) |
|---|---|---|
| 3.1,3.1′ | $= set, \to \forall$ | 3/4 |
| | $= set, \to \forall, \cap Def*, \cup Def*$ | 1/4 |
| | $\cap Def*, \cup Def*$ | 1/4 |
| 3.2 | $\subseteq Def, \to \forall, \to\supset$ | 2/3 |
| | $\subseteq Def, \to \forall$ | 1/3 |
| | $\cup Def, \cap Def*$ | 2/3 |
| | $\cup Def, dis1$ | 1/3 |
| 3.3 | $\subseteq Def, \to \forall \supset$ | 4/4 |
| | $\to \vee, \cup Def$ | 1/4 |
| | $\vee \to, \cup Def, \to \vee$ | 1/4 |
| | $\cap Def*, \vee \to, \to \vee$ | 1/4 |
| | $\vee \to, \to \vee$ | 1/4 |
| 3.2′ | $\subseteq Def, \to \forall, \to\supset$ | 3/3 |
| | $\cap Def*, dis1$ | 1/3 |
| | $\cap Def, \cup Def*$ | 1/3 |
| 4.1,4.1′ | $= set, \to \forall$ | 2/2 |
| 4.2 | $\subseteq Def, \to \forall \supset$ | 5/5 |
| | $\cup Def, \to \wedge$ | 5/5 |
| | $\cap Def*, \vee \to$ | 1/5 |
| 4.2′ | $\subseteq Def, \to \forall \supset$ | 2/2 |
| | $\cap Def, EM$ | 1/2 |
| | $\cup Def, \to \vee$ | 2/2 |
| | $\cup Def$, 選言三段論法 | 2/2 |
| 4.3′ | $\subseteq Def, \to \forall$ | 2/2 |
| | $\cup Def, RAA2$ | 2/2 |
| | $\cup Def$, 選言三段論法 | 1/2 |
| 4.5′ | $\subseteq Def, \to \forall \supset$ | 2/2 |
| | $\cup Def*, dis2$ | 2/2 |
| | $\cup Def, \cap Def*$ | 1/2 |

### 6.2　適切な証明図

次に、手順 6 の結果について述べる。対象とする分類および作成手順は 4.2 節と同様である。ただし、分類 4.2 は、$\mathcal{P}(\mathcal{P}_1$ は左の形) の形のみを対象とし、分類 4.2′ は $\mathcal{P}(\mathcal{P}_1$ は下の形) のみを対象とする。

分類 3.1,3.1′

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{(dis1*)}{\to x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)}\ (\Leftrightarrow \cap Def*)}{\to x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C}\ (\Leftrightarrow \cup Def*)}{\to x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)}\ (\cup Def* \Leftrightarrow)}{\to x \in A \wedge x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)}\ (\cap Def* \Leftrightarrow)}{\to x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)}\ (= set, \to \forall)}{\to A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$$

分類 3.2

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{(\to dis1)}{x \in A, x \in B \vee x \in C \to (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)}\ (\to \cup Def, \to \cap Def*)}{x \in A, x \in B \vee x \in C \to x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)}\ (\cup Def \to)}{x \in A, x \in B \cup C \to x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)}\ (\cap Def \to)}{x \in A \cap (B \cup C) \to x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)}\ (\subseteq Def, \to \forall, \to \supset)}{\to A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)}$$

分類 3.3

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{(\to \cap Def)}{x \in A, x \in B \to x \in A \cap B} \quad \cfrac{(\to \cap Def)}{x \in A, x \in C \to x \in A \cap C}}{x \in A, x \in B \vee x \in C \to x \in A \cap B \vee x \in A \cap C}\ (\vee \to, \to \vee)}{x \in A, x \in B \vee x \in C \to x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)}\ (\to \cup Def)}{x \in A, x \in B \cup C \to x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)}\ (\cup Def \to)}{x \in A \cap (B \cup C) \to x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)}\ (\cap Def \to)}{\to A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)}\ (\subseteq Def, \to \forall, \to \supset)$$

分類 3.2′

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{(dis1 \to)}{(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \to x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)}\ (\to \cup Def*)}{(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \to x \in A \wedge x \in B \cup C}\ (\to \cap Def)}{(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \to x \in A \cap (B \cup C)}\ (\cap Def* \to)}{x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \to x \in A \cap (B \cup C)}\ (\cup Def \to)}{x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \to x \in A \cap (B \cup C)}\ (\subseteq Def, \to \forall, \to \supset)}{\to (A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)}$$

分類 4.1,4.1′

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(dis2*)}{\to x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)}}{\to x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)\Leftrightarrow x\in A\cup B\wedge x\in A\cup C}\ (\Leftrightarrow\cup Def*)}{\to x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)}\ (\Leftrightarrow\cap Def*)}{\to x\in A\vee x\in(B\cap C)\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)}\ (\cap Def*\Leftrightarrow)}{\to x\in A\cup(B\cap C)\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)}\ (\cup Def*\Leftrightarrow)}{\to A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)}\ (=set,\to\forall)$$

分類 4.2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{右と同様}\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{x\in B\to x\in A\vee x\in B\quad x\in C\to x\in A\vee x\in C}{x\in B,x\in C\to x\in A\cup B\wedge x\in A\cup C}\ (*6)}{x\in B\wedge x\in C\to x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)}\ (*5)}{x\in B\cap C\to x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)}\ (*4)}{x\in A\vee x\in B\cap C\to x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)}\ (*3)}{x\in A\cup(B\cap C)\to x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)}\ (*2)}{\to A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)}\ (*1)$$

*1 は $\subseteq Def,\to\forall,\to\supset$、*2 は $\cup Def\ \to$、*3 は $\vee\ \to$、*4 は $\cap Def\ \to$、*5 は $\to\ \cap Def$、*6 は $\to\cup Def*,\to\wedge$ を示す。

分類 4.2′

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x\in C\to x\in A\cap B\vee x\in C}{x\in C\to x\in(A\cap B)\cup C}\ (*3)\qquad\dfrac{\dfrac{\overset{(\to\cap Def)}{x\in A,x\in B\to x\in A\cap B}}{x\notin C,x\in A\cup C,x\in B\cup C\to x\in A\cap B}\ (*5)}{x\notin C,x\in A\cup C,x\in B\cup C\to x\in(A\cap B)\cup C}\ (*4)}{x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)\to x\in(A\cap B)\cup C}\ (*2)}{\to(A\cup C)\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup C}\ (*1)$$

ただし、*1 は $\subseteq Def,\to\forall,\to\supset$、*2 は $\cap Def*\to,EM$、*3 は $\to\cup Def$、*4 は $\to\cup Def,\to\vee$、*5 は $\cup Def\ \to$, 選言三段論法 を示す。

分類 4.3′

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(\text{選言三段論法})}{x\notin A,x\in A\vee x\in B,x\in A\vee x\in C\to x\in B\wedge x\in C}}{x\notin A,x\in A\vee x\in B,x\in A\vee x\in C\to x\in B\cap C}\ (\to\cap Def)}{x\in A\vee x\in B,x\in A\vee x\in C\to x\in A\cup(B\cap C)}\ (\to\cup Def,RAA2)}{x\in A\cup B,x\in A\cup C\to x\in A\cup(B\cap C)}\ (\cup Def\ \to)}{x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)\to x\in A\cup(B\cap C)}\ (\cap Def\ \to)}{\to(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)}\ (\subseteq Def,\to\forall,\to\supset)$$

分類 4.5′

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(\cup Def*\to,dis2\to)}{x\in A\cup B\wedge x\in A\cup C\to x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)}}{x\in A\cup B\wedge x\in A\cup C\to x\in A\cup(B\cap C)}\ (\to\cup Def,\to\cap Def*)}{x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)\to x\in A\cup(B\cap C)}\ (\cap Def\ \to)}{\to(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)}\ (\subseteq Def,\to\forall,\to\supset)$$

## 7 証明の向きの比較

この節では、方法 1 の 2 つの向き（すなわち、右 $\subseteq$ 左と左 $\subseteq$ 右）の証明が、同じ形で表現されているかどうか をまとめておく。ただし、性質 2 は文献数が少ないので、対象としていない。

性質 1 では、5 冊 ([2,5,11,12,19]) のうち 4 冊は、それぞれ、同じ「推論規則の組み合わせ」を用いていて、その順序は「$\subseteq Def, \rightarrow \forall, \rightarrow \supset$」以外全く逆であった。残り 1 冊 ([19]) も「推論規則の組み合せ」が若干異なるが、それに影響する部分を除いて順序は逆であった。

一方、性質 3 では 5 冊 ([1,2,4,13,14]) のうち 3 冊 ([1,2,4])、性質 4 では 9 冊 ([1,2,4,5,8,11,15,18,19]) のうち 1 冊 ([19]) が、それぞれ、同じ形で表現されていた。これらは、表 8, 表 9 からも読み取れる。なお、性質 3 では、[9] と [12] を対象から外している。理由は、5 節の冒頭と表 10 で述べたとおりである。

## 参考文献


[1] 一樂重雄：『集合と位相：そのまま使える答えの書き方』．講談社サイエンティフィク編，東京，2001.

[2] 内田伏一：『集合と位相』．裳華房，東京，1986.

[3] 梅垣壽春 他：『集合・位相・距離』．共立出版, 東京，1987.

[4] 尾関和彦：『情報技術のための離散系数学入門』．共立出版，東京，2004.

[5] ゲアリー・チャートランド 他：『証明の楽しみ：数学を使いこなす練習をしよう』．ピアソン・エデュケーション，東京，2004.

[6] 小林貞一：『集合と位相』．培風館，東京，1977.

[7] 佐々木克巳：「シークエント体系の証明図から実証明を作る方法」,『アカデミア 情報理工編 第 11 巻』．2011，pp. 35–54.

[8] 志賀浩二：『集合への 30 講』．朝倉書店, 東京，1988.

[9] 庄田敏宏：『集合・位相に親しむ』．現代数学社，京都，2010.

[10] 鈴木晋一：『集合と位相への入門：ユークリッド空間の位相』．サイエンス社，東京，2003.

[11] 赤摂也：『集合論入門』．培風館，東京，1959.

[12] 瀬山士郎：『なっとくする集合・位相』．講談社，東京，2001.

[13] 竹之内脩, 船越俊介：『入門集合と位相演習』．実教出版, 東京，1980.

[14] 日本大学文理学部数学科：『数学基礎セミナー』．日本評論社，東京，2003.

[15] 荷見守助：『集合と位相』．内田老鶴圃，東京，1995.

[16] 細井勉：『集合・論理』．共立出版, 東京，1982.

[17] 松坂和夫：『集合・位相入門』. 岩波書店, 東京，1968.

[18] 森田茂之：『集合と位相空間』. 朝倉書店，東京，2002.

[19] 和田秀三：『教養数学概論』. サイエンス，東京，1982.