

時間領域有限差分法と混成するための時間領域モーメント法の定式化

藤井 勝之 奥村 康行

南山大学 情報理工学部 システム創成工学科

あらまし

近年、電磁界の数値解析手法として、時間領域有限差分法 (Finite Difference Time Domain method: FDTD 法) や周波数領域モーメント法 (Method of Moment in the Frequency Domain: MoM_FD) などが広く普及している。FDTD 法とは Maxwell の微分方程式を差分化し、時間領域で解く手法である。FDTD 法は生体組織など損失性媒質を含む様々な電磁界問題を取り扱うのが比較的容易である。しかしながら、解析空間を直交曲線座標でメッシュ化し、モデリングするため、ヘリカルアンテナのような小形アンテナの電流分布を、線径を含めて高精度に求めるためには、計算機資源が膨大になってしまうというデメリットがある。一方で、MoM_FD は古くから用いられている手法で、アンテナ導体部分を微細なエレメントに分割し、波源の電流を積分方程式で表し、連立方程式から求める。FDTD 法と異なり、空間にメッシュを切る必要がなく、吸収境界条件も不要である。ただし、マトリクスを解く必要があるため、人体を扱うような大規模なモデルでは、やはり計算機資源が膨大になってしまう。そこで、両解析手法のそれぞれ得意とする部分を混成すれば、人体近傍に配置された小形アンテナなどの複雑な電磁界問題を高精度に解く事ができ、さらに計算機資源も節約可能になると考えられる。ただし、混成するには解析領域間の接続が非常に重要な問題となる。FDTD 法は時間領域の解析手法であるのに対し、MoM_FD は周波数領域での解析手法である。そこで、本論文では、FDTD 法と MoM の長所を時間領域で組み合わせた混成法を導入するための基礎として、時間領域モーメント法 (Method of Moment in the Time Domain: MoM_TD) を定式化し、従来から使われている MoM_FD と比較し、その妥当性を検証した。さらに FDTD 法と MoM_TD の解析領域の接続方法について等価定理を用いて説明した。

1. はじめに

近年、計算機の高速化により電磁界の数値解析に対する関心が高まっている。電磁界の数値解析手法には様々な種類があるが、現在のところ万能な数値解法はなく、解析対象によって使い分ける必要がある。例として、人体のような損失性媒質を含む解析対象として広く用いられているものに時間領域有限差分法 (Finite Difference Time Domain method: FDTD 法) が挙げられる [1]。しかしながら、解析領域をメッシュ化するため、曲線を含む構造物に対しては階段近似によるモデルの誤差が発生するといった欠点がある。一方で、モーメント法 [2] (Method of Moment in the frequency

Domain: MoM_FD)はヘリカルアンテナなど複雑な形状の電流分布を高精度で解析することができるが、人体などを含む解析は積分方程式の導入に困難を要する。そこで、各種解析手法を組み合わせ、それぞれの欠点を補う混成法が試みられている。

本報告ではFDTD法とMoMの混成を目的とし、その基礎として時間領域でのMoM(以後 MoM_TD と表記)の定式化と妥当性の検証を行う。解析対象として、直線導体棒上の電流分布を求め、一般的に用いられている周波数領域での MoM(以後 MoM_FD と表記)の値と比較する。さらに、FDTD法とMoM_TDの解析空間を接続するための等価定理について述べる。

2. 直線状導体棒の解析

本節では細線近似した有限長完全導体棒上の入射電界によって誘起される電流を求めるための積分方程式について述べる。図1に z 軸上に沿って対称に配置された長さ $2h$ [m]、半径 a [m]の導体棒を示す。時刻 t において、導体棒に電界 $\vec{E}^i(\vec{r}, t)$ が入射されると、 z 軸方向に誘導電流 $I(z, t)$ が誘起される。したがってベクトルポテンシャルは z 方向成分のみとなり、(1)式のように表される。

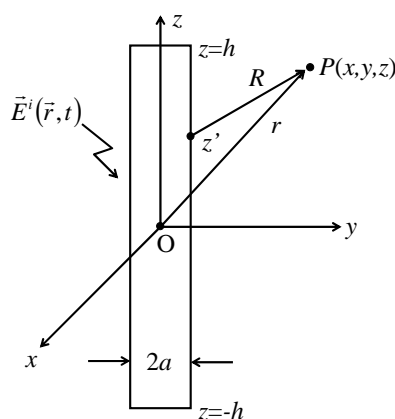


図1 入射電磁界によって励振された有限長完全導体棒

$$A_z(x, y, z, t) = \mu \int_{-h}^h \frac{I(z', t - R/c)}{4\pi R} dz' \quad (1)$$

なお、 R は

$$R = \sqrt{\{x^2 + y^2 + (z - z')^2 + a^2\}} \quad (2)$$

であり、 a はワイヤ半径を示す。

次に全電界成分は入射電界と散乱界の和であり、導体棒上において境界条件を適用すると z 方向の全電界成分は0となる。したがって、直線状導体棒の電界積分方程式は(2)式において $x=y=0$ として(3)式で表される。

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z^i}{\partial t} \quad (3)$$

ここで、 \vec{E}^i は入射電界を表し、 A_z は(4)式で表される。

$$A_z(z, t) = \mu \int_{-h}^h \frac{I(z', t - \frac{|z - z'|}{c})}{4\pi \sqrt{|z - z'|^2 + a^2}} dz' \quad (4)$$

2.1 時間領域モーメント法の定式化

本節では、MoM_TD を用い、導体棒上の電流分布を求めるための定式化について述べる [3]。まず、図 2 に示すように導体棒をそれぞれ $z_0, z_1, \dots, z_N, z_{N+1}$ のように $N+1$ 個のマッチポイントに分割し、セグメント幅を Δz とする。そして、端部ではすべてのタイムステップにおいて電流 $I=0$ である。



図 2 サブドメインに分割された有限長完全導体棒

ここで、基底関数としてパルス関数(5)式を用いる。

$$f_m(z) = \begin{cases} 1 & (z_m - \frac{\Delta z}{2} \leq z \leq z_m + \frac{\Delta z}{2}) \\ 0 & (other) \end{cases} \quad (5)$$

これを用いて電流 I を(6)式のように近似する。

$$I \cong \sum_{k=1}^N I_k(t) f_k(z) \quad (6)$$

ここで $I_k(t)$ は k 番目の領域の未知係数である。そして、 $A_{m,n} = A_z(z_m, t_n)$ として(6)式を用いて(4)式を以下のように書き換える。

$$A_{m,n} = \mu \int_{-h}^h \frac{I(z', t_n - \frac{|z_m - z'|}{c})}{4\pi \sqrt{|z_m - z'|^2 + a^2}} dz'$$

$$\begin{aligned}
&\approx \mu \int_{-h}^h \frac{\sum_{k=1}^N I_k(t_n - \frac{|z_m - z'|}{c}) f_k(z')}{4\pi \sqrt{|z_m - z'|^2 + a^2}} dz' \\
&= \sum_{k=1}^N I_k(t_n - \frac{|z_m - z'|}{c}) \kappa_{m,k}
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{m,k} &= \mu \int_{z_k - \Delta z/2}^{z_k + \Delta z/2} \frac{dz'}{4\pi \sqrt{|z_m - z'|^2 + a^2}} \\
&= \frac{\mu}{4\pi} \left[\ln \left\{ z_m - z_k + \frac{\Delta z}{2} + \sqrt{\left(z_m - z_k + \frac{\Delta z}{2} \right)^2 + a^2} \right\} \right. \\
&\quad \left. - \ln \left\{ z_m - z_k - \frac{\Delta z}{2} + \sqrt{\left(z_m - z_k - \frac{\Delta z}{2} \right)^2 + a^2} \right\} \right]
\end{aligned} \tag{8}$$

ここで、(7)を以下のように書き換えることができる。

$$A_{m,n} = I_{m,n} \kappa_{m,m} + A'_{m,n} \tag{9}$$

$$A'_{m,n} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^N I_k(t_n - \frac{|z_m - z_k|}{c}) \kappa_{m,k} \tag{10}$$

次に(3)式を中心差分して(11)式を得る。

$$\begin{aligned}
&\frac{A_{m+1,n} - 2A_{m,n} + A_{m-1,n}}{\Delta z^2} - \frac{A_{m,n+1} - 2A_{m,n} + A_{m,n-1}}{(c\Delta t)^2} \\
&= -F_{m,n}
\end{aligned} \tag{11}$$

$$F_{m,n} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z^i(z_m, t_n)}{\partial t} \tag{12}$$

そして(11)式を書きなおして(13)式を得る。

$$A_{m,n+1} = 2A_{m,n} - A_{m,n-1} + (c\Delta t)^2 F_{m,n} + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta z}\right)^2 (A_{m+1,n} - 2A_{m,n} + A_{m-1,n}) \tag{13}$$

最終的には n を $n-1$ と置き換え、(9)式を用いて、電流に関して以下のように定式化される。

$$I_{m,n} \kappa_{m,m} = -A'_{m,n} + 2A_{m,n-1} - A_{m,n-2} + (c\Delta t)^2 F_{m,n-1}$$

$$+\left(\frac{c\Delta t}{\Delta z}\right)^2(A_{m+1,n-1}-2A_{m,n-1}+A_{m-1,n-1}) \quad (14)$$

ここで、(14)式の左辺は時間に関して $t=t_n$ であるので、現在の時間ステップにおける電流値を表す。一方で右辺の時間は $t \leq t_{n-1}$ となっている。従って、過去の時間ステップにおける電流値を用いて、現在の時間ステップにおける電流値を求めていることになる。また、計算は $t=t_0$ から開始するが、右辺は $n-2$ の項が存在するため、 $I_{m,0}=I_{m,1}=0$ とし、 $I_{m,3}$ から計算を開始する必要がある。そして電流値が定常状態に達するまで、時間ステップを t_4, t_5, \dots と進めていく。

2.2 電流分布の解析結果

本節では、今回試作した時間領域モーメント法を用いた導体棒上の電流分布の解析結果について述べる。解析モデルとして、波長 $\lambda=1\text{m}$ 、アンテナ長 0.47λ 、ワイヤ半径 0.005λ の直線導体を用いた。また、励振源として中央セグメントに 1V のデルタギャップ給電を行った。また、妥当性の検証のため、一般的に用いられている MoM_FD による電流値と比較を行った。

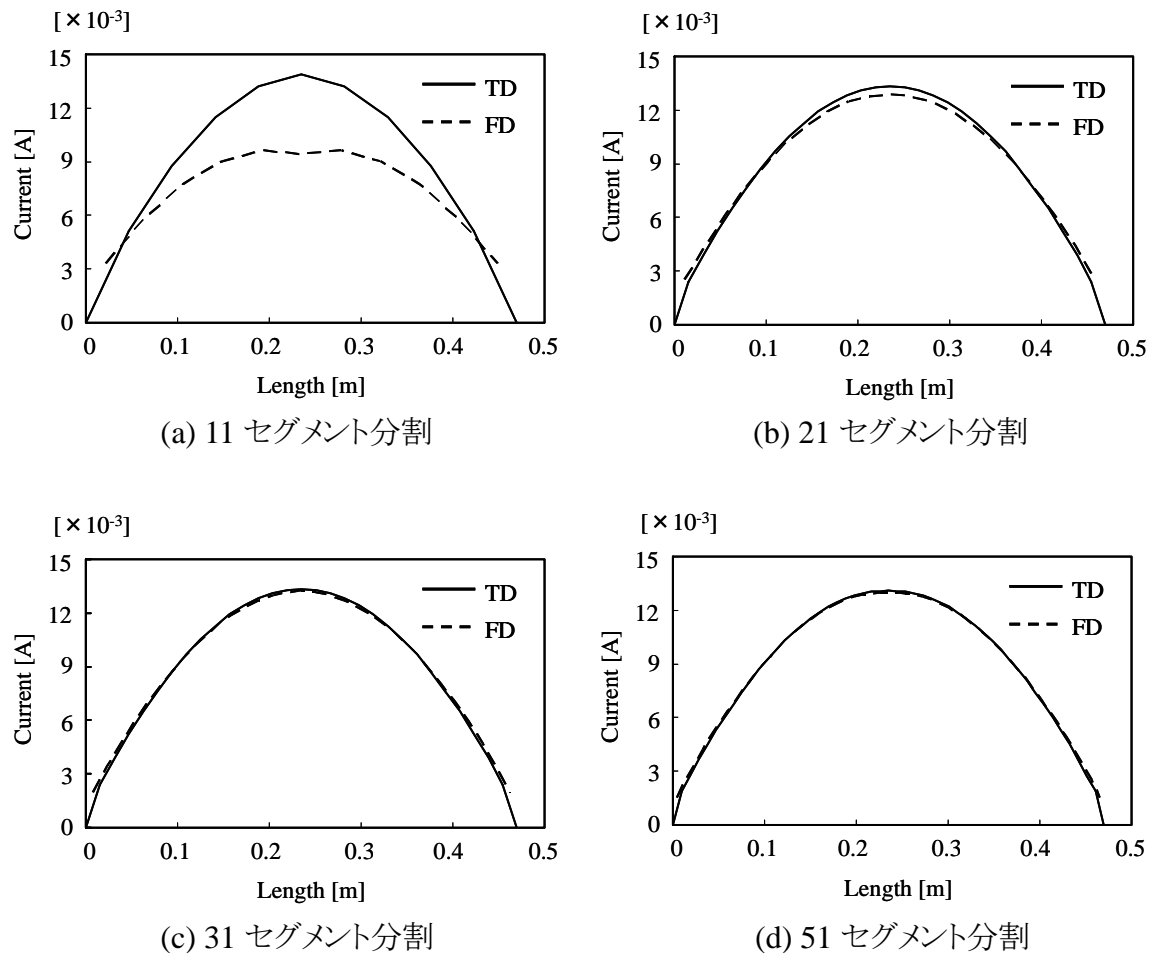


図3 導体棒上の電流分布

図 3 に、セグメント分割数に対する導体棒上の電流値を示す。図 3(a)～(d)より、MoM_FD では 31 分割で電流値はほぼ収束しているのに対し、MoM_TD では 11 分割の時点でほぼ収束していることがわかる。この収束性の差異は、時間領域では導体棒端部の電流を強制的に 0 としていることに起因すると考えられる。また、収束値はどちらも良好な一致を示し、今回試作したプログラムの妥当性が確認された。

3. 等価定理を用いた FDTD 法と MoM_TD の接続方法

3.1 等価定理

本節では FDTD 法と MoM_TD の解析空間を接続する上で必要な等価定理について説明し、現実の問題にどのように用いられているかを例示する [4]。アンテナなど波源からの放射特性は、波源の電流分布が分かれば求めることができる。しかしながら、一般的な形状のアンテナの電流分布を求めることは困難である。そこで、実際の波源の代わりに等価な波源に置き換えるという、Huygens の定理[5]を用いた等価定理が Schelkunoff によって 1936 年に提案された [6]。図 4 に Huygens の定理を示す。2 次波源が新しい波を作っているという考えである。

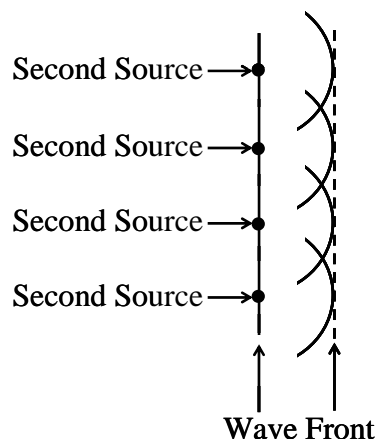


図4 Huygens の定理

次に等価定理について説明する。まず、図 5(a)のように、実際の波源(電流源 \vec{J}_1 、磁流源 \vec{M}_1 とする)を取り囲むように仮想の領域を設定する。通常は仮想領域表面の電界と磁界の接線成分が明らかとなるよう設定する。例えば、金属の表面にする等である。ここで、 \vec{J}_1 、 \vec{M}_1 は仮想領域内外共に電界 \vec{E}_1 、磁界 \vec{H}_1 を放射している。次に領域 S の外側(V_2 の領域)だけは同じ状態にしたい。つまり、 S の内側はもはや考慮する必要を意図的に無くすのである。そこで、図 5(b)のように、 \vec{J}_1 と \vec{M}_1 は取り除いて、 S の内側には \vec{E} と \vec{H} 、外側には \vec{E}_1 と \vec{H}_1 が存在すると仮定する。そのため、仮想領域 S 上には以下の境界条件を満たすように等価な波源(電流源と磁流源)が存在しなければならない。

$$\vec{J}_s = \vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}) \quad (15)$$

$$\vec{M}_s = -\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}) \quad (16)$$

ここで、 \vec{J}_s と \vec{M}_s は \vec{E}_1 と \vec{H}_1 のみに等価であり、 (\vec{E}_1, \vec{H}_1) と (\vec{E}, \vec{H}) は異なる。あとは、以下のベクトルポテンシャルを用いて、 \vec{E}_1 と \vec{H}_1 を求める事ができる。

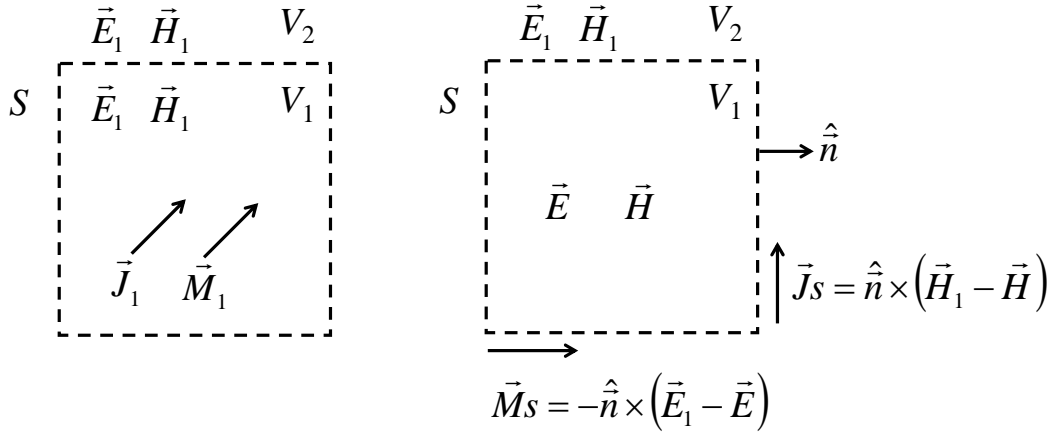
$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \vec{J}_s \frac{e^{-jkR}}{R} dS \quad (17)$$

$$\vec{F} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_S \vec{M}_s \frac{e^{-jkR}}{R} dS \quad (17)$$

$$\vec{E}_1 = -j\omega\vec{A} - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \vec{F} \quad (18)$$

$$\vec{H}_1 = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} - j\omega\vec{F} - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) \quad (19)$$

つまり、 S の内側はいかに複雑な波源の分布であろうと、 S 上の \vec{J}_s と \vec{M}_s が分かれば S の外側の電磁界分布が求まるのである。



(a) 実際の状態

(b) 等価電磁流源を用いた状態

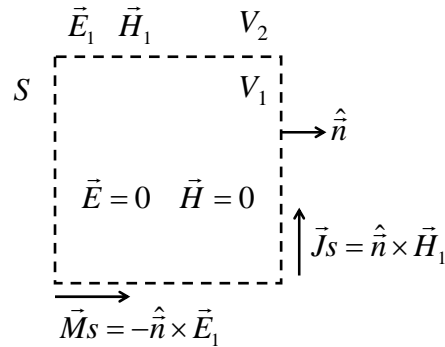
図5 等価定理

ここで更に、 S の内側の \vec{E} と \vec{H} は考慮する必要がないため、図6のように零とみなすこともできる(Loveの等価定理)。

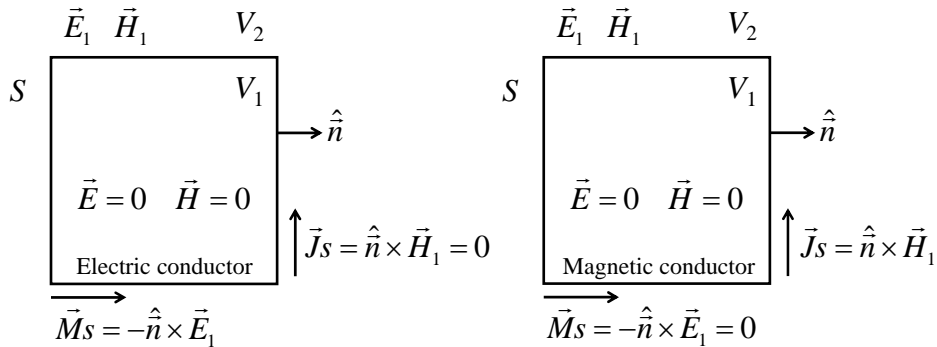
$$\vec{J}_s = \vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}) \Big|_{\vec{H}=0} = \vec{n} \times \vec{H}_1 \quad (20)$$

$$\vec{M}_S = -\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E})_{\vec{E}=0} = -\vec{n} \times \vec{E}_1 \quad (21)$$

ここで S の内側は $\vec{E}=\vec{H}=0$ なので S 内の媒質を変えても同じ条件となり、(b)や(c)とも等価である。しかしながら、(b)では $\vec{J}_S=0$ 、(c)では $\vec{M}_S=0$ なので、 S の外側には放射されず、ベクトルポテンシャルが使えなくなってしまう。その場合の例として図 7 のような無限長導体を考える。鏡像効果より、(a)は(b)に置き換えることができ、 \vec{M}_S の鏡像は \vec{M}_S と同じ方向なので(c)とみなせる。これによって、ベクトルポテンシャルが使えるようになり、無限長導体の右側の電磁界が求まる。

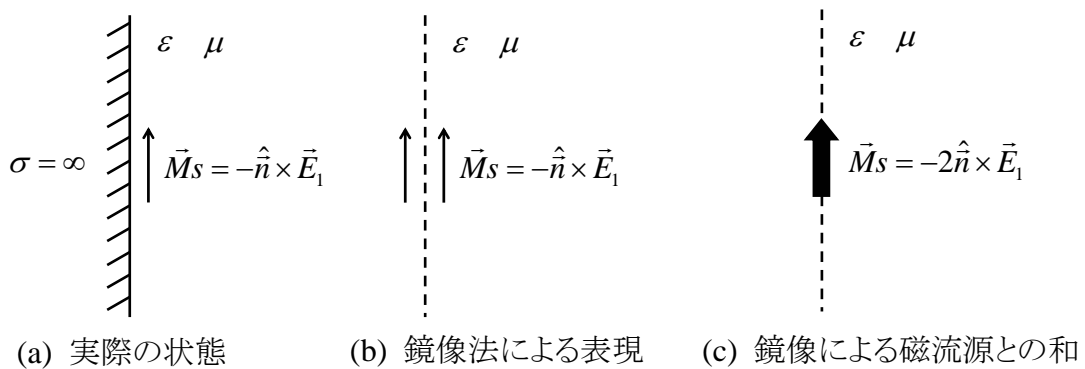


(a) Love の等価定理の適用



(b) Electric conductor に置き換えた場合 (c) Magnetic conductor に置き換えた場合

図 6 Love の等価定理



(a) 実際の状態 (b) 鏡像法による表現 (c) 鏡像による磁流源との和

図 7 無限長平面導体の場合における等価定理の適用

3.2 FDTD 法と MoM_TD の接続

本節では、等価定理を用いた FDTD 法と MoM_TD の接続方法について述べる。一例として、図 8 のように解析対象として人体近傍にアンテナが配置された場合を取り上げる。まず、アンテナから電磁波が放射され、人体によりその電磁エネルギーは吸収、透過、散乱される。そして、散乱されてアンテナに戻ってきた電磁エネルギーは、アンテナの特性に影響を及ぼす。このような電磁界問題を混成法で解析するには、仮想領域内部にアンテナが含まれるように設定すればよい。

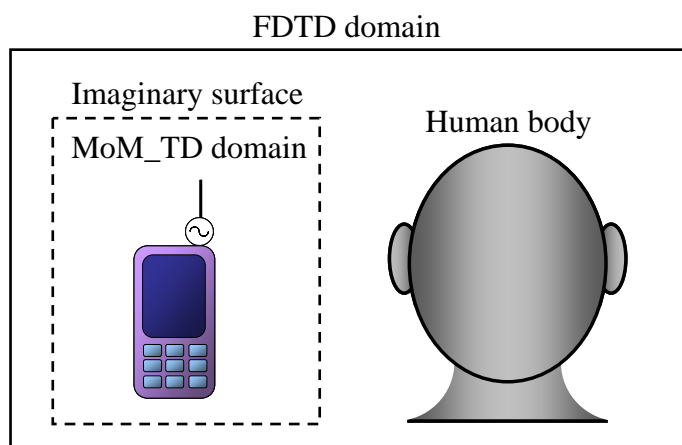


図 8 等価定理を用いた FDTD 法と MoM_TD の混成方法

解析のアルゴリズムを図 9 に示す。アンテナ上の電流と FDTD 領域内の電磁界をタイムステップ毎に更新しながら計算を進める。初期条件として、アンテナ上の電流及び全電磁界を零とする。そして、MoM_TD により、アンテナの給電点に与える電圧が入力となり、アンテナ上の電流が計算され、計算が反復される。そして値が収束した時点で、必要なデータを出力し終了する。本混成法はあくまで時間領域での計算手法のため、アンテナの入力インピーダンスや放射指向性などは、得られたデータをフーリエ変換することによって求める必要がある。

4. まとめ

本稿では、FDTD 法と MoM を時間領域で混成するため、MoM_TD の積分方程式を導出し定式化した。そして、導体棒上に誘起される電流分布を算出し、セグメント分割数に対する変動を調べた。また、妥当性の検証のため、一般的に用いられている MoM_FD による解析結果と比較した。その結果、電流分布の収束値は両者ともに良好な一致を示し、定式化の妥当性を確認した。さらに、FDTD 法と MoM_TD の両手法を空間的に接続するための境界条件として、等価定理について述べた。

今後の課題として、今回試作した MoM_TD を用い、FDTD 法と混成し、複雑なアンテナ構造近傍に置かれた人体と電磁波の相互作用について検討を行う。

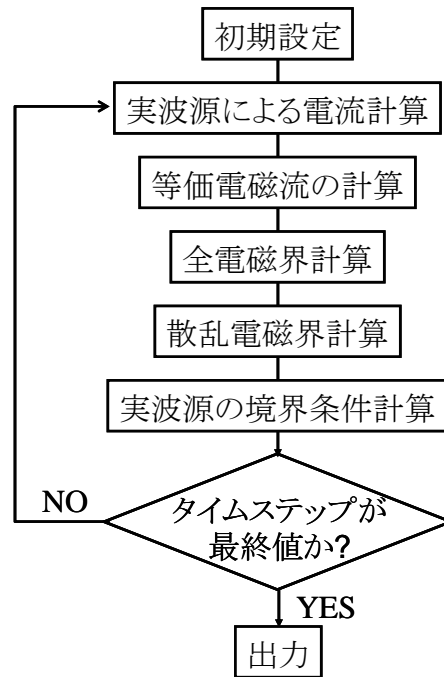


図9 混成法のフローチャート

参考文献

- [1] K. S. Yee, "Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media," IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol.14, pp.302-307, 1966.
- [2] R. F. Harrington, "Matrix Methods for Field Problems," Proc. IEEE, Vol.55, No.2, pp.136-149, Feb. 1967.
- [3] Sadasiva M. Rao, "Time Domain Electromagnetics," Academic Press, 1999.
- [4] Constantine A. Balanis, "Antenna Theory," pp.653-659, John Wiley & Sons, INC., Publication, 2005.
- [5] C. Huygens, "Traite de la Lumiere," Leyden, 1690.
- [6] S. A. Schelkunoff, "Some Equivalence Theorems of Electromagnetics and Their Application to Radiation Problems," Bell Syst. Tech. J. Vol.15, pp.92-112, 1936.