

シークエント体系の証明図から実証明を作る方法¹

佐々木克巳 (南山大学情報理工学部)

e-mail: sasaki@nanzan-u.ac.jp

概要 本稿では、シークエント体系の証明図から、実際の証明を作る手続きを示す。この手続きのうち、実際の証明を構成する文の形とその順番は、健全性定理の証明にもとづいている。また、この手続きを素朴集合論における証明の作成に適用した例を示す。

1 準備

本稿では、シークエント体系の証明図から実際の証明を作る手続きを示す。実際の証明に対応するシークエント体系は、古典論理の体系ということになるが、この古典論理の体系には多くの形がある。ここでは、その中でも、実際の証明の形に近い、直観主義論理の体系に背理法を加えた形の体系を考える。

この節の残りの部分で、その体系 SNK を導入する。次節では、実際の証明を作る手続きを示す。3 節で、その手続きを素朴集合論に適用した例を示す。この手続きの正当性は、健全性定理の証明と同様に得ることができる。

以下に、シークエント体系 SNK 、すなわち、 SNK 証明図と SNK での証明可能性を導入する。まず、項および論理式は、以下の言語を用いて普通の方法で定義する：

- 対象変数: x, y, \dots
- 対象定数: c, d, \dots
- 関数記号: f, g, \dots
- 述語記号: p, q, \dots
- 論理記号: $\perp, \wedge, \vee, \supset, \neg, \forall, \exists$
- 補助記号: $(,), ,$ (コンマ)

項を表す記号として、 t を用い、論理式を表す記号として、 P, Q, R を用いる。論理式の有限集合を表す記号として、 Γ を用いる。また、これらに添え字をつけた記号も用いる。論理式 P は、 P を対象変数に関連づけて表現したいときは、 $P(x), P(x, y)$ のようにも表現する。論理式における、変数の自由な出現、束縛された出現、および、論理式・項への代入については、小野 [1] に従う。変数の自由な出現をもたない論理式を閉論理式という。論理式 $P(x)$ の x に t を代入した結果は $P(t)$ と表現する。

シークエントは、

$$\Gamma \rightarrow P$$

¹この研究は、2010 年度南山大学パツヘ研究奨励金 I-A-2 の援助を受けた。

の形の表現である。 Γ をこのシーケントの左辺、 P を右辺という。また、慣例に従い、混乱しない限り、

$$\{P, Q\} \cup \Gamma \rightarrow R$$

を

$$P, Q, \Gamma \rightarrow R$$

と表現する。一般の場合も同様に、左辺の “{” と “}” を省略し、 \cup を “,” と表記する。

シーケント S, S_1, \dots, S_n に対し、

$$\frac{S_1 \quad \dots \quad S_n}{S}$$

を推論規則という。 S をこの推論規則の下式、各 S_i をこの推論規則の上式という。

SNK 証明図は、次の SNK 公理と SNK 推論規則から定義する。

SNK 公理:

$$P \rightarrow P$$

SNK 推論規則:

$$\begin{array}{l} \frac{P, Q, \Gamma \rightarrow R}{P \wedge Q, \Gamma \rightarrow R} (\wedge \rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \rightarrow P \quad \Gamma \rightarrow Q}{\Gamma \rightarrow P \wedge Q} (\rightarrow \wedge) \\ \frac{P, \Gamma \rightarrow R \quad Q, \Gamma \rightarrow R}{P \vee Q, \Gamma \rightarrow R} (\vee \rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \rightarrow P_i}{\Gamma \rightarrow P_1 \vee P_2} (\rightarrow \vee) (i = 1, 2) \\ \frac{\Gamma \rightarrow P \quad Q, \Gamma \rightarrow R}{P \supset Q, \Gamma \rightarrow R} (\supset \rightarrow) \qquad \frac{P, \Gamma \rightarrow Q}{\Gamma \rightarrow P \supset Q} (\rightarrow \supset) \\ \frac{\Gamma \rightarrow P}{\neg P, \Gamma \rightarrow \perp} (\neg \rightarrow) \qquad \frac{P, \Gamma \rightarrow \perp}{\Gamma \rightarrow \neg P} (\rightarrow \neg) \\ \frac{P(t), \Gamma \rightarrow Q}{\forall x P(x), \Gamma \rightarrow Q} (\forall \rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \rightarrow P(z)}{\Gamma \rightarrow \forall x P(x)} (\rightarrow \forall) \\ \frac{P(z), \Gamma \rightarrow Q}{\exists x P(x), \Gamma \rightarrow Q} (\exists \rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \rightarrow P(t)}{\Gamma \rightarrow \exists x P(x)} (\rightarrow \exists) \\ \frac{\Gamma \rightarrow Q}{P, \Gamma \rightarrow Q} (w \rightarrow) \qquad \frac{\neg A, \Gamma \rightarrow \perp}{\Gamma \rightarrow A} (RAA) \\ \frac{\Gamma \rightarrow Q \quad Q, \Gamma \rightarrow P}{\Gamma \rightarrow P} (cut) \end{array}$$

ただし、 $(\rightarrow \forall)$, $(\rightarrow \exists)$ における z は、その下式において自由に出現しない変数であり、 $(\forall \rightarrow)$, $(\rightarrow \exists)$ における t は、任意の項である。

定義 1.1 SNK 証明図とその終式を次のように定義する。

- (1) SNK 公理は、SNK 証明図であり、その終式はその SNK 公理である。
- (2) \mathcal{P}_1 が S_1 を終式とする SNK 証明図で、 $\frac{S_1}{S}$ が SNK 推論規則であるとき、 $\frac{\mathcal{P}_1}{S}$ は SNK 証明図で、その終式は S である。

(2) $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ がそれぞれ S_1, S_2 を終式とする SNK 証明図で、 $\frac{S_1 \quad S_2}{S}$ が SNK 推論規則であるとき、 $\frac{\mathcal{P}_1 \quad \mathcal{P}_2}{S}$ は SNK 証明図で、その終式は S である。

証明図の一番上のシーケントを始式という。始式は SNK 公理である。

定義 1.2 S を終式とする SNK 証明図が存在するとき、 S は SNK で証明可能であるという。

また、SNK 証明図において、推論規則

$$\frac{P^*, Q^*, \Gamma \rightarrow R}{\Gamma \rightarrow P \vee Q} (\rightarrow \vee_2) \quad \left(\text{ただし、} R^* = \begin{cases} R' & (R = \neg R' \text{ のとき}) \\ \neg R & (\text{上記以外のとき}) \end{cases} \right)$$

$$\frac{P(z), \Gamma \rightarrow Q(z)}{\Gamma \rightarrow \forall x(P(x) \supset Q(x))} (\rightarrow \forall \supset)$$

は、SNK 推論規則の組合せで表現できる。これらをその組合せの省略形として用いる。

さらに、実際の証明との対応を考えると、実際の証明が行われる理論における定義を体系 SNK に反映させる。具体的には、この定義に対応する推論規則とシーケントを、SNK 推論規則と SNK 公理に追加して考える。

2 SNK 証明図と実際の証明との対応

この節では、SNK 証明図 \mathcal{P} から実際の証明を作る手続きを示す。

まず、この目標を明確にするために、体系 SNK と、実際の証明が行われる理論 \mathcal{T} との対応を考える。この対応は、対象領域 U と解釈 I からなる構造 $\mathfrak{A} = \langle U, I \rangle$ によって与える。構造についての詳細も小野 [1] に従う。 U の要素 a の名前 \underline{a} を対象定数として扱い、

- \underline{a} の解釈 \underline{a}^I は、 a

ということに注意しておく。

この構造 $\mathfrak{A} = \langle U, I \rangle$ によって、閉論理式 P に対して、 $\mathfrak{A} \models P$ が成り立つか否かが \mathcal{D} における文が成り立つか否かにより定義されている。このときに用いられた文を、 $P^{\mathfrak{A}}$ と表すことにする。たとえば、

- U が整数全体の集合
- 述語記号 p の解釈 p^I が、偶数全体の集合 \mathbf{E}

で $a \in U$ のとき、 $\mathfrak{A} \models p(\underline{a})$ は

$$\mathfrak{A} \models p(\underline{a}) \Leftrightarrow a \in \mathbf{E}$$

によって定義される。したがって、 $(p(\underline{a}))^{\mathfrak{A}}$ は、 $a \in \mathbf{E}$ 、すなわち「 a は偶数である」を表すことになる。 $a = 2$ であれば、 $(p(\underline{2}))^{\mathfrak{A}}$ は、 $2 \in \mathbf{E}$ 、すなわち「 2 は偶数である」を表すことになる。ただし、 $\forall xP(x), \exists xP(x)$ についての帰納的定義

- $\mathfrak{A} \models \forall x P(x) \Leftrightarrow$ すべての $a \in U$ に対して、 $\mathfrak{A} \models P(\underline{a})$
- $\mathfrak{A} \models \exists x P(x) \Leftrightarrow$ ある $a \in U$ が存在して、 $\mathfrak{A} \models P(\underline{a})$

における変数 a の選び方は一意でなく、この選び方により $P^{\mathfrak{A}}$ は一意には定まらない。

論理式 P が閉論理式でない場合は、 P が SNK 証明図 \mathcal{P} に現れる場合のみを考え、次のように $P^{\mathfrak{A}}$ を定める。 \mathcal{P} に自由に出現する変数を全部集めて、重複なしに並べたものを x_1, x_2, \dots, x_n とする。これに応じて、 U を任意に動く、異なる n 個の変数 a_1, a_2, \dots を与える。これらを、 $x_1^{\mathfrak{A}, \mathcal{P}}, x_2^{\mathfrak{A}, \mathcal{P}}, \dots, x_n^{\mathfrak{A}, \mathcal{P}}$ とおく。そして、 P の x_1, x_2, \dots, x_n に $\underline{a_1}, \underline{a_2}, \dots, \underline{a_n}$ を代入した結果を $c(P)$ とおき、これを用いて、 $P^{\mathfrak{A}}$ を

$$P^{\mathfrak{A}} = (c(P))^{\mathfrak{A}}$$

と定義する。

1 節の最後に述べたこと、すなわち、「実際の証明との対応を考えると、実際の証明が行われる理論における定義を体系 SNK に反映させる」ことも明確にしておこう。

論理式 P_1, P_2 が与えられたとする。対象としている理論 \mathcal{T} において、文 $P_1^{\mathfrak{A}}$ が文 $P_2^{\mathfrak{A}}$ により定義されているときは、

$$\frac{P_2, \Gamma \rightarrow Q}{P_1, \Gamma \rightarrow Q} (Def) \quad \frac{\Gamma \rightarrow P_2}{\Gamma \rightarrow P_1} (Def)$$

を SNK 推論規則に追加する。また、対象としている理論 \mathcal{T} において、文 $P_1^{\mathfrak{A}}$ が (成り立つと) 定義されているときは、

$$\rightarrow P_1$$

を SNK 公理に追加する。素朴集合論での例を挙げると、

- 文「 $A \subseteq B$ 」が文「すべての a に対して、 $a \in A$ ならば $a \in B$ 」により定義されている
- 文「どの a も \emptyset に属さない」が (成り立つと) 定義されている

などがある。

これで目標を明確にかくための準備ができた。目標は、閉論理式からなるシークエント $P_1, \dots, P_n \rightarrow P$ を終式とする SNK 証明図が与えられたとき、 $P_1^{\mathfrak{A}}, \dots, P_n^{\mathfrak{A}}$ から $P^{\mathfrak{A}}$ を導く証明を作る手続きを示すことである。この手続きは、実際に、 n 個の仮定 S_1, S_2, \dots, S_n から文 S を導く証明を作るのに適用できる。ただし、前提として、 S_i, S は、 $P_i^{\mathfrak{A}} = S_i, P^{\mathfrak{A}} = S$ を満たす論理式 P_i, P が存在するように書き換えられているとする。この P_i, P を用いると、 $P_1, \dots, P_n \rightarrow P$ の SNK 証明図から、この手続きによって、目的の証明を得ることができる。

以下に、その手続きを示す。 $P_1, \dots, P_n \rightarrow P$ を終式とする SNK 証明図 \mathcal{P} が与えられたとし、手続きは次の 4 つのステップで構成する。ここでは、 $(\rightarrow \forall_2), (\rightarrow \forall \supset)$ も SNK 推論規則として考える。

Step 1: \mathcal{P} に現れる各シークエントの左辺と右辺に、実際の文 (複数の場合も 0 個の場合もある) を対応させる。

Step 2: Step 1 の文を並べる。その順序は、 \mathcal{P} の各シークエントの左辺と右辺を、 \mathcal{P} の終式左辺から終式右辺まで反時計回りにたどる順とする。

Step 3: $(\rightarrow \wedge), (\vee \rightarrow), (\rightarrow \supset), (\rightarrow \neg), (\rightarrow \forall), (\exists \rightarrow), (RAA), (\rightarrow \vee_2), (\rightarrow \forall \supset)$, の各上式に対して、左辺に対応する文から右辺に対応する文までを、文のかたまりとしてとらえる。

Step 4: Step 3 の文のかたまりを段落とするなど、文のかたまりがわかるように工夫する。また、その他の表現をなめらかにする。

Step 2, Step 3 は機械的に行うことができる。Step 4 の詳細は、次節で具体例にそって述べる。以下に、Step 1 の詳細を示す。

Step 1 では、次の 3 種類

- \mathcal{P} の終式の左辺
- \mathcal{P} の各推論規則における、上式の左辺と下式の右辺
- \mathcal{P} の始式の右辺

の各々の左辺・右辺に、実際の文を対応させればよい。具体的には、以下のように対応させる。以下において、左辺については左辺の左側に、右辺については右辺の右側に、対応する文を示す。文がないときは、対応させないということである。また、表現「(\dots より、)」は「 \dots 」を述べなくてもその内容が明らかなきは、簡単に「よって、」と表現し、そうでないときは、そのまま“(”と“)”をはずす。(Def)における「(\dots と)」も同様である。表現「(\dots を示す。)」, 「(\dots を示せばよい。)」は目標を述べてわかりやすくするためのもので、省略もできる。省略しないときは、そのまま、“(”と“)”をはずす。

終式:

$$[P_1^{\exists}, \dots, P_n^{\exists} \text{を仮定する。}] \quad P_1, \dots, P_n \rightarrow Q$$

$(\wedge \rightarrow)$:

$$\frac{P, Q, \Gamma \rightarrow R}{P \wedge Q, \Gamma \rightarrow R}$$

$(\vee \rightarrow)$:

$$\frac{[P^{\exists} \text{のとき:}] \quad P, \Gamma \rightarrow R \quad [Q^{\exists} \text{のとき:}] \quad Q, \Gamma \rightarrow R}{P \vee Q, \Gamma \rightarrow R} \quad \begin{array}{l} \text{[[いずれの場合も } R^{\exists} \text{ なので、} \\ (P \vee Q)^{\exists} \text{ より、) } R^{\exists} \text{ である。]} \end{array}$$

$(\supset \rightarrow)$:

$$\frac{\Gamma \rightarrow P \quad [P^{\exists} \text{ と } (P \supset Q)^{\exists} \text{ より、} Q^{\exists} \text{ である。}] \quad Q, \Gamma \rightarrow R}{P \supset Q, \Gamma \rightarrow R}$$

$(\neg \rightarrow)$:

$$\frac{\Gamma \rightarrow P}{\neg P, \Gamma \rightarrow \perp} \quad [P^{\exists} \text{ は } (\neg P)^{\exists} \text{ に矛盾する。}]$$

$(\forall \rightarrow)$:

$$\frac{[[(\forall x P(x))^{\exists} \text{ より、) } (P(t))^{\exists} \text{ である。}] \quad P(t), \Gamma \rightarrow Q}{\forall x P(x), \Gamma \rightarrow Q}$$

($\exists \rightarrow$):²

[[$(P(\underline{a}))^{\exists}$ を満たす a を任意にとる。] $\frac{P(z), \Gamma \rightarrow Q}{\exists x P(x), \Gamma \rightarrow Q}$ [[$(P(\underline{a}))^{\exists}$ を満たす任意の a で Q^{\exists} なので、 $(\exists x P(x))^{\exists}$ より、 Q^{\exists} である。]]

ただし、 $z^{\exists, P} = a$ である。

($w \rightarrow$):

$$\frac{\Gamma \rightarrow Q}{P, \Gamma \rightarrow Q}$$

($\rightarrow \wedge$):

[[まず、 P^{\exists} を示す。]] $\frac{\Gamma \rightarrow P \quad [(*)] \Gamma \rightarrow Q}{\Gamma \rightarrow P \wedge Q}$ [[P^{\exists} と Q^{\exists} より、 $(P \wedge Q)^{\exists}$ である。]]

ただし、 $(*)$ は「次に、 Q^{\exists} を示す。」である。

($\rightarrow \vee$):

$$\frac{\Gamma \rightarrow P_i}{\Gamma \rightarrow P_1 \vee P_2} \quad [(P_i^{\exists} \text{ より、}) (P_1 \vee P_2)^{\exists} \text{ である。}]$$

($\rightarrow \supset$):

[P^{\exists} を仮定する。] $\frac{P, \Gamma \rightarrow Q}{\Gamma \rightarrow P \supset Q}$ [よって、 $(P \supset Q)^{\exists}$ である。]

($\rightarrow \neg$):

[P^{\exists} を仮定する。] $\frac{P, \Gamma \rightarrow \perp}{\Gamma \rightarrow \neg P}$ [よって、 $(\neg P)^{\exists}$ である。]

($\rightarrow \forall$):

[任意に a が与えられたとする。
[[$(P(\underline{a}))^{\exists}$ を示す。]] $\frac{\Gamma \rightarrow P(z)}{\Gamma \rightarrow \forall x P(x)}$ [よって、 $(\forall x P(x))^{\exists}$ である。]]

ただし、 $z^{\exists, P} = a$ である。

($\rightarrow \exists$):

$$\frac{\Gamma \rightarrow P(t)}{\Gamma \rightarrow \exists x P(x)} \quad [(P(t)^{\exists} \text{ より、}) (\exists x P(x))^{\exists} \text{ である。}]$$

²実際の証明では、この対応による表現は少ないが、ここでは、SNK 推論規則を忠実に反映した表現になるような対応を選んだ。よく見る表現になるような対応は、次の対応である。この対応を選ぶ場合は、($\exists \rightarrow$) を Step 3 の対象から除いて考える。

対応: $(\exists x P(x))^{\exists}$ において、 x の役目をする変数が a であれば、文を対応させず、 a と異なる b であれば、上式の左辺に、文「 \dots を満たす b を a とおく」を対応させる。

(*RAA*):

$$[(-P^{\mathfrak{A}}) \text{ を仮定する。}] \frac{\neg P, \Gamma \rightarrow \perp}{\Gamma \rightarrow P} \quad [\text{よって、} P^{\mathfrak{A}} \text{ である。}]$$

(*cut*):

$$[(\text{ここで、} Q^{\mathfrak{A}} \text{ を示す。})] \frac{\Gamma \rightarrow Q \quad Q, \Gamma \rightarrow P}{\Gamma \rightarrow P}$$

($\rightarrow \vee_2$):

$$[(P \vee Q)^{\mathfrak{A}} \text{ の否定、すなわち、} \\ (P^*)^{\mathfrak{A}} \text{ と } (Q^*)^{\mathfrak{A}} \text{ を仮定する。}] \frac{P^*, Q^*, \Gamma \rightarrow \perp}{\Gamma \rightarrow P \vee Q} \quad [\text{よって、} (P \vee Q)^{\mathfrak{A}} \text{ である。}]$$

($\rightarrow \forall \supset$):

$$[(P(\underline{a}))^{\mathfrak{A}} \text{ を満たす } a \text{ が任} \\ \text{意に与えられたとする。} \\ ((Q(\underline{a}))^{\mathfrak{A}} \text{ を示す。})] \frac{P(z), \Gamma \rightarrow Q(z)}{\Gamma \rightarrow \forall x(P(x) \supset Q(x))} \quad [\text{よって、} (\forall x(P(x) \supset Q(x)))^{\mathfrak{A}} \text{ である。}]$$

ただし、 $z^{\mathfrak{A}, \mathcal{P}} = a$ である。 $(P(\underline{a}))^{\mathfrak{A}}$ が「 $a \in A$ 」の形のときは、上式左辺に対応する第 1 の文を「任意に $a \in A$ が与えられたとする。」とする。

(*Def*):

$$[(P_1^{\mathfrak{A}} \text{ と}) \text{ 定義より、} P_2^{\mathfrak{A}} \text{ である。}] \frac{P_2 \Gamma \rightarrow Q}{P_1, \Gamma \rightarrow Q}$$

$$[(\text{定義より、} P_2^{\mathfrak{A}} \text{ を示せばよい。})] \frac{\Gamma \rightarrow P_2}{\Gamma \rightarrow P_1} \quad [(P_2^{\mathfrak{A}} \text{ と}) \text{ 定義より、} P_1^{\mathfrak{A}} \text{ である。}]$$

始式 ($P \rightarrow P$): この始式から終式まで、 \mathcal{P} のシークエントを下向きにたどっていったとき、現れるシークエントの左辺に対応する文に「 $R^{\mathfrak{A}}$ である。」という主張 (「 $R^{\mathfrak{A}}$ を仮定する」とは区別する) があるとき、対応する文はない。その主張がないときは以下のとおりである。

$$P \rightarrow P \quad [\text{よって、} P^{\mathfrak{A}} \text{ である。}]$$

定義による始式 ($\rightarrow P_1$):

$$\rightarrow P_1 \quad [\text{定義より、} P_1^{\mathfrak{A}} \text{ である。}]$$

3 具体例

この節では、素朴集合論を対象とし、前節で導入した手続きで、実際に証明を作成する。また、その手続きの Step 4 の詳細も、これらの具体例にそって述べる。

まず、構造 \mathfrak{A} を決めておく。対象領域 U は、全体集合とする。そして、証明したい文に現れる述語に解釈される述語記号を決めておく。具体的には、集合 A に対して、「 A に属する」と解釈される 1 変数の述語記号 “ $\in A$ ” (引数は左側にかく)、および集合 A, B に対して、「 $A \subseteq B$ 」と解釈さ

れる 0 変数の述語記号 “ $A \subseteq B$ ” を導入する。これらは、述語記号としても素朴集合論の記号と同じ記号を用いることになる。すなわち、2 つの論理式 $a \in A, A \subseteq B$ に対し、 $(a \in A)^{\mathfrak{A}}, (A \subseteq B)^{\mathfrak{A}}$ は、それぞれ、この理論における 2 つの文 $a \in A, A \subseteq B$ を表す。また、この理論における同値性

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \text{すべての } a \text{ に対して、} a \in A \text{ ならば } a \in B$$

$$a \in A \cap B \Leftrightarrow a \in A \text{ かつ } a \in B$$

$$a \in A \cup B \Leftrightarrow a \in A \text{ または } a \in B$$

$$a \in A - B \Leftrightarrow a \in A \text{ かつ } a \notin B$$

を、左辺を右辺で定義すると解釈して、推論規則 (*Def*) を SNK 推論規則に追加しておく。

具体例を示す。証明する文は以下である。 A, B, C は U の任意の部分集合である。(7) と (8) は、論理式に対応した表現にするために、日本語としてあまり見られない表現になっている。本来の表現は括弧内に示してある。

- (1) $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ ならば、 $A \subseteq C$
- (2) $A \subseteq B$ ならば $A \cap C \subseteq B \cap C$
- (3) $A \subseteq B$ ならば $A - C \subseteq B \cup C$
- (4) $A \cup B \subseteq A \cap B$ ならば $A \subseteq B$
- (5) $A \subseteq B$ かつ $A \subseteq C$ ならば、 $A \subseteq B \cap C$
- (6) $A \subseteq C$ かつ $B \subseteq C$ ならば、 $A \cup B \subseteq C$
- (7) $A \subseteq B$ ならば、「ある b が存在して $b \in A - B$ 」でない
($A \subseteq B$ ならば、 $A - B$ に要素はない)
- (8) 「ある b が存在して $b \in A - B$ 」でないならば、 $A \subseteq B$
($A - B$ に要素がないならば、 $A \subseteq B$)
- (9) $A \subseteq B$ ならば、すべての b に対して、 $b \notin A$ または $b \in B$

以下に、上のそれぞれに対する、

- I. SNK 証明図 \mathcal{P}
- II. 対応する文
- III. 実際の証明

を示す。I において、 \mathcal{P} の各シーケントの左辺と右辺には、II の対応する文との対応を示すための番号を記してある。また、 \mathcal{P} は、 $(\wedge \rightarrow)$ と $(w \rightarrow)$ を適宜省略して示す。 $(\wedge \rightarrow)$ と $(w \rightarrow)$ には、対応する文がないので、省略してもこの手続きを妨げることはない。II では、前節の Step 1 と Step 2 を行う。対応する文は、I の \mathcal{P} の形で並べてある。文についての番号が、実際の証明を作るときに並べる順序を示している。また、 $z^{\mathfrak{A}, \mathcal{P}} = a$ としておく。III では、前節の Step 3 と Step 4 を行う。II, III における「ならば」は「 \Rightarrow 」と表現することもある。

- (1) $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ ならば、 $A \subseteq C$

I. SNK 証明図

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{[11] \quad z \in B \rightarrow z \in B \quad [12] \quad [13] z \in C \rightarrow z \in C \quad [14]}{[10] \quad z \in B, z \in B \supset z \in C \rightarrow z \in C \quad [15]}{[9] \quad z \in B, \forall x(x \in B \supset x \in C) \rightarrow z \in C \quad [16]}{[6] \quad z \in A \rightarrow z \in A \quad [7] \quad [8] \quad z \in B, B \subseteq C \rightarrow z \in C \quad [17]}{[5] \quad z \in A, z \in A \supset z \in B, B \subseteq C \rightarrow z \in C \quad [18]}{[4] \quad z \in A, \forall x(x \in A \supset x \in B), B \subseteq C \rightarrow z \in C \quad [19]}{[3] \quad z \in A, A \subseteq B, B \subseteq C \rightarrow z \in C \quad [20]}{[2] \quad A \subseteq B, B \subseteq C \rightarrow \forall x(x \in A \supset x \in C) \quad [21]}{[1] \quad A \subseteq B, B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C \quad [22]}
 }{(\supset \rightarrow)}
 }{(\forall \rightarrow)}
 }{(Def.)}
 }{(\supset \rightarrow)}
 }{(\forall \rightarrow)}
 }{(Def.)}
 }{(\rightarrow \forall \supset)}
 }{(Def.)}
 \end{array}$$

II. 対応する文

[13] $a \in B \Rightarrow a \in C$ と $a \in B$ より、 $a \in C$ である	[14] –
[11, 12] –	
[10] よって、 $a \in B \Rightarrow a \in C$ である	[15] –
[9] $B \subseteq C$ と定義より、(1.3) である	[16] –
[8] $a \in A \Rightarrow a \in B$ と $a \in A$ より、 $a \in B$ である	[17] –
[6, 7] –	
[5] よって、 $a \in A \Rightarrow a \in B$ である	[18] –
[4] $A \subseteq B$ と定義より、(1.2) である	[19] –
[3] 任意に $a \in A$ が与えられたとする	[20] –
[2] 定義より、(1.1) を示せばよい	[21] よって、(1.1) である
[1] $A \subseteq B$ と $B \subseteq C$ を仮定する	[22] 定義より、 $A \subseteq C$ である

ただし、(1.1),(1.2),(1.3) はそれぞれ、

- (1.1): すべての a に対して、 $a \in A \Rightarrow a \in C$
- (1.2): すべての a_1 に対して、 $a_1 \in A \Rightarrow a_1 \in B$
- (1.3): すべての a_1 に対して、 $a_1 \in B \Rightarrow a_1 \in C$

を表す。

III. 実際の証明

前節の Step 3, Step 4 にそって述べる。Step 3 による文のかたまりは、[3] ~ [20] である。したがって、まず、II の文を順に並べて、3つの段落 [1] ~ [2], [3] ~ [20], [21] ~ [22] に区切る。これに、Step 4 の操作である、文に番号を付けるなどの表現の変更を行うと、以下ようになる。

(1) の証明. $A \subseteq B$ と $B \subseteq C$ を仮定する。定義より、

$$\text{すべての } a \text{ に対して、} a \in A \Rightarrow a \in C \quad (1.1)$$

を示せばよい。

任意に $a \in A$ が与えられたとする。 $A \subseteq B$ と定義より、「すべての a_1 に対して、 $a_1 \in A \Rightarrow a_1 \in B$ 」である。よって、 $a \in A \Rightarrow a \in B$ である。 $a \in A \Rightarrow a \in B$ と $a \in A$ より、 $a \in B$ である。 $B \subseteq C$ と定義より、「すべての a_1 に対して、 $a_1 \in B \Rightarrow a_1 \in C$ 」である。よって、 $a \in B \Rightarrow a \in C$ である。 $a \in B \Rightarrow a \in C$ と $a \in B$ より、 $a \in C$ である。

よって、(1.1) がいえる。定義より、 $A \subseteq C$ である。

(2) $A \subseteq B$ ならば $A \cap C \subseteq B \cap C$

I. SNK 証明図

[9] $z \in A \rightarrow z \in A$ [10] [11] $z \in B \rightarrow z \in B$ [12]	$(\supset \rightarrow)$
[8] $z \in A, z \in A \supset z \in B \rightarrow z \in B$ [13]	$(\forall \rightarrow)$
[7] $z \in A, \forall x(x \in A \supset x \in B) \rightarrow z \in B$ [14]	$(Def.)$
[6] $z \in A, A \subseteq B \rightarrow z \in B$ [15]	
[5] $z \in A, z \in C, A \subseteq B \rightarrow z \in B \wedge z \in C$ [18]	$(\rightarrow \wedge)$
[4] $z \in A, z \in C, A \subseteq B \rightarrow z \in B \cap C$ [19]	(Def)
[3] $z \in A \cap C, A \subseteq B \rightarrow z \in B \cap C$ [20]	$(\rightarrow \forall \supset)$
[2] $A \subseteq B \rightarrow \forall x(x \in A \cap C \supset x \in B \cap C)$ [21]	$(Def.)$
[1] $A \subseteq B \rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$ [22]	

II. 対応する文

[11] $a \in A \Rightarrow a \in B$ と $a \in A$ より、 $a \in B$ である	[12] –
[9, 10] –	
[8] よって、 $a \in A \Rightarrow a \in B$ である	[13] –
[7] $A \subseteq B$ と定義より、(2.2) である	[14] –
[6] $a \in B$ を示す	[15, 16, 17] –
[5] 定義より、 $a \in B$ かつ $a \in C$ を示せばよい	[18] $a \in B$ と $a \in C$ より、 $a \in B$ かつ $a \in C$ である
[4] 定義より、 $a \in A$ であり、 $a \in C$ である	[19] 定義より、 $a \in B \cap C$ である
[3] 任意に $a \in A \cap C$ が与えられたとする	[20] –
[2] 定義より、(2.1) を示せばよい	[21] よって、(2.1) である
[1] $A \subseteq B$ を仮定する	[22] 定義より、 $A \cap C \subseteq B \cap C$ である

ただし、(2.1),(2.2) はそれぞれ、

(2.1): すべての a に対して、 $a \in A \cap C \Rightarrow a \in B \cap C$

(2.2): すべての a_1 に対して、 $a_1 \in A \Rightarrow a_1 \in B$

を表す。

III. 実際の証明

前節の Step 3, Step 4 にそって述べる。Step 3 による文のかたまりは、形式的には3つ、すなわち、[3]~[20]、[6]~[15]、[16]~[17] である。しかし、第3のかたまりには対応する文はないので、第1のかたまりのみを対象として、段落分けを行っても、Step 4 の調整で最初の2つのかたまりを表現できる。具体的には、II の文を順に並べて、3つの段落 [1]~[2], [3]~[20],[21]~[22] に区切り、これに、Step 4 の操作を行って、以下の表現を得る。

(2) の証明. $A \subseteq B$ を仮定する。定義より、

$$\text{すべての } a \text{ に対して、} a \in A \cap C \Rightarrow a \in B \cap C \quad (2.1)$$

を示せばよい。

任意に $a \in A \cap C$ が与えられたとする。定義より、 $a \in A$ であり、 $a \in C$ である。また、 $a \in B$ かつ $a \in C$ を示せばよい。 $a \in B$ を示す。 $A \subseteq B$ と定義より、「すべての a_1 に対して、 $a_1 \in A \Rightarrow a_1 \in B$ 」である。よって、 $a \in A \Rightarrow a \in B$ である。 $a \in A \Rightarrow a \in B$ と $a \in A$ より、 $a \in B$ である。 $a \in C$ だったので、 $a \in B$ かつ $a \in C$ である。定義より、 $a \in B \cap C$ である。

よって、(2.1) がいえる。よって、 $A \cap C \subseteq B \cap C$ である。

(3) $A \subseteq B$ ならば $A - C \subseteq B \cup C$

I. SNK 証明図

$$\begin{array}{c}
 \frac{[11] \ z \in B \rightarrow z \in B \quad [12]}{[10] \ z \in B \rightarrow z \in B \vee z \in C} \quad [13] \quad (\rightarrow \vee) \\
 \frac{[7] \ z \in A \rightarrow z \in A \quad [8] \quad \frac{[9] \ z \in B \rightarrow z \in B \cup C \quad [14]}{[6] \ z \in A, z \in A \supset z \in B \rightarrow z \in B \cup C} \quad [15] \quad (\supset \rightarrow)}{[5] \ z \in A, \neg(z \in C), \forall x(x \in A \supset x \in B) \rightarrow z \in B \cup C} \quad [16] \quad (\forall \rightarrow) \\
 \frac{[4] \ z \in A, \neg(z \in C), A \subseteq B \rightarrow z \in B \cup C \quad [17]}{[3] \ z \in A - C, A \subseteq B \rightarrow z \in B \cup C} \quad [18] \quad (Def.) \\
 \frac{[2] \ A \subseteq B \rightarrow \forall x(x \in A - C \supset x \in B \cup C) \quad [19]}{[1] \ A \subseteq B \rightarrow A - C \subseteq B \cup C} \quad [20] \quad (\rightarrow \forall \supset) \quad (Def.)
 \end{array}$$

II. 対応する文

[11] -	[12] -
[10] -	[13] よって、 $a \in B$ または $a \in C$ である
[9] $a \in A \Rightarrow a \in B$ と $a \in A$ より、 $a \in B$ である	[14] 定義より、 $a \in B \cup C$ である
[7-8] -	
[6] よって、 $a \in A \Rightarrow a \in B$ である	[15] -
[5] $A \subseteq B$ と定義より、(3.2) である	[16] -
[4] 定義より、 $a \in A$ であり、 $a \notin C$ である	[17] -
[3] 任意に $a \in A - C$ が与えられたとする	[18] -
[2] 定義より、(3.1) を示せばよい	[19] よって、(3.1) である
[1] $A \subseteq B$ を仮定する	[20] 定義より、 $A - C \subseteq B \cup C$ である

ただし、(3.1),(3.2) はそれぞれ、

(3.1): すべての a に対して、 $a \in A - C \Rightarrow a \in B \cup C$

(3.2): すべての a_1 に対して、 $a_1 \in A \Rightarrow a_1 \in B$

を表す。

III. 実際の証明

(1) と同様に、II の文を順に並べて、3 つの段落 [1] ~ [2], [3] ~ [18], [19] ~ [20] に区切れればよい。具体的な表現は省略する。

(4) $A \cup B \subseteq A \cap B$ ならば $A \subseteq B$

I. SNK 証明図

[8] $z \in A \rightarrow z \in A$ [9]	$(\rightarrow \vee)$	[14] $z \in B \rightarrow z \in B$ [15]	$(\wedge \rightarrow)$
[7] $z \in A \rightarrow z \in A \vee z \in B$ [10]	(Def)	[13] $z \in A \wedge z \in B \rightarrow z \in B$ [16]	(Def)
[6] $z \in A \rightarrow z \in A \cup B$ [11]		[12] $z \in A \cap B \rightarrow z \in B$ [17]	$(\supset \rightarrow)$
[5] $z \in A, z \in A \cup B \supset z \in A \cap B \rightarrow z \in B$ [18]			
$(\forall \rightarrow)$			
[4] $z \in A, \forall x(x \in A \cup B \supset x \in A \cap B) \rightarrow z \in B$ [19]	$(Def.)$		
[3] $z \in A, A \cup B \subseteq A \cap B \rightarrow z \in B$ [20]			
$(\rightarrow \forall \supset)$			
[2] $A \cup B \subseteq A \cap B \rightarrow \forall x(x \in A \supset x \in B)$ [21]	$(Def.)$		
[1] $A \cup B \subseteq A \cap B \rightarrow A \subseteq B$ [22]			

II. 対応する文

[14] –	[15] –
[13] よって、 $a \in A$ かつ $a \in B$ である	[16] –
[12] $a \in A \cup B \Rightarrow a \in A \cap B$ と $a \in A \cup B$ より、 $a \in A \cap B$ である	[17] –
[8] –	[9] –
[7] –	[10] よって、 $a \in A$ または $a \in B$ である
[6] –	[11] よって、 $a \in A \cup B$ である
[5] よって、 $a \in A \cup B \Rightarrow a \in A \cap B$ である	[18] –
[4] $A \cup B \subseteq A \cap B$ と定義より、(4.2) である	[19] –
[3] 任意に $a \in A$ が与えられたとする	[20] –
[2] 定義より、(4.1) を示せばよい	[21] よって、(4.1) である
[1] $A \cup B \subseteq A \cap B$ を仮定する	[22] 定義より、 $A \subseteq B$ である

ただし、(4.1),(4.2) はそれぞれ、

(4.1): すべての a に対して、 $a \in A \Rightarrow a \in B$

(4.2): すべての a_1 に対して、 $a_1 \in A \cup B \Rightarrow a_1 \in A \cap B$

を表す。

III. 実際の証明

(1) と同様に、II の文を順に並べて、3 つの段落 [1] ~ [2], [3] ~ [20], [21] ~ [22] に区切れればよい。具体的な表現は省略する。

(5) $A \subseteq B$ かつ $A \subseteq C$ ならば、 $A \subseteq B \cap C$

(5) に対しては 2 つの SNK 証明図を示し、それぞれについて、II と III を示す。結果として、SNK 証明図によって、実際の証明の表現しやすさが異なることがわかる。すなわち、証明の形によって、実際の証明の表現しやすさが異なることがわかる。

IA. SNK 証明図 (対応する文がない場所の番号は省いた)

$$\begin{array}{c}
 \frac{z \in A \rightarrow z \in A \quad [8] \quad z \in B \rightarrow z \in B}{[7] \quad z \in A, z \in A \supset z \in B \rightarrow z \in B} (\supset \rightarrow) \quad \frac{z \in A \rightarrow z \in A \quad [12] \quad z \in C \rightarrow z \in C}{[11] \quad z \in A, z \in A \supset z \in C \rightarrow z \in C} (\supset \rightarrow) \\
 \frac{[6] \quad z \in A, \forall x(x \in A \supset x \in B) \rightarrow z \in B}{[5] \quad z \in A, A \subseteq B \rightarrow z \in B} (\forall \rightarrow) \quad \frac{[10] \quad z \in A, \forall x(x \in A \supset x \in C) \rightarrow z \in C}{[9] \quad z \in A, A \subseteq C \rightarrow z \in C} (\forall \rightarrow) \\
 \frac{[4] \quad z \in A, A \subseteq B, A \subseteq C \rightarrow z \in B \wedge z \in C \quad [13]}{[3] \quad z \in A, A \subseteq B, A \subseteq C \rightarrow z \in B \cap C} (Def) \\
 \frac{[2] \quad A \subseteq B, A \subseteq C \rightarrow \forall x(x \in A \supset x \in B \cap C) \quad [14]}{[1] \quad A \subseteq B, A \subseteq C \rightarrow A \subseteq B \cap C} (\rightarrow \forall \supset) \quad [15] \\
 \frac{[1] \quad A \subseteq B, A \subseteq C \rightarrow A \subseteq B \cap C \quad [16]}{[1] \quad A \subseteq B, A \subseteq C \rightarrow A \subseteq B \cap C} (Def.)
 \end{array}$$

IIA. 対応する文

- [12] $a \in A \Rightarrow a \in C$ と $a \in A$ より、 $a \in C$ である
 [11] よって、 $a \in A \Rightarrow a \in C$ である
 [10] $A \subseteq C$ と定義より、(5.3) である
 [9] $a \in C$ を示す
 [8] $a \in A \Rightarrow a \in B$ と $a \in A$ より、 $a \in B$ である
 [7] よって、 $a \in A \Rightarrow a \in B$ である
 [6] $A \subseteq B$ と定義より、(5.2) である
 [5] $a \in B$ を示す
 [4] 定義より、 $a \in B$ かつ $a \in C$ を示せばよい [13] $a \in B$ と $a \in C$ より、 $a \in B$ かつ
 $a \in C$ である
 [3] 任意に $a \in A$ が与えられたとする [14] 定義より、 $a \in B \cap C$ である
 [2] 定義より、(5.1) を示せばよい [15] よって、(5.1) である
 [1] $A \subseteq B, A \subseteq C$ を仮定する [16] 定義より、 $A \subseteq B \cap C$ である

ただし、(5.1),(5.2),(5.3) はそれぞれ、

(5.1): すべての a に対して、 $a \in A \Rightarrow a \in B \cap C$

(5.2): すべての a_1 に対して、 $a_1 \in A \Rightarrow a_1 \in B$

(5.3): すべての a_1 に対して、 $a_1 \in A \Rightarrow a_1 \in C$

を表す。

IIIA. 実際の証明

前節の Step 3, Step 4 にそって述べる。Step 3 による文のかたまりは 3 つ、すなわち、[3] ~ [14]、[5] ~ [8]、[9] ~ [10] である。この区切りで段落分けを行うと第 1 のかたまりが不明確になる。そこで、Step 4 の操作で 3 つのかたまりがわかるよう工夫する必要がある。ここでは、以下の工夫を行った結果を示す。

- 第 2, 第 3 の文のかたまりに番号をつける。
- 第 1 の文のかたまりの終わりを明確にする。
- 第 2, 第 3 の文のかたまりの終わりを明確にする。
- 第 2, 第 3 の文のかたまりの部分を別に証明しておき、実質的に、そのかたまりを 1 文で表現する。

他に、第3のかたまりを、「同様に」などを用いて簡略化する工夫、これらを組み合わせる工夫などがある。

(5) の証明 A1. $A \subseteq B, A \subseteq C$ を仮定する。定義より、

$$\text{すべての } a \text{ に対して、} a \in A \Rightarrow a \in B \cap C \quad (5.1)$$

を示せばよい。

任意に $a \in A$ が与えられたとする。定義より、 $a \in B$ かつ $a \in C$ を示せばよい。

(i) $a \in B$ を示す。 $A \subseteq B$ と定義より、「すべての a_1 に対して、 $a_1 \in A \Rightarrow a_1 \in B$ 」である。よって、 $a \in A \Rightarrow a \in B$ である。 $a \in A \Rightarrow a \in B$ と $a \in A$ より、 $a \in B$ である。

(ii) $a \in C$ を示す。 $A \subseteq C$ と定義より、「すべての a_1 に対して、 $a_1 \in A \Rightarrow a_1 \in C$ 」である。よって、 $a \in A \Rightarrow a \in C$ である。 $a \in A \Rightarrow a \in C$ と $a \in A$ より、 $a \in C$ である。

(i),(ii) より、 $a \in B$ かつ $a \in C$ である。定義より、 $a \in B \cap C$ である。

よって、(5.1) がいえる。定義より、 $A \subseteq B \cap C$ である。

(5) の証明 A2. $A \subseteq B, A \subseteq C$ を仮定する。定義より、

$$\text{すべての } a \text{ に対して、} a \in A \Rightarrow a \in B \cap C \quad (5.1)$$

を示せばよい。任意に $a \in A$ が与えられたとする。定義より、 $a \in B$ かつ $a \in C$ を示せばよい。

まず、 $a \in B$ を示す。 $A \subseteq B$ と定義より、「すべての a_1 に対して、 $a_1 \in A \Rightarrow a_1 \in B$ 」である。よって、 $a \in A \Rightarrow a \in B$ である。 $a \in A \Rightarrow a \in B$ と $a \in A$ より、 $a \in B$ である。

次に、 $a \in C$ を示す。 $A \subseteq C$ と定義より、「すべての a_1 に対して、 $a_1 \in A \Rightarrow a_1 \in C$ 」である。よって、 $a \in A \Rightarrow a \in C$ である。 $a \in A \Rightarrow a \in C$ と $a \in A$ より、 $a \in C$ である。

以上より、 $a \in B$ かつ $a \in C$ である。定義より、 $a \in B \cap C$ である。 a は任意であったので、(5.1) がいえる。定義より、 $A \subseteq B \cap C$ である。

(5) の証明 A3. $A \subseteq B, A \subseteq C$ を仮定する。定義より、

$$\text{すべての } a \text{ に対して、} a \in A \Rightarrow a \in B \cap C \quad (5.1)$$

を示せばよい。

任意に $a \in A$ が与えられたとする。定義より、 $a \in B$ かつ $a \in C$ を示せばよい。まず、 $a \in B$ を示す。 $A \subseteq B$ と定義より、「すべての a_1 に対して、 $a_1 \in A \Rightarrow a_1 \in B$ 」である。よって、 $a \in A \Rightarrow a \in B$ である。 $a \in A \Rightarrow a \in B$ と $a \in A$ より、 $a \in B$ である。これで、 $a \in B$ が示された。次に、 $a \in C$ を示す。 $A \subseteq C$ と定義より、「すべての a_1 に対して、 $a_1 \in A \Rightarrow a_1 \in C$ 」である。よって、 $a \in A \Rightarrow a \in C$ である。 $a \in A \Rightarrow a \in C$ と $a \in A$ より、 $a \in C$ である。 $a \in C$ も示された。 $a \in B$ も $a \in C$ も示されたので、 $a \in B$ かつ $a \in C$ である。定義より、 $a \in B \cap C$ である。

よって、(5.1) がいえる。定義より、 $A \subseteq B \cap C$ である。

(5) の証明 A4. まず、

$$b \in D \text{ かつ } D \subseteq E \text{ ならば、} b \in E \quad (5.4)$$

を示す。 $b \in D$ と $D \subseteq E$ を仮定する。 $D \subseteq E$ と定義より、「すべての b_1 に対して、 $b_1 \in D \Rightarrow b_1 \in E$ 」である。よって、 $b \in D \Rightarrow b \in E$ である。 $b \in D \Rightarrow b \in E$ と $b \in D$ より、 $b \in E$ である。これで、(5.4) が示された。

次に、(5.4) を用いて、(5) を示す。 $A \subseteq B, A \subseteq C$ を仮定する。定義より、

$$\text{すべての } a \text{ に対して、} a \in A \Rightarrow a \in B \cap C \quad (5.1)$$

を示せばよい。

任意に $a \in A$ が与えられたとする。定義より、 $a \in B$ かつ $a \in C$ を示せばよい。 $a \in A, A \subseteq B, (5.4)$ より、 $a \in B$ である。また、 $a \in A, A \subseteq C, (5.4)$ より、 $a \in C$ である。よって、 $a \in B$ かつ $a \in C$ である。定義より、 $a \in B \cap C$ である。

よって、(5.1) がいえる。定義より、 $A \subseteq B \cap C$ である。

IB. SNK 証明図 (対応する文がない場所の番号は省いた)

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{z \in B \rightarrow z \in B \quad z \in C \rightarrow z \in C}{z \in B, z \in C \rightarrow z \in B \wedge z \in C} \quad [10] \quad (\rightarrow \wedge)}{z \in B, z \in C \rightarrow z \in B \cap C} \quad [11] \quad (Def)}{z \in A \rightarrow z \in A} \quad [9] \quad (\supset \rightarrow)}{z \in A, z \in B, z \in A \supset z \in C \rightarrow z \in B \cap C} \quad [8] \quad (\supset \rightarrow)}{z \in A, z \in B, \forall x(x \in A \supset x \in C) \rightarrow z \in B \cap C} \quad [7] \quad (\forall \rightarrow)}{z \in A, z \in B, A \subseteq C \rightarrow z \in B \cap C} \quad [6] \quad (Def)}{z \in A \rightarrow z \in A} \quad [5] \quad (\supset \rightarrow)}{z \in A, \forall x(x \in A \supset x \in B), A \subseteq C \rightarrow z \in B \cap C} \quad [4] \quad (\forall \rightarrow)}{z \in A, A \subseteq B, A \subseteq C \rightarrow z \in B \cap C} \quad [3] \quad (Def)}{A \subseteq B, A \subseteq C \rightarrow \forall x(x \in A \supset x \in B \cap C)} \quad [2] \quad (\rightarrow \forall \supset)}{A \subseteq B, A \subseteq C \rightarrow A \subseteq B \cap C} \quad [1] \quad [13] \quad (Def.)$$

IIB. 対応する文

- | | |
|---|---|
| | [10] $a \in B$ と $a \in C$ より、 $a \in B$ かつ $a \in C$ である |
| [9] $a \in A \Rightarrow a \in C$ と $a \in A$ より、 $a \in C$ である | [11] 定義より、 $a \in B \cap C$ である |
| [8] よって、 $a \in A \Rightarrow a \in C$ である | |
| [7] $A \subseteq C$ と定義より、(5.3) である | |
| [6] $a \in A \Rightarrow a \in B$ と $a \in A$ より、 $a \in B$ である | |
| [5] よって、 $a \in A \Rightarrow a \in B$ である | |
| [4] $A \subseteq B$ と定義より、(5.2) である | |
| [3] 任意に $a \in A$ が与えられたとする | |
| [2] 定義より、(5.1) を示せばよい | [12] よって、(5.1) である |
| [1] $A \subseteq B, A \subseteq C$ を仮定する | [13] 定義より、 $A \subseteq B \cap C$ である |
- ただし、(5.1),(5.2),(5.3) は IIA の文である。

IIIB. 実際の証明

前節の Step 3, Step 4 にそって述べる。Step 3 による文のかたまりは、形式的には 3 つあるが、そのうちの $(\rightarrow \wedge)$ の 2 つの上式に対応する 2 つのかたまりには、文はない。したがって、(1) と同様に、II の文を順に並べて、3 つの段落 [1] ~ [2], [3] ~ [11], [12] ~ [13] に区切れればよい。具体的な表

現は省略する。

(6) $A \subseteq C$ かつ $B \subseteq C$ ならば、 $A \cup B \subseteq C$

I. SNK 証明図 (対応する文がない場所の番号は省いた)

$$\begin{array}{c}
 \frac{z \in A \rightarrow z \in A \quad [8] \quad z \in C \rightarrow z \in C}{[7] \quad z \in A, z \in A \supset z \in C \rightarrow z \in C} (\supset \rightarrow) \quad \frac{z \in B \rightarrow z \in B \quad [12] \quad z \in C \rightarrow z \in C}{[11] \quad z \in B, z \in B \supset z \in C \rightarrow z \in C} (\supset \rightarrow) \\
 \frac{[6] \quad z \in A, \forall x(x \in A \supset x \in C) \rightarrow z \in C}{[5] \quad z \in A, A \subseteq C \rightarrow z \in C} (\forall \rightarrow) \quad \frac{[10] \quad z \in B, \forall x(x \in B \supset x \in C) \rightarrow z \in C}{[9] \quad z \in B, B \subseteq C \rightarrow z \in C} (\forall \rightarrow) \\
 \frac{[4] \quad z \in A \vee z \in B, A \subseteq C, B \subseteq C \rightarrow z \in C \quad [13]}{[3] \quad z \in A \cup B, A \subseteq C, B \subseteq C \rightarrow z \in C} (\vee \rightarrow) \\
 \frac{[2] \quad A \subseteq C, B \subseteq C \rightarrow \forall x(x \in A \cup B \supset x \in C) \quad [14]}{[1] \quad A \subseteq C, B \subseteq C \rightarrow A \cup B \subseteq C \quad [15]} (\rightarrow \forall \supset) \quad (Def.)
 \end{array}$$

II. 対応する文

[12] $a \in B \Rightarrow a \in C$ と $a \in B$ より、 $a \in C$ である

[11] よって、 $a \in B \Rightarrow a \in C$ である

[10] $B \subseteq C$ と定義より、(6.3) である

[9] $a \in B$ のとき:

[8] $a \in A \Rightarrow a \in C$ と $a \in A$ より、 $a \in C$ である

[7] よって、 $a \in A \Rightarrow a \in C$ である

[6] $A \subseteq C$ と定義より、(6.2) である

[5] $a \in A$ のとき:

[4] 定義より、 $a \in A$ または $a \in B$ である [13] いずれの場合も $a \in C$ なので、
 $a \in A$ または $a \in B$ より、 $a \in C$ である

[3] 任意に $a \in A \cup B$ が与えられたとする

[2] 定義より、(6.1) を示せばよい [14] よって、(6.1) である

[1] $A \subseteq C, B \subseteq C$ を仮定する [15] 定義より、 $A \cup B \subseteq C$ である

ただし、(6.1),(6.2),(6.3) はそれぞれ、

(6.1): すべての a に対して、 $a \in A \cup B \Rightarrow a \in C$

(6.2): すべての a_1 に対して、 $a_1 \in A \Rightarrow a_1 \in C$

(6.3): すべての a_1 に対して、 $a_1 \in B \Rightarrow a_1 \in C$

を表す。

III. 実際の証明

(5) の証明 A1 と同様に考えて、以下の表現を得る。

(6) の証明. $A \subseteq C, B \subseteq C$ を仮定する。定義より、

$$\text{すべての } a \text{ に対して、} a \in A \cup B \Rightarrow a \in C \quad (6.1)$$

を示せばよい。

任意に $a \in A \cup B$ が与えられたとする。定義より、 $a \in A$ または $a \in B$ である。

(i) $a \in A$ のとき: $A \subseteq C$ と定義より、「すべての a_1 に対して、 $a_1 \in A \Rightarrow a_1 \in C$ 」である。よって、 $a \in A \Rightarrow a \in C$ である。 $a \in A \Rightarrow a \in C$ と $a \in A$ より、 $a \in C$ である。

(ii) $a \in B$ のとき: $B \subseteq C$ と定義より、「すべての a_1 に対して、 $a_1 \in B \Rightarrow a_1 \in C$ 」である。よって、 $a \in B \Rightarrow a \in C$ である。 $a \in B \Rightarrow a \in C$ と $a \in B$ より、 $a \in C$ である。

(i),(ii) より、 $a \in C$ である。

よって、(6.1) がいえる。定義より、 $A \cup B \subseteq C$ である。

(7) $A \subseteq B$ ならば、「ある b が存在して $b \in A - B$ 」でない

($A \subseteq B$ ならば、 $A - B$ に要素はない)

I. SNK 証明図 (対応する文がない場所の番号は省いた)

$$\begin{array}{c}
 \frac{z \in B \rightarrow z \in B}{z \in A \rightarrow z \in A} \quad \frac{z \in B, \neg(z \in B) \rightarrow \perp}{z \in B, \neg(z \in B) \rightarrow \perp} \quad [8] \quad (\neg \rightarrow) \\
 \frac{[6] \quad z \in A \supset z \in B, z \in A, \neg(z \in B) \rightarrow \perp}{[5] \quad \forall x(x \in A \supset x \in B), z \in A, \neg(z \in B) \rightarrow \perp} \quad (\supset \rightarrow) \\
 \frac{[5] \quad \forall x(x \in A \supset x \in B), z \in A, \neg(z \in B) \rightarrow \perp}{[4] \quad A \subseteq B, z \in A, \neg(z \in B) \rightarrow \perp} \quad (\forall \rightarrow) \\
 \frac{[4] \quad A \subseteq B, z \in A, \neg(z \in B) \rightarrow \perp}{[3] \quad A \subseteq B, z \in A - B \rightarrow \perp} \quad (Def) \\
 \frac{[3] \quad A \subseteq B, z \in A - B \rightarrow \perp}{[2] \quad A \subseteq B, \exists x(x \in A - B) \rightarrow \perp} \quad (\exists \rightarrow) \\
 \frac{[2] \quad A \subseteq B, \exists x(x \in A - B) \rightarrow \perp}{[1] \quad A \subseteq B \rightarrow \neg \exists x(x \in A - B)} \quad [9] \quad (\rightarrow \neg) \\
 [10] \quad A \subseteq B \rightarrow \neg \exists x(x \in A - B) \quad [10]
 \end{array}$$

II. 対応する文

[7] $a \in A \Rightarrow a \in B$ と $a \in A$ より、 $a \in B$ である [8] $a \in B$ は $a \notin B$ に矛盾する

[6] よって、 $a \in A \Rightarrow a \in B$ である

[5] $A \subseteq B$ と定義より、(7.1) である

[4] 定義より、 $a \in A$ かつ $a \notin B$ である

[3] $a \in A - B$ を満たす a を任意にとる

[2] ある b が存在して $b \in A - B$ であると仮定する [9] $a \in A - B$ を満たす任意の a で

矛盾したので、「ある b が存在して $b \in A - B$ 」より、矛盾が導かれる

[1] $A \subseteq B$ を仮定する

[10] よって、「ある b が存在して $b \in A - B$ 」でない

ただし、(7.1) は

(7.1): すべての a_1 に対して、 $a_1 \in A \Rightarrow a_1 \in B$ を表す。³

III. 実際の証明

(5) の証明 A2 と同様に考えて、以下の表現を得る。

(7) の証明. $A \subseteq B$ を仮定する。

³なお、前節 Step 1 の詳細における $(\exists \rightarrow)$ の脚注の対応では、[3] に、「 $b \in A - B$ を満たす b を a とおく」を対応させ、[9] には文を対応させないことになる。さらに、 $b = a$ のときは、[3] にも文を対応させないことになる。

ある b が存在して $b \in A - B$ であると仮定する。 $a \in A - B$ を満たす a を任意にとる。定義より、 $a \in A$ かつ $a \notin B$ である。 $A \subseteq B$ と定義より、「すべての a_1 に対して、 $a_1 \in A \Rightarrow a_1 \in B$ 」である。よって、 $a \in A \Rightarrow a \in B$ である。 $a \in A \Rightarrow a \in B$ と $a \in A$ より、 $a \in B$ である。この $a \in B$ は $a \notin B$ に矛盾する。 $a \in A - B$ を満たす任意の a で矛盾したので、「ある b が存在して $b \in A - B$ 」より、矛盾が導かれる。

よって、「ある b が存在して $b \in A - B$ 」でない。

ここから、本来の表現「 $A \subseteq B$ ならば、 $A - B$ に要素はない」の証明も作ることができる。以下に示す。

「 $A \subseteq B$ ならば、 $A - B$ に要素はない」の証明。 $A \subseteq B$ を仮定する。

$A - B$ に要素があると仮定する。 $a \in A - B$ を満たす a を任意にとる。定義より、 $a \in A$ かつ $a \notin B$ である。 $A \subseteq B$ と定義より、「すべての a_1 に対して、 $a_1 \in A \Rightarrow a_1 \in B$ 」である。よって、 $a \in A \Rightarrow a \in B$ である。 $a \in A \Rightarrow a \in B$ と $a \in A$ より、 $a \in B$ である。この $a \in B$ は $a \notin B$ に矛盾する。 $a \in A - B$ を満たす任意の a で矛盾したので、 $A - B$ に要素があることより矛盾が導かれる。

よって、 $A - B$ に要素はない。

- (8) 「ある b が存在して $b \in A - B$ 」でないならば、 $A \subseteq B$
 ($A - B$ に要素がないならば、 $A \subseteq B$)

I. SNK 証明図 (対応する文がない場所の番号は省いた)

$$\begin{array}{c}
 \frac{z \in A \rightarrow z \in A \quad \neg(z \in B) \rightarrow \neg(z \in B)}{z \in A, \neg(z \in B) \rightarrow z \in A \wedge \neg(z \in B)} \quad [5] \quad (\rightarrow \wedge) \\
 \frac{z \in A, \neg(z \in B) \rightarrow z \in A \wedge \neg(z \in B)}{z \in A, \neg(z \in B) \rightarrow z \in A - B} \quad [6] \quad (Def) \\
 \frac{z \in A, \neg(z \in B) \rightarrow z \in A - B}{z \in A, \neg(z \in B) \rightarrow \exists x(x \in A - B)} \quad [7] \quad (\rightarrow \exists) \\
 \frac{z \in A, \neg(z \in B), \neg \exists x(x \in A - B) \rightarrow \perp}{z \in A, \neg \exists x(x \in A - B) \rightarrow z \in B} \quad [8] \quad (\neg \rightarrow) \\
 \frac{z \in A, \neg \exists x(x \in A - B) \rightarrow z \in B}{\neg \exists x(x \in A - B) \rightarrow \forall x(x \in A \supset x \in B)} \quad [9] \quad (RAA) \\
 \frac{\neg \exists x(x \in A - B) \rightarrow \forall x(x \in A \supset x \in B)}{\neg \exists x(x \in A - B) \rightarrow A \subseteq B} \quad [10] \quad (\rightarrow \forall \supset) \\
 \frac{\neg \exists x(x \in A - B) \rightarrow A \subseteq B}{\neg \exists x(x \in A - B) \rightarrow A \subseteq B} \quad [11] \quad (Def)
 \end{array}$$

II. 対応する文

- | | |
|-----------------------------|--|
| | [5] $a \in A$ と $a \notin B$ より、 $a \in A$ かつ $a \notin B$ である |
| | [6] 定義より、 $a \in A - B$ である |
| | [7] よって、 (8.1) である |
| [4] $a \notin B$ を仮定する | [8] (8.1) は「(8.1) でない」に矛盾する |
| [3] 任意に $a \in A$ が与えられたとする | [9] よって、 $a \in B$ である |
| [2] 定義より、 (8.2) を示せばよい | [10] よって、 (8.2) である |
| [1] (8.1) でないと仮定する | [11] 定義より、 $A \subseteq B$ である |
- ただし、(8.1),(8.2) はそれぞれ、
 (8.1): ある b が存在して $b \in A - B$
 (8.2): すべての a に対して、 $a \in A \Rightarrow a \in B$
 を表す。

[6] $a \in A \Rightarrow a \in B$ と $a \in A$ より、 $a \in B$ である

[7] $a \in B$ は $a \notin B$ に矛盾する

[5] よって、 $a \in A \Rightarrow a \in B$ である

[4] $A \subset B$ と定義より、(9.3) である

[3] (9.2) の否定、すなわち、 $a \in A$ と $a \notin B$ を仮定する

[2] 任意に a が与えられたとする。(9.2) を示す。

[8] よって、(9.2) である

[1] $A \subseteq B$ を仮定する

[9] よって、(9.1) である

ただし、(9.1),(9.2),(9.3) はそれぞれ、

(9.1): すべての b に対して、 $b \notin A$ または $b \in B$

(9.2): $a \notin A$ または $a \in B$

(9.3): すべての a_1 に対して、 $a_1 \in A \Rightarrow a_1 \in B$

を表す。

III. 実際の証明

(5) の証明 A2 と同様に考えて、以下の表現を得る。

(9) の証明. $A \subseteq B$ を仮定する。任意に a が与えられたとする。 $a \notin A$ または $a \in B$ を示す。

「 $a \notin A$ または $a \in B$ 」の否定、すなわち、 $a \in A$ と $a \notin B$ を仮定する。 $A \subset B$ と定義より、「すべての a_1 に対して、 $a_1 \in A \Rightarrow a_1 \in B$ 」である。よって、 $a \in A \Rightarrow a \in B$ である。 $a \in A \Rightarrow a \in B$ と $a \in A$ より、 $a \in B$ である。 $a \in B$ は $a \notin B$ に矛盾する。

よって、 $a \notin A$ または $a \in B$ である。 a は任意であったので、すべての b に対して、 $b \notin A$ または $b \in B$ である。

参考文献

- [1] 小野 寛晰, 『情報科学における論理』, 日本評論社, 東京, 1994.