

階層構造を持つミニサム型施設配置問題の厳密解†

佐々木 美裕^a 古田 壮宏^b 鈴木 敦夫^a

概要

本論文では、中継点と施設の2つの階層を持つ階層型施設配置モデル MLTP および FTPLP を扱う。はじめに、ミニサム型 MLTP が p メディアン問題に帰着できることを示し、さらに一般化モデルである FTPLP に対するフロー型の新しい定式化を提案する。計算機実験では、これまで求められなかったミニサム型 MLTP および FTPLP の厳密解を求める。

1 はじめに

階層構造を持つ施設として、郵便局、宅配便集配センター、災害時の救助施設など、さまざまな種類の施設が身近に存在する。しかしながら、階層構造を持たない一般の施設配置問題と比較すると、階層型施設配置問題の研究はあまり進んでいない [5]。Berman ら [2] は、階層構造を持つ施設配置モデルとして、MLTP (The Multiple Location of Transfer Points) およびその一般化モデルである FTPLP (The Facility and Transfer Points Location Problem) を提案し、それぞれミニサム型とミニマックス型の問題を定式化した。また、ミニサム型問題に対する3つの近似解法を提案し、詳細な計算実験の結果を報告している。しかし、問題の規模が大きいため、厳密解は求めていない。

本論文では、ミニサム型 MLTP が p メディアン問題 [3] に帰着することを示し、さらに、FTPLP に対するフロー型の新しい定式化を提案する。提案する新しい定式化では、従来の定式化と比べると変数および制約条件の数が減少している。これらの新しい定式化を用い、ILOG CPLEX によって厳密解を求めた結果を報告する。

2 モデルの説明

2.1 階層型施設

施設と中継点の2つの階層を持つ階層型施設配置モデルを考える (図1)。 N を需要点 (利用者) の集合 ($|N| = n$)、 P を中継点の集合 ($P \subseteq N, |P| = p$)、 Q を施設の集合 ($Q \subseteq N, |Q| = q$) とする。利用者は、いずれかの中継点を経由していずれかの施設へ移動するか、あるいは、中継点を経由せずに施設まで直行する。中継点と施設の間 (図1の太線部分) は、高速輸送が可能であると仮定する。このようなモデルは、宅配便の集配計画問題や災害時の物資配送計画問題などに応用できる。

MLTP [2] は、 $Q \subseteq N$ が与えられたとき、 $P \subseteq N$ と各利用者の中継点への割当および、各中継点の施設への割当を求める問題である。FTPLP [2] は、MLTP を一般化したモデルであり、 $Q \subseteq N$ も同時に求める問題である。Berman ら [2] は、MLTP と FTPLP について、それぞれミニサム型とミニマックス型の問題を定式化し、ミニサム型の問題に対する3つの近似解法を提案した。

†本研究は、南山大学パツヘ研究奨励金 I-A-2, 科学研究費 (若手研究 (B))17710148, 科学研究費 (基盤研究 A(2))16201035 の助成を受けた。

^a南山大学 数理情報学部

^b南山大学大学院 経営学研究科

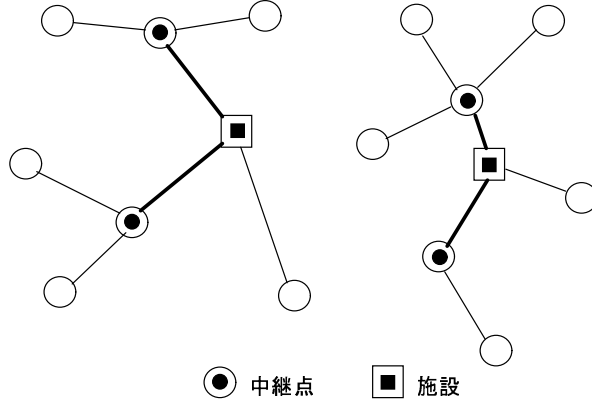


図 1: 階層型配置モデル ($n = 16, p = 4, q = 2$)

2.2 ミニサム型 MLTP と p メディアン問題

以下では, d_{ij} をノード $i \in N$ から ノード $j \in N$ への移動時間, w_i をノード $i \in N$ の需要とする. また, $\alpha (0 < \alpha < 1)$ を中継点と施設とのディスカウントファクターとし, 中継点 j と施設 k の間は αd_{jk} で移動できるものとする.

MLTP において, $Q \subseteq N$ が与えられているとする. 需要点 $i \in N$ から中継点 $j \in N$ を経由して施設を利用する場合の移動時間は, $\min_{k \in Q} (d_{ij} + \alpha d_{jk})$ で表される. 一方, $i \in N$ から施設へ直行した場合の移動時間は $\min_{k \in Q} d_{ik}$ で表される. したがって, $i \in N$ が施設を利用するときの移動時間は, $\min(\min_{j \in N, k \in Q} (d_{ij} + \alpha d_{jk}), \min_{k \in Q} d_{ik})$ で与えられる. ここで, 新たに $n \times (n + 1)$ 行列 D を次のように定める.

$$D_{ij} = \begin{cases} \min_{k \in Q} (d_{ij} + \alpha d_{jk}), & j = 1, \dots, n, \\ \min_{k \in Q} d_{ik}, & j = n + 1. \end{cases} \quad (1)$$

また, $N' = \{1, \dots, n, n + 1\}$ とすると, MLTP は次のように p メディアン問題として定式化できる.

$$\text{minimize} \quad \sum_{i \in N} \sum_{j \in N'} D_{ij} x_{ij} \quad (2)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in N'} x_{ij} = w_i, \quad i \in N, \quad (3)$$

$$x_{ij} \leq y_j, \quad j \in N, \quad (4)$$

$$\sum_{k \in N} y_j = p, \quad (5)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad j \in N', \quad (6)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j \in N. \quad (7)$$

ここで, $j \in N$ に対して $x_{ij} = 1$ のとき, ノード $i \in N$ が中継点 $j \in N$ に接続することを表し, $j \in N' \setminus N$, すなわち $j = n + 1$ に対して $x_{ij} = 1$ のときは, ノード $i \in N$ から最も移動時間の短い施設へ直行することを表す. y_j は, $j \in N$ が中継点となるとき 1, そうでないとき 0 となる 0-1 変数である.

2.3 ミニマックス型 MLTP と p センター問題

前節と同様の方法で、ミニマックス型 MLTP は次のように p センター問題 [3] として定式化できる。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && L \\ & \text{s.t.} && D_{ij}x_{ij} \leq L, && i \in N, j \in N', \\ & && (3) - (7). \end{aligned}$$

3 FTPLP

3.1 ミニサム型 FTPLP

Berman ら [2] は、ミニサム型 FTPLP を 0-1 整数計画問題として定式化した。需要点の数が n のとき、0-1 変数の数は $n^3 + n^2 + 1$ 、制約条件の数は $2n^3 + n^2 + n + 2$ であり、 $n = 100$ 程度の問題でも 100 万を超える 0-1 変数と 200 万を超える制約条件を持つ大規模な問題となる。また、Narula ら [4] は、FTPLP の基礎となるモデルを提案した際に、フロー型の定式化を用いた。同様の方法を FTPLP に適用すると、需要点の数が n のとき、0-1 変数の数は $2n$ 、連続変数の数は $3n^2$ 、制約条件の数は $4n + 2$ となる。これに対し、提案する新しいフロー型の定式化では、0-1 変数の数が $2n$ 、連続変数の数が $2n^2$ 、制約条件の数が $n^2 + 5n + 2$ である。定式化するにあたり、2.2 節で用いた記号に加え、十分大きな数として M を用いる。また、決定変数を以下のように定める。

x_j : ノード $j \in N$ が施設または中継点であるとき 1、そうでないとき 0 をとる 0-1 変数。

y_k : ノード $k \in N$ が施設であるとき 1、そうでないとき 0 をとる 0-1 変数。

φ_{ij} : ノード $i \in N$ からノード (中継点または施設) $j \in N$ への流量。

ψ_{jk} : 中継点 $j \in N$ から施設 $k \in N$ への流量。

FTPLP は、次のように定式化できる。

$$\text{minimize} \quad \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} d_{ij} \varphi_{ij} + \alpha \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} d_{jk} \psi_{jk} \quad (8)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i \in N} \varphi_{ij} = \sum_{k \in N} \psi_{jk}, \quad j \in N, \quad (9)$$

$$\sum_{j \in N} \varphi_{ij} = w_i, \quad i \in N, \quad (10)$$

$$\varphi_{ij} \leq w_i x_j, \quad i, j \in N, \quad (11)$$

$$\sum_{k \in N} \psi_{jk} \leq M(x_j + y_j), \quad j \in N, \quad (12)$$

$$\sum_{j \in N} \psi_{jk} \leq M y_k, \quad k \in N, \quad (13)$$

$$y_j \leq x_j, \quad j \in N, \quad (14)$$

$$\sum_{j \in N} x_j = p + q, \quad (15)$$

$$\sum_{k \in N} y_k = q, \quad (16)$$

$$\varphi_{ij} \geq 0, \quad i, j \in N, \quad (17)$$

$$\psi_{jk} \geq 0, \quad j, k \in N, \quad (18)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in N, \quad (19)$$

$$y_k \in \{0, 1\}, \quad k \in N. \quad (20)$$

目的関数 (8) は、各ノードから施設までの最短経路距離の総和を最小にすることを表している。制約条件 (9) は、各ノードにおける流量保存則を表している。制約条件 (10) は、ノード i の需要に関する制約である。制約条件 (11) は、各ノードからは中継点以外にフローを流すことはできないことを示している。制約条件 (12) は、フローを施設へ中継できるのは中継点のみであることを示し、また、制約条件 (13) は、中継点からは施設のみにフローを流すことができることを示している。制約条件 (14)(15)(16) は、 p 個の中継点と q 個の施設を配置することを示している。また、制約条件 (11)(14) により、ノード $i \in N$ の利用者が施設へ直行することが可能である。(17)-(20) は、変数の非負制約および 0-1 制約を表している。

Narula ら [4] の定式化では、各ノードから中継点へのフロー量を表す変数、各ノードから施設へのフロー量を表す変数、各中継点から施設へのフロー量を表す変数がそれぞれ n^2 ずつ定義され、連続変数の合計は $3n^2$ である。これに対し、ここで提案する方法では、各ノードから施設へのフロー量を表す変数は用いずに定式化したので $2n^2$ である。

3.2 ミニマックス型 FTPLP

ミニマックス型 FTPLP は次のように定式化できる。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && L \\ & \text{s.t.} && d_{ij}\varphi_{ij} + \alpha d_{jk}\psi_{jk} \leq L, \quad j \in N, j \in N, k \in N, \\ & && (9) - (20). \end{aligned}$$

Berman ら [2] のミニマックス型 FTPLP の定式化では $3n^3 + 2n^2 + n + 2$ の制約条件を含むのに対し、ここで提案する定式化では制約条件の数は $n^3 + n^2 + 5n + 2$ である。

4 計算機実験

OR-Library[1]で提供されている p メディアン問題用のベンチマークデータを使用し、AMPL と ILOG CPLEX8.0 を用いてミニサム型問題の厳密解を求めた。 $n = 900$ のベンチマークデータセットについては、メモリ不足により問題を解くことができなかったため、ここでは $n = 800$ 以下の 37 セットを使用した。使用した計算機は、Intel Pentium 4 プロセッサ (3.0GHz) 搭載の DELL DIMENSION 8300、メモリは 2GB である。需要はすべてのノードにおいて 1 とした。Berman ら [2] が行った計算機実験と同様に、 $\alpha = 0.8$ とし、いずれの場合も、データに含まれる最初の q 個のノードを施設として設定した。表 1, 2 は、それぞれ MLTP において $q = 1$,

表 1: MLTP の結果 ($q = 1, \alpha = 0.8$)

データ	n	p	最適値	CPU 時間 (秒)			
				CPLEX	DA	SA	TS
pmed1	100	5	11827.8	0.45	0.00	0.65	0.03
pmed2	100	10	9279.2	0.42	0.01	0.98	0.10
pmed3	100	10	14137.6	0.50	0.01	0.98	0.11
pmed4	100	20	12956.8	0.42	0.03	1.36	0.29
pmed5	100	33	10887.6	0.44	0.06	1.77	0.57
pmed6	200	5	22588.4	3.03	0.01	2.80	0.14
pmed7	200	10	13603.8	2.66	0.04	3.73	0.40
pmed8	200	20	16412.8	2.89	0.14	5.19	1.33
pmed9	200	40	12503.2	3.19	0.41	7.16	4.09
pmed10	200	67	9588.0	2.91	0.81	10.51	8.14
pmed11	300	5	12639.6	7.39	0.03	5.88	0.31
pmed12	300	10	12760.2	7.95	0.10	8.26	0.96
pmed13	300	30	15848.8	8.66	0.71	14.54	6.71
pmed14	300	60	17035.2	8.92	2.21	22.90	21.10
pmed15	300	100	11046.4	9.75	4.15	30.24	39.19
pmed16	400	5	21194.8	16.59	0.08	17.57	0.85
pmed17	400	10	13240.6	16.89	0.23	23.31	2.29
pmed18	400	40	21685.6	20.64	2.80	46.93	29.30
pmed19	400	80	14053.4	24.53	9.00	76.81	93.88
pmed20	400	133	15670.0	22.02	17.82	105.30	184.00
pmed21	500	5	15889.8	29.03	0.14	32.40	1.43
pmed22	500	10	17449.4	41.05	0.38	45.96	3.67
pmed23	500	50	16100.8	38.14	7.25	111.37	70.71
pmed24	500	100	16404.6	41.81	22.84	183.13	224.95
pmed25	500	167	20121.8	38.45	45.72	263.11	451.95
pmed26	600	5	16314.0	48.92	0.19	50.62	1.88
pmed27	600	10	14778.4	55.20	0.55	73.22	5.42
pmed28	600	60	13542.6	62.81	14.78	211.51	150.78
pmed29	600	120	12741.0	66.84	46.56	342.14	461.68
pmed30	600	200	14353.8	63.39	93.99	485.87	968.43
pmed31	700	5	16479.8	80.98	0.28	73.80	2.78
pmed32	700	10	21265.2	75.83	0.78	105.47	7.67
pmed33	700	70	18595.0	113.09	27.22	351.74	268.71
pmed34	700	140	24277.0	105.88	85.40	570.89	897.70
pmed35	800	5	15779.0	109.48	0.48	96.89	4.83
pmed36	800	10	18981.2	114.91	1.01	141.36	10.25
pmed37	800	80	16987.6	149.55	47.25	540.05	482.11

表 2: MLTP の結果 ($q = 5, \alpha = 0.8$)

データ	n	p	最適値	CPU 時間 (秒)			
				CPLEX	DA	SA	TS
pmed1	100	5	7888.8	0.39	0.00	0.55	0.03
pmed2	100	10	7075.4	0.38	0.01	0.86	0.09
pmed3	100	10	8415.0	0.41	0.01	0.88	0.11
pmed4	100	20	10064.4	0.44	0.03	1.31	0.28
pmed5	100	33	6932.6	0.39	0.05	1.70	0.52
pmed6	200	5	11491.0	2.48	0.01	2.22	0.13
pmed7	200	10	8856.4	3.88	0.04	3.33	0.42
pmed8	200	20	11270.0	2.75	0.13	4.87	1.34
pmed9	200	40	9105.4	2.83	0.40	6.86	3.94
pmed10	200	67	7509.4	2.81	0.77	10.19	7.93
pmed11	300	5	10073.8	7.08	0.03	5.42	0.30
pmed12	300	10	9647.0	7.19	0.09	7.70	0.93
pmed13	300	30	9656.0	9.17	0.66	13.76	6.66
pmed14	300	60	10393.4	9.45	2.05	22.07	20.44
pmed15	300	100	10033.4	10.00	3.89	29.69	38.69
pmed16	400	5	14813.2	16.44	0.07	16.29	0.74
pmed17	400	10	10963.2	16.98	0.23	22.16	2.26
pmed18	400	40	13325.0	20.52	2.85	46.03	28.14
pmed19	400	80	10113.2	20.97	8.85	74.23	88.64
pmed20	400	133	11351.8	19.73	18.15	102.47	183.83
pmed21	500	5	11894.4	26.95	0.12	29.63	1.26
pmed22	500	10	13654.0	30.70	0.37	43.12	3.70
pmed23	500	50	11735.2	38.52	7.01	109.78	69.27
pmed24	500	100	11552.2	41.48	22.51	181.66	230.65
pmed25	500	167	12345.0	39.41	45.26	258.00	454.84
pmed26	600	5	13665.6	45.34	0.19	48.28	1.88
pmed27	600	10	12966.4	47.55	0.55	69.99	5.43
pmed28	600	60	11730.8	63.84	14.73	212.96	144.63
pmed29	600	120	11155.6	67.92	46.93	341.59	469.4
pmed30	600	200	10671.6	62.95	93.29	475.33	938.12
pmed31	700	5	13185.2	68.98	0.27	70.38	2.63
pmed32	700	10	14560.0	71.95	0.75	102.43	7.62
pmed33	700	70	11963.4	104.08	27.11	343.67	273.27
pmed34	700	140	14519.2	104.03	85.53	564.56	879.42
pmed35	800	5	12574.6	100.22	0.37	92.76	3.73
pmed36	800	10	15909.6	110.22	0.99	136.25	10.04
pmed37	800	80	15188.2	166.75	45.95	534.63	468.89

表 3: FTPLP の結果 ($n = 100, q = 1$)

データ	p	α	最適値	CPU 時間 (秒)
pmed1	5	0.2	6717.8	1359.78
		0.4	7777.0	1750.45
		0.6	8658.4	1217.28
		0.8	9470.8	1359.05
pmed2	10	0.2	5232.8	541.42
		0.4	6410.0	2121.13
		0.6	7470.8	924.78
		0.8	8397.8	258.53
pmed3	10	0.2	5732.6	6222.50
		0.4	7255.6	5385.38
		0.6	8717.2	1015.19
		0.8	10088.2	372.53
pmed4	20	0.2	4919.2	1581.30
		0.4	6782.2	140.52
		0.6	8540.4	188.64
		0.8	10230.2	184.05
pmed5	33	0.2	2860.0	824.72
		0.4	4346.8	284.94
		0.6	5795.0	166.50
		0.8	7226.0	154.42

$q = 5$ の場合の結果である。CPLEX の列に示されている実行時間には、行列 (1) を求める時間は含まれていない。DA, SA, TS の列は、それぞれ、Berman ら [2] が提案した 3 つの近似解法、descent approach, simulated annealing, tabu search の結果を示している。各問題において、初期解をランダムに選択し、descent approach は 100 回、simulated annealing と tabu search は 10 回解き、実行時間の平均を出している。使用した計算機は、Intel Pentium 4 プロセッサ (2.8GHz) 搭載の計算機でメモリは 256MB である。使用した計算機のスペックが異なるので一概には比較できないが、MLTP が p メディアン問題に帰着できたことにより、近似解法の実行時間と比較しても実用的な計算時間で厳密解を求めることができた。また、この実験により、Berman ら [2] が提案した近似解法で求めた最良解はすべて厳密解に一致することが確認できた。

表 3 は、FTPLP の結果を示している。 $n = 200$ の問題については、計算開始から 10 時間以上経過しても解を得ることができなかったため、 $n = 100$ の問題のみを用い、 α を 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 として実験を行った。データや α の値によって、計算時間にばらつきはあるが、平均して 1300 秒程度で厳密解を求めることができた。一方、Berman ら [2] は FTPLP についても MLTP と同様に、 $\alpha = 0.8$ とし、descent approach では 100 回、他の 2 つの近似解法ではそれぞれ 10 回ずつ問題を解き、実行時間の平均を報告している。実行時間は、descent approach で 0.05 秒以内、simulated annealing で約 0.5 秒～2 秒、tabu search で約 0.5 秒以内である。

また、求めた最良解はすべて厳密解に一致することが確認できた。

5 おわりに

Berman ら [2] が提案したミニサム型 MLTP が p メディアン問題に帰着することを示し、FTPLP に対する新しい定式化を提案した。 $n = 100$ の問題でも問題のサイズが大きいことから、これまでは厳密解を求められなかったが、新たな定式化を用いることによって、はじめて厳密解を求めた。特に、MLTP は p メディアン問題として定式化できたことから、従来の近似解法とほぼ同等かそれ以下の時間で厳密解を求めることができた。ミニサム型 FTPLP については、はじめて厳密解を求めることができたが、 $n = 200$ 以上の問題については、計算時間の面においてさらなる改良が必要である。また、ミニマックス型については、MLTP であっても制約条件の数が非常に多くなるため、問題を解くことはさらに難しくなる。ミニマックス型問題に対する定式化および近似解法も含めた解法の工夫が今後の課題である。

謝辞

本研究を進めるにあたり、多くの助言を下さいましたカリフォルニア州立大学フラトン校の Zvi Drezner 教授に感謝いたします。

参考文献

- [1] J.E. Beasley: OR-Library: distributing test problems by electronic mail. *Journal of the Operational Research Society*, **41** (1990) 1069–1072.
- [2] O. Berman, Z. Drezner and G.O. Wesolowsky: The facility and transfer points location problem. *International Transactions in Operational Research*, **12** (2005) 387–402.
- [3] S.L. Hakimi: Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. *Operations Research*, **12**, 450–459.
- [4] S.C. Narula and U.I. Ogbu: An hierarchical location-allocation problem. *Omega International Journal of Management Science*, **7** (1979) 137–143.
- [5] G. Şahin and H. Süral: A review of hierarchical facility location models. To appear in *Computers & Operations Research*.