

2重非心 F 分布のパーセント点近似法を用いた タグチメソッドのSN比の信頼区間

前廣 芳孝* 高橋 知也* 松田 眞一†

E-Mail: matsu@nanzan-u.ac.jp

本論文では2重非心 F 分布のパーセント点近似法として自由度の小さい場合でも利用に耐えうるものを提案し、それに基づいてタグチメソッドでのSN比の信頼区間を構築し、再現性の問題に関する考察を行う。2重非心 F 分布のパーセント点近似法としてはMCL-M法がよい成績を残し、さらなる改良も模索する。SN比の信頼区間の構成ではMCL-M法に基づき、データから自動的にSN比の信頼区間が構成できるようになった。再現性の目安と言われている $\pm 3\text{db}$ より信頼区間幅の方がほとんど広がるが、信頼区間は上下非対称なため特に下限でその基準が甘くなる場合があることがわかった。

1 はじめに

近年製造業を中心に関心が深い統計的方法の1つにタグチメソッドがあげられる。タグチメソッドはいくつかの方法論に分けられるが、その中で大きな重みを占める概念がSN比である。タグチメソッド自体ではSN比に確率的視点を持ち込まずに処理しているが、永田 [7] などではSN比は2重非心 F 分布で説明可能であるという議論がなされている。

堀井・松田 [2] は永田 [7] に基づき、実際にSN比の分布が導出可能となるように関係式を拡張して2重非心 F 分布のパーセント点近似法の研究を行った。そこでの結論は自由度が小さい場合に既存の近似法は利用し難く、少し時間はかかるがモンテカルロ法によるパーセント点で十分な精度の計算が可能であるというものであった。

本論文では、2重非心 F 分布のパーセント点近似法を他に探し、自由度の小さい場合にも適用可能なものはないか探ることとその下でSN比の信頼区間を実際に構成した場合にどのような値になるかを事例研究し、再現性として一般に用いられている $\pm 3\text{db}$ が妥当であるかを検証することである。

2 タグチメソッド

タグチメソッドとは、田口玄一氏が考案し、実験計画法から派生し発展してきた品質技術の総称である。日本国内では学問領域として品質工学と呼ばれる。実験計画法は、少ない実験回数で目的の変数に影響のある因子を評価するための統計的方法であるが、タグチメソッドは実験計画法と同様に直交表を用いるものの考え方は異なり、品質問題の未然防止に主眼が置かれている。

タグチメソッドでは、製造工程をエンジニアードシステムという入力と出力がある関係で表す。同じ入力であるはずなのに出力がばらつく原因を制御因子と誤差因子という2つの要因から考える。制御因子は製造工程で設定が可能な変数を表し、誤差因子は観測が可能であるものの一定にはできない変数を表す。たとえば、制御因子は原材料のメーカーや

*南山大学大学院数理情報研究科数理情報専攻

†南山大学情報理工学部情報システム数理学科

加工温度などがあり、誤差因子は気圧やライン上の製品の位置などがある。そういった下での実験は制御因子を割りつけた内側直交表と誤差因子を割りつけた外側直交表を組み合わせ直積実験を行うことになる。一般的には内側直交表に L18 直交表、外側は多元配置を用いることが多い。そのようにして得られたデータから SN 比と感度と呼ばれる値を計算し、制御因子の最適化を行う。これにより誤差因子の影響に強い設計が可能となる。このような考え方をロバスト設計という。最後に、最適と思われる制御因子の水準がうまく機能しているか再現性の確認実験を行う。(立林 [9, 10] 参照)

3 SN 比

3.1 SN 比とは

入力と出力の関係における誤差因子によるノイズに対する反応の強さを表す尺度であり、この値が大きいほどノイズに強い。すなわち、値が大きいほどノイズと比較して反応のパラッキが小さくなる。

SN 比は、エンジニアードシステムにおける要求性能の観点から静特性と動特性に分けられる。さらに静特性では目標値が大きければ大きいほどよい望大特性、目標値が小さければ小さいほどよい望小特性、目標とする値が存在する望目特性の 3 種類の SN 比が存在する。本論文では望目特性のみを扱う。

3.2 SN 比の再現性

制御因子の最適水準における SN 比の再現性の確認は、一般的に SN 比の差が $\pm 3\text{db}$ の間に入るかどうかで判断している。 $\pm 3\text{db}$ とは、 $10 \log_{10}$ をとっているので、元のノイズ比で約 $1/2 \sim 2$ 倍の間に入っていることを意味している。(立林 [9] 参照)

3.3 静特性の SN 比

3.3.1 静特性とは

静特性とは、入力一定であり、出力も一定であることが求められるエンジニアードシステムのことを指す。

【例】乾電池、蛍光灯等

3.3.2 静特性の SN 比の求め方と統計的分布

a 水準の制御因子 A 、 r 水準の誤差因子 N のときの m 回繰り返し実験で得られた表 1 のようなデータを考える。

このとき標本 SN 比は、

$$\gamma_{A_i} = 10 \log_{10} \left(\frac{\bar{x}_{A_i}^2}{V_{A_i}} \right) \quad (1)$$

表 1: 静特性の実験データ

水準	繰り返し	$N_1, \dots, N_j, \dots, N_r$	平均	不偏分散	SN 比
A_1	1	$x_{111}, \dots, x_{1j1}, \dots, x_{1r1}$	\bar{x}_{A_1}	V_{A_1}	γ_{A_1}
	\vdots	\vdots			
	k	$x_{11k}, \dots, x_{1jk}, \dots, x_{1rk}$			
	\vdots	\vdots			
	m	$x_{11m}, \dots, x_{1jm}, \dots, x_{1rm}$			
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
A_i	1	$x_{i11}, \dots, x_{ij1}, \dots, x_{ir1}$	\bar{x}_{A_i}	V_{A_i}	γ_{A_i}
	\vdots	\vdots			
	k	$x_{i1k}, \dots, x_{ijk}, \dots, x_{irk}$			
	\vdots	\vdots			
	m	$x_{i1m}, \dots, x_{ijm}, \dots, x_{irm}$			
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
A_a	1	$x_{a11}, \dots, x_{aj1}, \dots, x_{ar1}$	\bar{x}_{A_a}	V_{A_a}	γ_{A_a}
	\vdots	\vdots			
	k	$x_{a1k}, \dots, x_{ajk}, \dots, x_{ark}$			
	\vdots	\vdots			
	m	$x_{a1m}, \dots, x_{ajm}, \dots, x_{arm}$			

となる。得られたデータ x_{ijk} は以下のようなモデルが成り立つと考える。

$$x_{ijk} = \mu'_i + n_{ij} + \epsilon_{ijk} = \mu + a_i + n_{ij} + \epsilon_{ijk} \quad (2)$$

ここで、誤差因子以外の誤差 ϵ_{ijk} は互いに独立に $E(\epsilon_{ijk}) = 0$ 、 $V(\epsilon_{ijk}) = \sigma_i^2$ を満たし、 $\sum_{i=1}^a a_i = 0$ 、 $\sum_{j=1}^r n_{ij} = 0$ が成り立つとする。

よって母 SN 比は、

$$10 \log_{10} \frac{(\mu + a_i)^2}{\sum_{j=1}^r \frac{mn_{ij}^2}{(rm-1)} + \sigma_i^2} \quad (3)$$

と表せる。次に、誤差 ϵ_{ijk} に正規性を仮定して確率分布を求めると

$$\frac{rm\bar{x}_{A_i}^2}{V_{A_i}} \sim F''(1, rm-1, \lambda_1, \lambda_2) \quad (4)$$

$$\lambda_1 = \frac{rm(\mu + a_i)^2}{\sigma_i^2}, \lambda_2 = \frac{m \sum_j n_{ij}^2}{\sigma_i^2}$$

となる。これより静特性 (望目特性) の SN 比は上記で表される 2 重非心 F 分布と関連付けられる。(堀井・松田 [2]、永田 [7] 参照)

3.4 動特性の SN 比

3.4.1 動特性とは

動特性とは、入力の変化に応じて、出力も直線的に変化するエンジニアードシステムのことを指す。

【例】水道の蛇口、自動車の加速等

3.4.2 動特性の SN 比の求め方と統計的分布

入力の信号因子を m 水準の X とし、 a 水準の制御因子 A 、 r 水準の誤差因子 N のときの実験で得られたデータを表 2 とする。

表 2: 動特性の実験データ

		X_1, \dots, X_m	傾き	残差分散	SN 比
A_1	N_1	y_{111}, \dots, y_{11m}	$\hat{\beta}_{A_1}$	V_{eA_1}	γ_{A_1}
	\vdots	\vdots			
	N_r	y_{1r1}, \dots, y_{1rm}			
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
A_a	N_1	y_{a11}, \dots, y_{a1m}	$\hat{\beta}_{A_a}$	V_{eA_a}	γ_{A_a}
	\vdots	\vdots			
	N_r	y_{ar1}, \dots, y_{arm}			

また、ここでは簡便のため各 A_i 水準間の等分散性は仮定しない。このとき標本 SN 比は、

$$\gamma_{A_i} = 10 \log_{10} \left(\frac{\hat{\beta}_{A_i}^2}{V_{eA_i}} \right) \quad (5)$$

となる。次に y_{ijk} のデータに対し、各 A_i で入力信号 X_k に対する全体の傾きと、 A_i を誤差因子 N_j で場合分けしたときの傾きと誤差 ϵ_{ijk} で以下のようなモデルが成り立つと考える。

$$y_{ijk} = \beta_{A_i} X_k + (\beta_{A_i N_j} - \beta_{A_i}) X_k + \epsilon_{ijk} \quad (6)$$

ここで、誤差因子以外の誤差 ϵ_{ijk} は互いに独立で $E(\epsilon_{ijk}) = 0$ 、 $V(\epsilon_{ijk}) = \sigma_i^2$ を満たす。

よって母 SN 比は、

$$10 \log_{10} \frac{\beta_{A_i}^2}{\frac{\sum_j (\beta_{A_i N_j} - \beta_{A_i})^2 \sum_k X_k^2}{rm-1} + \sigma_i^2} \quad (7)$$

となる。ここで、誤差 ϵ_{ijk} に正規性を持たせ、静特性と同様に式変形をすると以下の分布に従うことがわかる。

$$\frac{(r \sum_k X_k^2) \hat{\beta}_{A_i}^2}{V_{eA_i}} \sim F''(1, rm - 1, \lambda_1, \lambda_2) \quad (8)$$

$$\lambda_1 = \frac{(r \sum_k X_k^2) \beta_{A_i}^2}{\sigma_i^2}, \lambda_2 = \frac{\sum_j (\beta_{A_i N_j} - \beta_{A_i})^2}{\sigma_i^2}$$

従って、動特性のSN比も2重非心 F 分布と関連付けられる。(堀井・松田 [2]、永田 [7] 参照)

4 2重非心 F 分布

2重非心 F 分布 $F''(\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2)$ は以下で定義される確率変数が従う分布である。(鳥越 [13]、堀井・松田 [2] 参照)

$$F''_{\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2} := \left\{ \frac{\chi_{\nu_1, \lambda_1}^2}{\nu_1} \right\} / \left\{ \frac{\chi_{\nu_2, \lambda_2}^2}{\nu_2} \right\} \quad (9)$$

このとき、分母と分子の χ^2 はそれぞれパラメータ (自由度, 非心度) が (ν_1, λ_1) と (ν_2, λ_2) の独立した非心カイ2乗分布に従う確率変数である。2重非心 F 分布の確率密度関数は以下のように定義されている。

$$p_{F''}(x; \nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2) := \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^{r+t} \frac{(\lambda_1/2)^r}{r!} \frac{(\lambda_2/2)^t}{t!} \cdot \left[\sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^t (-1)^{i+j} \binom{r}{i} \binom{t}{j} p_F(x; \frac{\nu_1}{2} + i, \frac{\nu_2}{2} + j) \right] \quad (10)$$

($0 < x < \infty; \nu_1, \nu_2 = 1, 2, \dots; \lambda_1, \lambda_2 > 0$)

ここでの $\binom{r}{i}$ は r 個のものから i 個選ぶ組み合わせである。また、 $p_F(x; \frac{\nu_1}{2} + i, \frac{\nu_2}{2} + j)$ は自由度 $(\nu_1 + 2i, \nu_2 + 2j)$ の中心 F 分布の密度関数であるので、以下のような関数となる。

$$p_F(x; \frac{\nu_1}{2} + i, \frac{\nu_2}{2} + j) = \frac{(\nu_1/\nu_2)^{\nu_1/2+i} x^{\nu_1/2+i-1}}{B(\nu_1/2+i, \nu_2/2+j) (1 + (\nu_1/\nu_2)x)^{(\nu_1+\nu_2)/2+i+j}} \quad (11)$$

ここでの $B(\cdot, \cdot)$ はベータ関数である。

上記のように2重非心 F 分布はとても複雑な形をしているため、実際にパーセント点を求めるためには複雑な計算や時間が必要であることがわかる。

5 2重非心 F 分布のパーセント点近似法

よく使われる従来のパーセント点近似 (Tiku 法) と Cornish-Fisher 展開を用いたパーセント点近似 (Torigoe 法) の2つの近似法の詳しい導出方法は省略する。ここでは、Mudholkar et al. [6] を元に堀井・松田 [2] では評価されなかった2つの近似方法について詳しく述べる。

5.1 Tiku 法

Tiku[11] のよる $((F''_{\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2} + \zeta)/\tau)$ の分布の 3 次以下のモーメントを等置することによって自由度 (ν', ν_2) の中心 F 分布 $F(\nu', \nu_2)$ で近似する方法である。以下ではこの方法を Tiku 法と呼ぶ。最終的に導き出されるのは以下の近似式である。

$$\Pr\{F''_{\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2} < f\} \approx I_{\nu'_0}\left(\frac{1}{2}\nu_2, \frac{1}{2}\nu'\right) = 1 - \frac{1}{B(\frac{1}{2}\nu_2, \frac{1}{2}\nu')} \int_0^{\nu'_0} t^{\frac{1}{2}\nu_2-1} (1-t)^{\frac{1}{2}\nu'-1} dt \quad (12)$$

ただし $\nu'_0 = 1/\left(1 + \frac{\nu'}{\nu_2} \frac{f+\zeta}{\tau}\right)$ である。

5.2 Torigoe 法

鳥越 [13] は近似式 (12) の左辺が F 分布で近似できる (カイ 2 乗分布でも表すことができる) ことを利用して新たな統計量分布を得て、その分布を Cornish-Fisher 展開することで新たな近似式を得た。この方法を Torigoe 法と呼ぶ。最終的に導き出されるのは以下の近似式である。

$$\begin{aligned} -\frac{b_{\nu'} - \sqrt{f'_\alpha b_{\nu_2}}}{\sqrt{1 - b_{\nu'}^2 + f'_\alpha(1 - b_{\nu_2}^2)}} &\approx u_\alpha + \frac{u_\alpha^2 - 1}{24\{1 - b_{\nu'}^2 + f'_\alpha(1 - b_{\nu_2}^2)\}} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{1}{\nu'^2} + \frac{1}{\nu'^3} - f_\alpha'^{3/2} \left(\frac{1}{\nu_2^2} + \frac{1}{4\nu_2^3} \right) \right\} \\ &\quad - \frac{2u_\alpha^3 - 5u_\alpha}{576\{1 - b_{\nu'}^2 + f'_\alpha(1 - b_{\nu_2}^2)\}^3} \cdot \left(\frac{1}{\nu'^2} - \frac{f_\alpha'^{3/2}}{\nu_2^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (13)$$

このとき u_α は $N(0, 1)$ の上側 100α パーセント点、 $f'_\alpha = (f_\alpha + \zeta)/\tau$ を示す。

5.3 MCL-E 法

Mudholkar et al.[6] はエッジワース級数展開と Aty[1] によって導き出されたキュムラント表現を組み合わせることによって、標準正規変数の分布関数を用いた 2 重非心 F 分布の累積分布関数の近似式を導出した。

5.3.1 MCL-E 法の導出

エッジワース級数近似を展開するために 2 重非心 F 分布を以下のように置き換える。

$$\Pr\{F''_{\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2} \leq c\} = \Pr\{v = v_1 - c^{1/3}v_2 \leq 0\} \quad (14)$$

このとき $v_1 = \{\chi_{\nu_1}^2(\lambda_1)/\nu_1\}^{1/3}$ 、 $v_2 = \{\chi_{\nu_2}^2(\lambda_2)/\nu_1\}^{1/3}$ を意味する。

ここで Aty[1] の $\{\chi_{\nu_1}^2(\lambda)/(\nu + \lambda)\}$ のキュムラントの表現を用いることと、 v_1 と v_2 の独立

性を用いることで以下のようなキュムラント $k_s (v = v_1 - c^{1/3}v_2$ の $s = 1, 2, 3, 4$) の式を得ることができる。

$$\begin{aligned}
k_1 &= (r_1/\nu_1)^{1/3}T_1(r_1, b_1) - (cr_2/\nu_2)^{1/3}T_1(r_2, b_2), \\
k_2 &= (r_1/\nu_1)^{2/3}T_2(r_1, b_1) + (cr_2/\nu_2)^{2/3}T_2(r_2, b_2), \\
k_3 &= (r_1/\nu_1)T_3(r_1, b_1) - (cr_2/\nu_2)T_3(r_2, b_2), \\
k_4 &= (r_1/\nu_1)^{4/3}T_4(r_1, b_1) - (cr_2/\nu_2)^{4/3}T_4(r_2, b_2),
\end{aligned} \tag{15}$$

このとき

$$\begin{aligned}
T_1(r, b) &= \left(1 - \frac{2(1+b)}{9r} - \frac{40b^2}{3^4r^2} + \frac{80(1+3b+33b^2-77b^3)}{3^7r^3} + \frac{176(1+4b-210b^2-2380b^3-2975b^4)}{3^9r^4} \right), \\
T_2(r, b) &= \left(\frac{2(1+b)}{9r} - \frac{16b^2}{3^3r^2} + \frac{8(13+39b+405b^2-1025b^3)}{3^7r^3} + \frac{160(1+4b-87b^2+1168b^3-1544b^4)}{3^8r^4} \right), \tag{16} \\
T_3(r, b) &= - \left(\frac{8b^2}{3^3r^2} - \frac{32(1+3b+21b^2-62b^3)}{3^6r^3} - \frac{32(8+3b-177b^2+4550b^3-6625b^4)}{3^8r^4} \right), \\
T_4(r, b) &= \left(\frac{16(1+3b+12b^2-44b^3)}{3^6r^3} - \frac{256(1+4b-6b^2+274b^3-458b^4)}{3^8r^4} \right),
\end{aligned}$$

$r_i = \nu_i + \lambda_i, b_i = \lambda_i/r_i, i = 1, 2$ である。

以上を用いてエッジワース級数展開を行うことにより、2重非心 F 分布の累積分布関数のためのエッジワース級数近似を得ることができる。(Johnson and koltz[3] 参照)

$$\Pr\{F'' \leq c\} \approx \Phi(d) - \left[\frac{\beta_1}{6}(d^2 - 1) + \frac{\beta_2}{24}(d^3 - 3d) + \frac{\beta_1^2}{72}(d^5 - 10d^3 + 15d) \right] \cdot \phi(d) \tag{17}$$

このとき、 $d = -k_1/\sqrt{k_2}$ 、 $\beta_1 = k_3/k_2^{3/2}$ 、 $\beta_2 = k_4/k_2^2$ 、 $\Phi(\cdot)$ は標準正規変数の分布関数、 $\phi(\cdot)$ は確率密度関数を意味する。この近似方法を導出者3人の頭文字 MCL とエッジワース級数展開の E を合わせ、本論文では MCL-E 法と呼ぶことにする。

5.4 MCL-M 法

Tiku[12] は非心 F 分布と合流型超幾何分布に対応するモーメントに関して2重非心 F 分布の r 番目のモーメント μ'_r の表現を導き出した。これらの計算は困難なため、合流型超幾何分布を近似することによつての r 番目のモーメント近似法も Tiku は同時に導き出した(この3次の近似モーメントは2重非心 F 変数 $F''_{\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2}$ の近似 $aF_{\nu'_1, \nu_2} + b$ のパラメータ (a, ν'_1, b) を決定することに使われる)。これらを利用し、Mudholkar et al.[6] が非心 F 変数に基づくモーメント近似を導き出した。

5.4.1 MCL-M 法の導出

2重非心 F の分母の非心カイ2乗は変数 $c\chi_\nu^2$ によって近似できることを利用する。このときの c 、 ν (初めの2つのモーメントによって決まる)は $c = (\nu_2 + 2\lambda_2)/(\nu_2 + \lambda_2)$ と

$\nu = (\nu_2 + \lambda_2)^2 / (\nu_2 + 2\lambda_2)$ である。

従って、2重非心 F 変数のモーメントは以下の変数のモーメントとほぼ等しくなる。

$$aF'_{\nu_1, \nu, \lambda_1} = a \frac{\chi_{\nu_1, \lambda_1}^2 / \nu_1}{\chi_\nu^2 / \nu} \quad (18)$$

このとき、 $a = \nu_2 / (\nu_2 + \lambda_2)$ 、 $F'_{\nu_1, \nu, \lambda_1}$ はパラメータ (ν_1, ν, λ_1) での非心 F 変数である。このモーメント近似が2重非心 F 分布の確率とパーセント点近似に利用できることは明らかである。この近似方法を導出者3人の頭文字 MCL とモーメント近似の M を合わせ、本論文では MCL-M 法と呼ぶことにする。

6 近似法のプログラムと精度

この節では各近似法でのプログラムの概要と鳥越 [13] と同じ設定である中程度の自由度における計算結果の精度について述べる。すなわち、自由度1が5、10、20、自由度2が10、20、30、非心度1と2が5、10での27の組み合わせである。

6.1 真値のプログラムと精度

堀井・松田 [2] によって定義された真値を用いる (ソフトウェアはフリーソフトの R を使用)。この方法は R に元々入っているカイ2乗乱数 (rchisq) を用いたものである。非心カイ2乗乱数を10000組発生させて式 (9) を計算し、それを10000回繰り返したパーセント点の平均の値を真値と定義する。この定義での真値はモンテカルロシミュレーションでの相対標準誤差が平均で0.0003であり、非常に信頼の高い値が出るのが堀井・松田 [2] によってわかっている。しかし、1つのパーセント点を求める計算に1.40GHzのノートPCにおいて約6分程度かかってしまう。また、乱数を用いての計算のため同じ自由度、非心度の組み合わせの場合であっても最終的な結果が若干異なってしまうという欠点がある。

6.2 Tiku 法と Torigoe 法のプログラムと精度

Tiku 法、Torigoe 法の近似式 (12), (13) についてのプログラムも堀井・松田 [2] によって作成されているのでそのプログラムを使用した。Tiku 法の式 (12) の積分部分は中点則を使用しパーセント点近似を求め、Torigoe 法の式 (13) はニュートン・ラブソン法を使用してパーセント点近似を求めるものである。しかし、これらの方法では計算の途中で積分がうまく求められなかったり、根号の中が負となったりする場合が存在するので計算結果が出せない場合には“—”と記す。また、近似法の誤差は“真値 - 近似値”である。

Tiku 法の真値との誤差は95パーセント点近似値のときが最も大きく最大0.811、平均0.156であった。また、10パーセントと5パーセント点近似ともに6点結果が出せなかった。

Torigoe 法も95パーセント点近似値の誤差が最も大きく最大0.178、平均0.043であった。また、Torigoe 法では95パーセントと90パーセント点近似ともに6点、10パーセントと5パーセント点近似ではともに17点の結果が出せなかった。

6.3 MCL-E 法プログラムと精度

式 (17) を元にパーセント点近似を求めるプログラムを作成した。堀井・松田 [2] と同様にソフトウェアはフリーソフトの R を使用する。式 (17) は確率を求める形であるので、パーセント点を求める考え方として、 $(\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2, x)$ を決定する (x は内部の関数で自由度 (ν_1, ν_2) の中心 F 分布の x のパーセント点に変換する)。この x を変更していき、結果として帰ってくる 2 重非心 F 分布の下側確率の値が 95 パーセント点を求めたいならば 0.95 になるまで繰り返す。このときの x での中心 F 分布のパーセント点が 2 重非心 F 分布のパーセント点近似である。実際のプログラム内での x の探索方法として 2 分法を使用した。

MCL-E 法の 95 パーセント点近似値の誤差は最大 0.133、平均 0.047 であり、90 パーセント点近似値の誤差は最大 0.339、平均 0.043 である。また、MCL-E 法はすべての場合においてパーセント点近似値を求めることができた。

6.4 MCL-M 法プログラムと精度

式 (18) を元にパーセント点近似を求めるプログラムを作成した。他の近似法と同様にソフトウェアはフリーソフトの R を使用する。パーセント点を求める考え方として、式 (18) を次のように考える。

$$aF'_{\nu_1, \nu, \lambda_1} = a \frac{\chi_{\nu_1, \lambda_1}^2 / \nu_1}{\chi_{\nu}^2 / \nu} = F''_{\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2} \quad (19)$$

従って、2 重非心 F 分布の確率は次のように変換できる。

$$\Pr\{F''_{\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2} \leq x\} = \Pr\{aF'_{\nu_1, \nu, \lambda_1} \leq x\} = \Pr\left\{F'_{\nu_1, \nu, \lambda_1} \leq \frac{x}{a}\right\} \quad (20)$$

よって、 $(\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2, x)$ を決定して “ x/a ” を用いての非心 F 分布の分布関数より求める。このときの x の値を変更していき、95 パーセント点を求めたいならば 0.95 になるように x を定める。このときの x の値が 2 重非心 F 分布のパーセント点近似となる。実際のプログラム内での x の探索方法として MCL-E 法同様に 2 分法を使用した。

MCL-M 法の 95 パーセント点近似値の誤差が最も大きく最大 0.059、平均 0.015 であった。また、MCL-M 法は MCL-E 法と同様にすべての場合においてパーセント点近似値を求めることができた。

6.5 自由度が中程度の場合の比較と考察

自由度が中程度の場合の 4 つの近似法の最大誤差と誤差平均の比較を表 3 で示す。Tiku 法はどのパーセント点近似においても最大誤差、誤差平均ともに最も悪い結果になることがわかる。90 パーセント点近似では Torigoe 法が最も良い結果となっているが、近似値を求められない点が存在することを考えると最良とはいえない。MCL-M 法は 95 パーセント点近似、90 パーセント点近似ともに真値に対する誤差の割合が大体 1% 程度であり、最も有効であるといえる。10 パーセント点近似と 5 パーセント点近似を見ると、MCL-M 法は最大誤差と誤差平均が非常に小さく真値に近い近似値を求めることができることがわかる。よって、自由度が中程度の場合は MCL-M 法が最も有効である。

表 3: 誤差の比較

		Tiku 法	Torigoe 法	MCL-E 法	MCL-M 法
95%	最大誤差	0.811	0.178	0.133	0.059
	誤差平均	0.156	0.043	0.047	0.015
90%	最大誤差	0.565	0.019	0.339	0.025
	誤差平均	0.087	0.007	0.043	0.007
10%	最大誤差	0.150	0.014	0.036	0.001
	誤差平均	0.034	0.005	0.010	0.000
5%	最大誤差	0.256	0.026	0.040	0.001
	誤差平均	0.058	0.010	0.012	0.000

7 SN 比の信頼区間の導出

2 重非心 F 分布に従う確率変数を $F''_{\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2}$ とし、 $F''(\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2)$ の下側のパーセント点を f_1 、上側のパーセント点を f_2 とすると

$$\Pr\{f_1 \leq F''_{\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2} \leq f_2\} = 1 - \alpha \quad (21)$$

と表せ、信頼区間は $[f_1, f_2]$ となる。ここで片側の確率はそれぞれ $\alpha/2$ で考えることとする。

7.1 静特性の SN 比の信頼区間

静特性の標本 SN 比は

$$\gamma_{A_i} = 10 \log_{10} \left(\frac{\bar{x}_{A_i}^2}{V_{A_i}} \right) \quad (22)$$

で与えられていて、2 重非心 F 分布との関係は

$$\frac{rm\bar{x}_{A_i}^2}{V_{A_i}} \sim F''(1, rm - 1, \lambda_1, \lambda_2) \quad (23)$$

となっている。すなわち、

$$\Pr\{f_1 \leq \frac{rm\bar{x}_{A_i}^2}{V_{A_i}} \leq f_2\} \quad (24)$$

となり、これを基に γ_{A_i} の不等式に変形する。標本 SN 比より、

$$\frac{\bar{x}_{A_i}^2}{V_{A_i}} = 10^{\frac{\gamma_{A_i}}{10}} \quad (25)$$

が導かれ、これを $\frac{rm\hat{x}_{A_i}^2}{V_{eA_i}}$ に代入すると、 $rm10^{\frac{\gamma_{A_i}}{10}}$ となり、

$$10 \log_{10} \frac{f_1}{rm} \leq \gamma_{A_i} \leq 10 \log_{10} \frac{f_2}{rm} \quad (26)$$

となる。信頼区間は $[10 \log_{10} \frac{f_1}{rm}, 10 \log_{10} \frac{f_2}{rm}]$ である。

7.2 動特性の SN 比の信頼区間

動特性の標本 SN 比は

$$\gamma_{A_i} = 10 \log_{10} \left(\frac{\hat{\beta}_{A_i}^2}{V_{eA_i}} \right) \quad (27)$$

で与えられていて、2重非心 F 分布との関係は

$$\frac{(r \sum X_k^2) \hat{\beta}_{A_i}^2}{V_{eA_i}} \sim F'(1, rm - 1, \lambda_1, \lambda_2) \quad (28)$$

となっている。すなわち、

$$\Pr\{f_1 \leq \frac{(r \sum X_k^2) \hat{\beta}_{A_i}^2}{V_{eA_i}} \leq f_2\} \quad (29)$$

となり、これを基に γ_{A_i} の不等式に変形する。標本 SN 比より、

$$\frac{\hat{\beta}_{A_i}^2}{V_{eA_i}} = 10^{\frac{\gamma_{A_i}}{10}} \quad (30)$$

が導かれ、これを $\frac{(r \sum X_k^2) \hat{\beta}_{A_i}^2}{V_{eA_i}}$ に代入すると、 $(r \sum X_k^2) 10^{\frac{\gamma_{A_i}}{10}}$ となり、

$$10 \log_{10} \frac{f_1}{r \sum X_k^2} \leq \gamma_{A_i} \leq 10 \log_{10} \frac{f_2}{r \sum X_k^2} \quad (31)$$

となる。信頼区間は $[10 \log_{10} \frac{f_1}{r \sum X_k^2}, 10 \log_{10} \frac{f_2}{r \sum X_k^2}]$ である。

7.3 SN 比の信頼区間のプログラム

静特性、動特性ともにデータから前節の信頼区間を求めるプログラムを作成した。

静特性は表 1 の形式のデータ、動特性は表 2 の形式のデータに対応していて信頼区間を求めるのに必要な 2重非心 F 分布のパーセント点は MCL-M 法を用いて求めた。

8 実データでの事例

8.1 静特性の事例

あるサーキットでの RC カーレースにおける 1 周のタイムをシミュレーション (かわにし [4] 参照) により採取したデータである。(堀井・松田 [2] 参照)

このデータに静特性の SN 比の信頼区間プログラムにかけ、表 4 の結果を得た。なお、堀井・松田 [2] では数値に間違いがあるので、本論文では修正してある。

表 4: カーシミュレーションの結果

水準	ν_1	ν_2	λ_1	λ_2	信頼率	上側 SN 比	下側 SN 比	SN 比
A1	1	5	564588.2	14.28939	95	48.45	40.89	43.87
					90	47.67	41.35	
A2	1	5	77894.98	14.83425	95	39.66	32.19	35.15
					90	38.89	32.66	
A3	1	5	15386.6	4.825625	95	37.59	27.47	31.16
					90	36.46	28.05	

表 5 の幅とは信頼区間の幅を表している。また、SN 比の差とは、SN 比と信頼区間の上側、下側それぞれとの距離である。これは他の事例でも同様である。

表 4 を見ると、非心度 1 はどの水準でも 5 桁になり、非心度 2 は A1 と A2 がほぼ同じ値となった。また、表 5 より、SN 比の信頼区間の幅は信頼率 95 % で最大 10.12、最小 7.47、平均 8.38、90 % で最大 8.41、最小 6.23、平均 6.99 となった。そして、SN 比の再現性の $\pm 3\text{db}$ と比較してみると、再現性の幅 6 より事例の計算で求めた幅が短くなることはなかったが、 $\pm 3\text{db}$ のように対称ではなく、平均して信頼率 95 % で +5.17、-3.21、90 % で +4.28、-2.71 となり下側寄りになるという結果になった。また、この事例では 3 水準とも下側寄りになっている。

表 5: カーデータの SN 比について幅と差

水準	信頼率	幅	上側と SN 比の差	下側と SN 比の差
A1	95	7.56	4.58	2.98
	90	6.32	3.8	2.52
A2	95	7.47	4.51	2.96
	90	6.23	3.74	2.49
A3	95	10.12	6.43	3.69
	90	8.41	5.3	3.11

8.2 動特性の事例 1

2種類の金属材料 A1 と A2 の劣化試験を行ったときのデータである。(堀井・松田 [2]、田口 [8] 参照)

このデータに動特性の SN 比の信頼区間プログラムにかけ表 6 の結果を得た。なお、堀井・松田 [2] では数値に間違いがあるので、本論文では修正してある。

表 6: 劣化試験の結果

水準	v_1	v_2	λ_1	λ_2	信頼率	上側 SN 比	下側 SN 比	SN 比
A1	1	8	64.37144	0.054362	95	-1.734	-11.817	-7.653
					90	-2.749	-11.134	
A2	1	8	336.3136	0.043105	95	5.212	-4.041	-0.4729
					90	4.223	-3.481	

表 7: 劣化試験データの SN 比について幅と差

水準	信頼率	幅	上側と SN 比の差	下側と SN 比の差
A1	95	10.083	5.919	4.164
	90	8.385	4.904	3.481
A2	95	9.253	5.685	3.568
	90	7.704	4.696	3.008

表 6 を見ると非心度 1 は 1 桁違っていたが、非心度 2 はどちらもほぼ同じ値となった。また、表 7 より SN 比の信頼区間の幅は信頼率 95 % で最大 10.08、最小 9.25、平均 9.67、90 % で最大 8.39、最小 7.70、平均 8.04 となった。そして、SN 比の再現性の $\pm 3\text{db}$ と比較してみると、再現性の幅 6 より事例の計算で求めた幅が短くなることはなかったが、 $\pm 3\text{db}$ のように対称ではなく、平均して信頼率 95 % で +5.80、-3.87、90 % で +4.80、-3.25 となり下側寄りになるという結果になった。また、この事例でも 2 水準とも下側寄りになっている。

8.3 動特性の事例 2

あるサーキットでの RC カーレースにおける 1 周タイムをシミュレーション (かわにし [4] 参照) により採取したデータである。

車の重量 (1.6kg)、回転部分重量 (0.225)、車体の種類 (インプレッサ) は水準を一定にして、制御因子をギア比、誤差因子をグリップ、信号因子をモータートルクとした。各因子の水準は表 8 の通りである。

以上の実験から表 9 のデータを得た。

このデータに動特性の SN 比の信頼区間プログラムにかけると表 10 の結果となった。

表 8: カーシミュレーションの水準

	ギア比	グリップ	トルク
水準 1	4	1.3	1
水準 2	5	1.6	1.5
水準 3	6	1.9	2
水準 4	-	2	-

表 9: カーシミュレーションのデータ

		x1	x2	x3
A1	N1	16.648	16.287	16.101
	N2	15.767	14.831	14.583
	N3	15.238	14.354	13.976
	N4	14.902	13.714	13.156
A2	N1	17.348	16.474	16.968
	N2	16.105	15.685	15.574
	N3	16.248	14.876	14.456
	N4	15.496	15.362	15.245
A3	N1	19.489	17.572	17.509
	N2	18.922	18.142	16.567
	N3	19.130	18.470	16.742
	N4	17.682	16.568	18.329

表 10: カーシミュレーション (動特性) の結果

水準	v_1	v_2	λ_1	λ_2	信頼率	上側 SN 比	下側 SN 比	SN 比
A1	1	11	119.5854	0.06628	95	10.94	2.7	6.15
					90	10.12	3.25	
A2	1	11	133.788	0.03788	95	11.41	3.24	6.64
					90	10.6	3.79	
A3	1	11	120.8111	0.001308	95	11	2.77	6.2
					90	10.19	3.33	

表 10 を見ると、2 つの非心度は 3 水準とも似たような値となった。

また、表 11 より、SN 比の信頼区間の幅は信頼率 95 % で最大 8.24、最小 8.17、平均 8.21、90 % で最大 6.87、最小 6.81、平均 6.85 となった。そして、SN 比の再現性の $\pm 3\text{db}$ と比較してみると、再現性の幅 6 より事例の計算で求めた幅が短くなることはなかったが、 $\pm 3\text{db}$ のように対称ではなく、平均して信頼率 95 % で +4.79、-3.43、90 % で +3.97、-2.87 となり下側寄りになるという結果になり、この事例でも 3 水準とも下側寄りになっている。

表 11: カーデータ (動特性) の SN 比について幅と差

水準	信頼率	幅	上側と SN 比の差	下側と SN 比の差
A1	95	8.24	4.79	3.45
	90	6.87	3.97	2.9
A2	95	8.17	4.77	3.4
	90	6.81	3.96	2.85
A3	95	8.23	4.8	3.43
	90	6.86	3.99	2.87

8.4 SN 比の再現性の考察

タグチメソッドにおける SN 比での信頼区間の適用を静特性で 5 パターン (4 パターンは割愛)、動特性で 2 パターンの実データに対して行うと共に、田口玄一氏の経験則による SN 比の再現性 $\pm 3\text{db}$ との関係について調べた。その結果、 $\pm 3\text{db}$ の幅 6 に対して、ほとんどの事例で幅は 6 より長くなった。幅が 6 より短くなることもあったが、各事例の一番 SN 比の値が良いものだけをみると 95%信頼区間はすべて幅は 6 より長かった。90%信頼区間でもほとんどの場合幅は 6 より長かった。しかし、 $\pm 3\text{db}$ のように対称になることはなく、こちらほとんど事例では下側寄りになった。上側寄りになることもあったが、各事例の一番 SN 比の値が良いものだけをみるとすべて下側寄りとなった。そして、上限 +4 ~ +5、下限 -2 ~ -3 くらいという結果が多かった。特に 90%信頼区間では多くの場合で下限の幅は 3db を切っていた。

つまり、SN 比の再現性 $\pm 3\text{db}$ は、幅に対しては問題はないが、対称性はないため特に下限で $\pm 3\text{db}$ がゆるい基準となる場合があるということがわかった。

9 実データを元にしたシミュレーション

前節のデータの基づき、各近似法の実際的な精度を確認する。

9.1 静特性の場合

8.1 節に基づき、自由度 1 は 1 に自由度 2 は 5 に固定し、非心度 1 は 0、10、100、1000、10000、100000 に、非心度 2 は 0、2、4、6、8、10 に変化させシミュレーションを行う。

望目特性で取りうる非心度の組み合わせでは真値は信頼できる値であり、Tiku 法と Torigoe 法は結果を求められないパーセント点や真値と大きく異なる近似が多く存在し、実用的でない堀井・松田 [2] によって結論付けられている。このため、MCL-E 法と MCL-M 法を中心にみる。結果の一部を表 12、表 13 に示す。

表 12: 95 パーセント点近似 (静特性)

ν_1	ν_2	λ_1	λ_2	真値	相対誤差	真-TI	真-TO	真-E	真-M
1	5	0	4	3.354	0.00027	-0.077	-0.119	-0.142	0.087
1	5	10	4	26.929	0.00021	0.040	-0.054	-2.602	1.228
1	5	100	4	216.943	0.00020	-2.246	-2.980	-15.090	12.945
1	5	1000	4	2110.474	0.00020	-26.558	-33.558	-149.229	131.000
1	5	10000	4	21046.960	0.00019	-268.290	-337.420	-1490.160	1313.810
1	5	100000	4	210398.900	0.00019	-2559.400	-	-14917.500	13129.100
1	5	0	10	1.744	0.00025	-9.365	-	-0.043	0.038
1	5	10	10	13.012	0.00018	-89.020	-89.505	-1.164	0.540
1	5	100	10	100.249	0.00016	-	-	-6.030	5.932
1	5	1000	10	967.022	0.00016	-	-	-60.037	60.592
1	5	10000	10	9636.978	0.00016	-	-	-598.002	610.511
1	5	100000	10	96341.390	0.00016	-	-	-5972.410	6114.670

表 13: 5 パーセント点近似 (静特性)

ν_1	ν_2	λ_1	λ_2	真値	相対誤差	真-TI	真-TO	真-E	真-M
1	5	0	4	0.002	0.00000	-	-	-0.013	0.000
1	5	10	4	1.155	0.00028	-0.776	-	0.180	-0.001
1	5	100	4	24.799	0.00010	-5.830	-	0.515	0.040
1	5	1000	4	266.341	0.00009	-54.356	-	5.317	0.801
1	5	10000	4	2682.411	0.00009	-539.250	-	53.833	8.515
1	5	100000	4	26842.850	0.00009	-	-	538.730	85.340
1	5	0	10	0.001	0.00000	-	-	-0.008	0.000
1	5	10	10	0.712	0.00028	-	-	0.112	-0.001
1	5	100	10	16.277	0.00009	-	-	0.366	0.058
1	5	1000	10	176.743	0.00008	-	-	3.875	1.002
1	5	10000	10	1782.268	0.00008	-	-	39.491	10.692
1	5	100000	10	17837.070	0.00008	-	-	395.170	107.080

Tiku 法や Torigoe 法とは違い MCL-E 法、MCL-M 法ともに 95、90、10、5 パーセントのすべての組み合わせの近似値を求めることができる。実データをふまえたシミュレーションの場合、6 節での結果と異なり非心度によって近似値の桁数が大きく異なる。このため、真値に対する誤差の割合 (近似法と真値の差/真値) で議論する。

MCL-E 法は 95 パーセント点近似、90 パーセント点近似ともに非心度 2 が 0 の場合は他の非心度の場合に比べ誤差の割合が小さい。95 パーセント点近似では非心度 1 が 10 の場合を除き 4% から 7% 程度の誤差が、90 パーセント点近似では非心度 1 が 10 の場合を除き 2% から 4% 程度の誤差がある。また、10 パーセント点近似と 5 パーセント点近似では非心度 1 が 0 の場合に 550% 程度の大きな誤差があるが、望目特性で取りうる非心度 1 は非常に大きいので MCL-E 法がまったく実用的でないとは言えない。

MCL-M 法は 95 パーセント点近似、90 パーセント点近似ともに非心度 2 が 0 の場合の誤

差はほぼ 0 である。MCL-M 法の近似式 (18) は非心 F 分布を元にした近似であり、非心度 2 が 0 の場合は $F'(\nu_1, \nu_2, \lambda_1)$ となり統計ソフト R の F 分布の関数によりほぼ正確なパーセント点求められるためである。よって、誤差が残る場合、真値の方の誤差だと考えられる。95 パーセント点近似では 4% から 7% 程度の誤差が、90 パーセント点近似では 1% から 4% 程度の誤差がある。また、Tiku 法、Torigoe 法、MCL-E 法とは違い、非心度によって急に大きな誤差をとまなうことがなく安定した近似法である。真値を求めるプログラムを使用する場合 1 つの値を求めるのに 6 分程度必要とするが、大まかな値の傾向を見るなどのある程度の誤差をとまなっても良い場合なら、MCL-M 法を用いることで近似値を瞬時に求めることができるため有効であろう。10 パーセント点近似と 5 パーセント点近似では最大でも誤差が 0.6% であり精度が高いことがわかる。このため、望み特性で取りうる非心度の 10 パーセント点近似値と 5 パーセント点近似値を MCL-M 法で求めることは有効であると結論付ける。

9.2 動特性の場合

8.2 節に基づき、自由度 1 は 1 に自由度 2 は 8 に固定し、非心度 1 は 0、1、10、100 に、非心度 2 は 0、2、4、6、8、10 に変化させシミュレーションを行う。

ゼロ点比例式で取りうる自由度と非心度の組み合わせでも真値は信頼でき、Tiku 法と Torigoe 法の実用化は難しいという結論が堀井・松田 [2] によって出されている。このため、この節でも MCL-E 法と MCL-M 法を中心にみることにする。結果の一部を表 14、表 15 に示す。

表 14: 95 パーセント点近似 (動特性)

ν_1	ν_2	λ_1	λ_2	真値	相対誤差	真-TI	真-TO	真-E	真-M
1	8	0	0	5.317	0.00024	-0.245	-0.327	-0.017	-0.001
1	8	1	0	10.004	0.00022	-0.265	-0.282	-1.132	-0.003
1	8	10	0	39.702	0.00017	-0.124	-0.171	-1.750	-0.013
1	8	100	0	304.912	0.00015	7.521	-0.266	0.144	-0.025
1	8	0	2	4.208	0.00024	-0.187	-0.239	-0.032	0.013
1	8	1	2	7.914	0.00022	-0.187	-0.197	-0.944	0.028
1	8	10	2	31.299	0.00017	-0.017	-0.051	-1.681	0.202
1	8	100	2	239.754	0.00015	-	-	-3.004	2.249

ゼロ点比例式の実データを用いた場合の自由度と非心度の組み合わせでも、MCL-E 法、MCL-M 法ともに 95、90、10、5 パーセントのすべての組み合わせの近似値を求めることができる。

MCL-E 法は 95 パーセント点近似、90 パーセント点近似ともに非心度 1 が 1 と 10 の場合に他の近似値よりも若干誤差が大きく 6% から 12% である。非心度 1 が 100 になると誤差は 2% から 3% 程度になる。5.4 節の傾向も考慮すると、MCL-E 法は 95 パーセント点近似と 90 パーセント点近似では非心度 1 が 100 程度まで大きくなると安定してくると考えられる。10 パーセント点近似、5 パーセント点近似では非心度 1 が 0 の場合に 550%、200% 程度の大きな誤差がある。非心度 1 が 10 の場合でも 15% 程度の誤差をとまなってしまう。

表 15: 5 パーセント点近似 (動特性)

ν_1	ν_2	λ_1	λ_2	真値	相対誤差	真-TI	真-TO	真-E	真-M
1	8	0	0	0.004	0.00000	-	-	-0.024	0.000
1	8	1	0	0.011	0.00091	-	-	0.011	0.000
1	8	10	0	2.121	0.00028	0.161	0.163	0.320	-0.001
1	8	100	0	47.363	0.00010	0.865	-0.002	0.117	-0.006
1	8	0	2	0.003	0.00000	-	-	-0.019	0.000
1	8	1	2	0.009	0.00111	-	-	0.009	0.000
1	8	10	2	1.701	0.00028	0.116	0.115	0.260	-0.002
1	8	100	2	38.262	0.00010	-	-	0.224	0.008

しかし、ゼロ点比例式で取りうる非心度 1 は 100 を超える場合も考えられるため、MCL-E 法がまったく実用的でないとは言えない。

MCL-M法は 95 パーセント点近似、90 パーセント点近似ともに全体的な誤差は小さい。特に非心度 1 が 0 と 1 のときは 1% 以下となる。ゼロ点比例式で取りうる非心度 2 は非常に小さくほぼ 0 である。MCL-M法は非心度 2 が 0 の場合の精度は非常に高い。また、10 パーセント点近似と 5 パーセント点近似も誤差が最大で 0.4% であり精度が高い。このため、ゼロ点比例式で取りうる非心度でパーセント点近似を求める場合の MCL-M 法は実用的であると結論付ける。

10 新たな近似法の提案

9 節での実データをふまえたシミュレーションにより、95 パーセント点や 90 パーセント点などの大きいパーセント点の近似値を求める場合は非心度 2 が 0 のときに理論上 MCL-M 法が有効であり、10 パーセント点や 5 パーセント点などの小さいパーセント点の近似値を求める場合はどの非心度でも MCL-M 法が有効であるとわかった。しかし、非心度 2 が 0 以外の場合は非心度 1 の値によっては MCL-E 法、MCL-M 法ともに真値に対する誤差の割合が大きくなってしまう場合があることがわかった。このため、この章では 95 パーセント点と 90 パーセント点のパーセント点の近似を求める場合の誤差を改善できないかを調べる。

10.1 真値と 2 つの近似法の差に基づく新しい近似法 (ME 法)

9 節での自由度と非心度のシミュレーションによって、パーセント点が大きな値になったとき、MCL-E 法は真値よりも大きい近似値を示し、MCL-M 法は真値よりも小さい近似値を示すことがわかった。このため、真値は MCL-E 法の近似値と MCL-M 法の近似値の間にある場合が多いことがわかる。また、非心度 1 が 100 以上になると MCL-E 法と MCL-M 法の誤差の絶対値がほぼ等しくなる場合が多く、2 つの近似法での近似値の中間点を取れば真値に非常に近くなると考えられる。つまり、この方法を ME 法と呼ぶことにすると

$$\text{ME 法の近似値} = \frac{(\text{MCL-M 法の近似値} + \text{MCL-E 法の近似値})}{2} \quad (32)$$

である。よって、次節でこの近似法がどの程度の非心度から有効になって来るのかを調べる。

10.2 近似法の場合分け

9節でのシミュレーションにより、実データをふまえた場合の自由度と非心度でのパーセント点近似はMCL-E法、MCL-M法ともに非心度2の影響は小さく、非心度2を変化させても同じような誤差の周期を繰り返すことがわかった。よって、自由度1を1に非心度2を2に固定し、自由度2を4、5、6、7、8、10、11、14に非心度1を50、25、10に変化させてM法とME法のどちらが優れているか調査した。

10.2.1 95パーセント点近似

シミュレーションの結果により、自由度2が4、5の場合ではすべての非心度においてME法がM法よりも良い近似値を示すことがわかった。自由度2が6、7、8の場合は非心度1が25以上がME法、10以下がM法。自由度2が10、11の場合は非心度1が50以上がME法、25以下がM法。自由度2が14の場合は非心度1が100を超えるとME法が有効となる。

10.2.2 90パーセント点近似

シミュレーションの結果により、自由度2が4の場合ではすべての非心度においてME法がM法よりも良い近似値を示すことがわかった。自由度2が5、6、7の場合は非心度1が25以上がME法、10以下がM法。自由度2が8、10の場合は非心度1が50以上がME法、25以下がM法。自由度2が11の場合は非心度1が75以上がME法、50以下がM法。自由度2が14の場合は非心度1が100以上がME法が有効となる。

10.2.3 場合分けの考察

自由度2が4以下のときは95パーセント点近似、90パーセント点近似ともにすべてME法が有効である。自由度2が5の場合の90パーセント点近似では非心度1が10の場合にM法が有効となっているが、この場合のME法との差は小さく、真値に対する誤差の割合の差を見ると約0.4%程度である。よって、自由度2が5の場合もすべてME法を用いることにする。自由度2が6、7の場合は非心度1が10以下でM法を用いる。自由度2が8の場合も95パーセント点、90パーセント点で真値に近い近似法が非心度によって違いがあるが差は小さい。よって、自由度2が8、10の場合は非心度1が25以下でM法を用いる。また、自由度2が9の場合も同じような結果になると予想される。自由度2が11の場合も95パーセント点、90パーセント点で真値に近い近似法が非心度によって違いがあるが差は小さい。よって、自由度2が11、14の場合は非心度1が50以下でM法を用いる。以上の結果により自由度2が大きくなるとM法の近似精度が上がっていくことがわかる。このため、自由度2(10,20,30)の場合での非心度1(5,10)ではM法が最も有効であったとわかる。簡単化のために近似法の場合分けの表を作成し、それを表16に示す。

表 16: 近似法の場合分け

95、90 パーセント点近似	使用する近似法
非心度 2 が 0	M 法
自由度 2 が 5 以下	ME 法
自由度 2 が 6 から 7 で非心度 1 が 10 以下	M 法
自由度 2 が 6 から 7 で非心度 1 が 11 以上	ME 法
自由度 2 が 8 から 10 で非心度 1 が 25 以下	M 法
自由度 2 が 8 から 10 で非心度 1 が 26 以上	ME 法
自由度 2 が 11 から 14 で非心度 1 が 50 以下	M 法
自由度 2 が 11 から 14 で非心度 1 が 51 以上	ME 法
10、5 パーセント点近似	M 法

この使い分けに基づき、どの程度の精度が出せるのか調査した。図 1, 2 はその結果の一部である。この図は表 12, 13 と同じ静特性の自由度・非心度 1 の設定であり、非心度 2 に関してはより細かく見た場合の誤差割合のグラフである。5 パーセント点の誤差割合は 1% もいかない小さなもので、95 パーセント点の誤差割合は 7% 以下、前節の使い分けにより自由度 2 が 5 以下なので非心度 2 が 0 以外は ME 法と併用すると最大 3% で抑えられる。

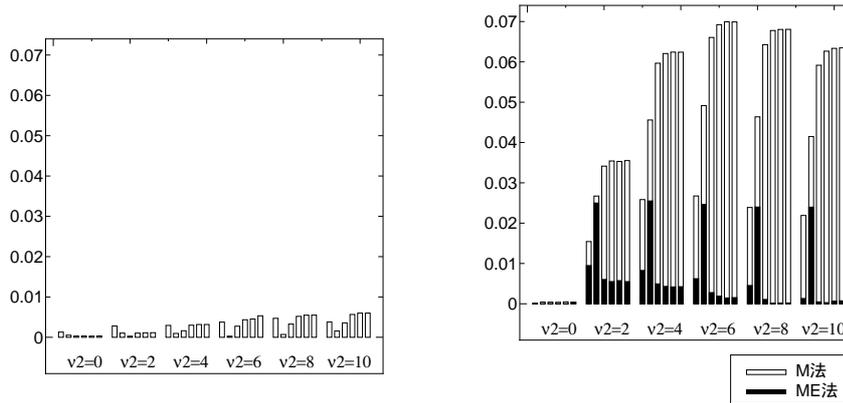


図 1: MCL-M 法:5 パーセント点近似の誤差割合 (静特性)

図 2: MCL-M 法、ME 法:95 パーセント点近似の誤差割合 (静特性)

11 まとめ

Tiku 法と Torigoe 法は自由度が小さいとパーセント点近似値を求められない場合が多いが、MCL-E と MCL-M は今回用いた自由度と非心度では全ての場合においてパーセント点近似値を求めることができた。特に、MCL-M 法は単独で用いる近似法としては SN 比の信頼区間を求めるのにそれなりの精度であると言える。さらに改善するには ME 法との使い分けを提唱する。

事例に基づく SN 比の再現性の確認では、信頼区間幅との関係が明らかになった。多くの

場合、信頼区間幅は 6db 以上であり、再現性の確認に無理がないことがわかった。しかし、丁寧に見ると信頼区間は上下非対称であり、特に下限で -3db より厳しいものとなる場合があることがわかった。そのため再現性の確認を確実に行うには信頼区間法を用いる方がよいと思われる。

12 おわりに

タグチメソッドの SN 比に関して経験的に与えられていた再現性の指標 $\pm 3\text{db}$ にせまってみた。分析を終えてみると実にうまい仕掛けであることがわかる。田口玄一氏の慧眼は驚くばかりである。しかし、精緻な議論も必要な場合があるはずでこの論文のよってそれが成し遂げられると考える。

参考文献

- [1] Aty, A.S.H. (1954): Approximate formula for the percentage points and the probability integral of the non-central χ^2 -distribution, *Biometrika*, **41**, 538-40.
- [2] 堀井 里佳子・松田 眞一 (2010): 2重非心 F 分布のパーセント点近似法の評価と SN 比への応用, 南山大学紀要『アカデミア』情報理工編, **10**, 27-37.
- [3] Johnson, N.L. and kotz, S. (1970): Distributions in Statistics, *Continuous Univariate Distributions, Vol.1*.
- [4] かわにし (2004): お気楽 RC!, <http://homepage3.nifty.com/kawanish/> .
- [5] 宮川 雅巳 (2000) :『品質を獲得する技術』, 日科技連.
- [6] Mudholkar,G.S., Chaubey,Y.P. and Lin,C. (1976): Approximations for the doubly noncentral F-distribution, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **5**, 49-63.
- [7] 永田 靖 (2006) : 統計的手法における SN 比, 第 1 回横幹連合総合シンポジウム.
- [8] 田口 玄一 (1994): 技術開発のための品質工学, 日本規格協会.
- [9] 立林 和夫 (2004) :『入門タグチメソッド』, 日科技連.
- [10] 立林 和夫 (2009) :『タグチメソッド入門』, 日本経済新聞出版社.
- [11] Tiku, M.L. (1965): Series expansion for the doubly noncentral F-distribution, *Austral. J. Statist.*, **7**, 78-89.
- [12] Tiku, M.L. (1972): A note on the distribution of the doubly non-central F-distribution, *Austral. J. Statist.*, **14**, 37-40.
- [13] 鳥越 規夫 (1997): 2重非心 F 分布のパーセント点の近似について, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/0916-4.pdf> .