

ネットワークボロノイ図を利用した p ノードセンター問題の近似解法

古田 壮宏

南山大学大学院経営学研究科
d02bb001@nanzan-u.ac.jp

鈴木 敦夫

南山大学数理情報学部
atsuo@nanzan-u.ac.jp

概要

本稿では、ネットワークボロノイ図を利用した p ノードセンター問題の近似解法について述べる。 p ノードセンター問題は NP-困難な施設配置問題のひとつとしてよく知られている。ネットワークボロノイ図の算法と 1 ノードセンター問題の解法とを組み合わせることで高速に近似解を得る方法を示す。また、我々の解法は、空間計算量を頂点数や枝数に対して線形としつつ、現実的な計算時間で解を得られるように拡張できる。既存の多くの解法が距離行列を前提としている。しかし、現実の道路ネットワークや通信ネットワーク上で配置問題を考えるとき、そのネットワークの頂点数は万を超えることが多い。このような問題で距離行列を前提とするのはあまり現実的ではなく、空間計算量が線形であることは大きな利点となるであろう。また、実際に約 58000 の頂点からなる道路ネットワークに対する近似解を求めた。

1 はじめに

p センター問題は、需要点とその最寄りの施設との最大距離が最小となるように、 p 個の施設を配置する問題である。この問題は NP-困難な施設配置問題のひとつとしてよく知られており、最大距離を最小にするという性質から、消防署や病院などの緊急施設の配置問題に適しているとされている。

ネットワーク上における p センター問題は 2 つに分類される [4, 7, 13]。 p 絶対センター問題 (absolute p -center problem) と p ノードセンター問題 (vertex p -center problem) である。両者の違いは、施設の配置場所に現れる。 p 絶対センター問題ではネットワークの枝上のどこを選択してもよいのに対し、 p ノードセンター問題ではネットワーク上の頂点しか選択できない。 p 絶対センター問題は、ある枝に注目したときその枝上でセンターと成り得る点は少なくとも 2 つの頂点から等距離となる点である、という性質を利用して枝上に頂点を追加することで、 p ノードセンター問題に置き換えることができる [4, 13]。頂点数 n 、枝数 m とするとき、各枝で各頂点对に対するセンターの候補点が存在する。つまり、 $O(mn^2)$ の頂点に対する p ノードセンター問題を解く必要がある。

p ノードセンター問題は、整数計画問題として定式化することで厳密解を得ることができる。また、集合被覆問題を利用した解法 [12] や最大被覆問題を利用した解法 [5] などが提案されている。いずれの解法もあらかじめ距離行列を作成することを前提としている。

しかしながら、現実にはセンター問題を考える上では、必ずしも距離行列を作成できるとは限らない。まず、上述したように p 絶対センター問題を p ノードセンター問題に置き換えた場合、 $O(mn^2)$ の頂点を考える必要がある。これは数十の頂点の p 絶対センター問題であった場合、数万の頂点の p ノードセンター問題になる可能性を示している。また、国土地理院による数値地図データ^{*1}を利用することで、ある地域の道路ネットワー

^{*1} GSI HOME PAGE, <http://www.gsi.go.jp/>

クを容易に手に入れることができる。このネットワークの大きさは、1つの行政単位に対して数万頂点の規模である。このような規模のネットワークに対して、従来の解法は現実的な解決手段とならない。また、無線技術などの発達によって、超小型のセンサーを数万個の規模で対象領域に散布して、対象領域をモニターすることが行われている [1, 11]。このとき、センサー同士の通信距離と各センサーのバッテリー寿命の問題から効率的なセンサー間の通信が求められている。この問題でも数万個の頂点に対する施設配置問題を考える必要がある。

現在の計算機環境において、数万個の頂点の距離行列を考えることはあまり現実的ではない。また、頂点間の距離を必要とするごとに求めるのは計算時間の観点からやはり現実的ではない。そこで、我々はネットワークポロノイ図 [6, 9] を利用した p ノードセンター問題の近似解法を提案する。ネットワークポロノイ図とはネットワーク上でのポロノイ図である。ネットワークポロノイ図は、ネットワーク上に母点（一般に頂点の部分集合）が与えられたとき、ネットワーク上での距離で最も近い母点によって頂点を分割する。平面におけるポロノイ図が施設配置問題で有効であるのと同様に、ネットワークポロノイ図はネットワーク上での施設配置問題の有効な道具となることが期待されている。

このネットワークポロノイ図を p ノードセンター問題に適用することで、現実的な計算時間を維持しつつ、線形の空間計算量で近似解を得ることができることを示す。また、数万個の頂点からなる実際の道路ネットワークに対する初めての近似解を提示する。2節で問題の定義、アルゴリズムを示す。計算機実験の結果を3節で示し、4節で解法の改良に関する検討を行う。5節でまとめと今後の課題について述べる。

2 アルゴリズム

まずはじめに、ネットワークポロノイ図を利用した p ノードセンター問題の近似解法として、距離行列を作成する場合の解法を示し、次にその空間計算量の線形化を行う。

ネットワーク $N(V, E)$ が与えられたとする。このとき、頂点集合 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ 、枝集合 E 、 $m = |E|$ とする。 $e(v_i, v_j)$ を頂点 v_i と v_j を結ぶ枝とし、その枝の長さを正とする。また、 $d(v_k, v_i)$ を v_k から v_i への最短経路距離とする。要素数 p 個の頂点集合 $X_p = \{x_1, \dots, x_p\} \subset V$ とするとき、

$$d(v, X_p) = \min_{i=1, \dots, p} \{d(x_i, v)\} \quad (1)$$

とする。このとき、

$$F(X_p) = \max_{v \in V} \{d(v, X_p)\} \quad (2)$$

とすると、

$$F(X_p^*) = \min_{X_p \subset V} \{F(X_p)\} \quad (3)$$

となるような X_p^* を p ノードセンター [7, 8, 10] と呼ぶ。

次に、 $X_p = \{x_1, \dots, x_p\}$ を母点集合とするネットワークポロノイ図を考える。この各母点の頂点集合 $V(x_1), \dots, V(x_i), \dots, V(x_p)$ は次の性質を満たす。

$$V(x_i) = \{v \in V \mid d(x_i, v) \leq d(x_j, v), j = 1, \dots, p\}. \quad (4)$$

式 (1) では、各頂点が最も近い $x \in X_p$ を利用することを示している。これは、 X_p を母点としたネットワークポロノイ図を考えることで、式 (2) から次式が成り立つ。

$$F(X_p) = \max_{v \in V} \{d(v, X_p)\} = \max_{i=1, \dots, p} \{ \max_{v \in V(x_i)} \{d(x_i, v)\} \} \quad (5)$$

これらの式より、次のような定理が成り立つ。

定理 2.1. ネットワーク $N(V, E)$ とその p ノードセンター X_p^* 、また X_p^* を母点集合とするネットワークポロノイ図が与えられたとき、 $F(X_p^*) = d(x_i^*, v') = d(v', X_p^*)$ となる x_i^*, v' を考える。このとき、 x_i^* は頂点集合 $V(x_i^*)$ の 1 ノードセンターである。

Proof. $\max_{v \in V(x_i^*)} \{d(x', v)\} < \max_{v \in V(x_i^*)} \{d(x_i^*, v)\}$ となる 1 ノードセンター $x' \in V(x_i^*)$ を仮定する。 $X = X_p^* \setminus \{x_i^*\} \cup \{x'\}$ という X を考えるとき $F(X) < F(X_p^*) \wedge X \neq X_p^*$ となり、 X_p^* が p ノードセンターであることに矛盾する。よって、 x_i^* は頂点集合 $V(x_i^*)$ の 1 ノードセンターである。□

各頂点の最も近い母点はネットワークポロノイ図を求めることで容易に得られること、また、 p ノードセンターが得られたときの最大距離を持つセンター x_i^* は、その頂点集合 $V(x_i^*)$ の 1 ノードセンターになっていることから、次のような近似解法を提案する。

Step 1. 乱数により p 個の頂点を選択し、その集合を $X_p \subset V$ とする。

Step 2. X_p を母点とし、ネットワークポロノイ図を求める [6, 9]。

Step 3. $X'_p = \emptyset$ とする。各母点 $x_i \in X_p$ の頂点集合 $V(x_i)$ ごとに 1 ノードセンター $x'_i \in V(x_i)$ を求める。 $\max_{v \in V(x_i)} \{d(x'_i, v)\} < \max_{v \in V(x_i)} \{d(x_i, v)\}$ となるとき、 $X'_p \leftarrow X'_p \cup \{x'_i\}$ 。 $\max_{v \in V(x_i)} \{d(x'_i, v)\} = \max_{v \in V(x_i)} \{d(x_i, v)\}$ であるとき、 $X'_p \leftarrow X'_p \cup \{x_i\}$ 。

Step 4. $X_p = X'_p$ であれば、終了。そうでなければ、 $X_p \leftarrow X'_p$ として、Step 2 へ。

この解法では最初に母点として選ぶ頂点の組合せにより局所最適解で終了してしまう可能性がある。そこで初期値を替えて複数回実行するマルチスタートを用い、その中で最適な母点の組合せを最適解とする。

この解法の特徴は以下の 2 点である。

補題 2.1. 解法終了時に解として厳密解を得ることができる初期 X_p (Step 1) が必ず存在する。

Proof. 初期 X_p としてそのネットワークの p ノードセンター問題の厳密解 X_p^* が与えられたとき、Step 3、Step 4 において X_p は変更されることなく終了し、この X_p が解となる。これは厳密解である。□

補題 2.2. Step 2 から Step 4 の 1 反復において、最大距離が大きくなることはない。つまり、Step 3 終了時点で $F(X'_p) \leq F(X_p)$ となる。

Proof. Step 3 において、母点 $x_i \in X_p$ の頂点集合 $V(x_i)$ の 1 ノードセンター x'_i とする。このとき、最大を最小にするという 1 ノードセンターの性質から、 $\max_{v \in V(x_i)} \{d(x'_i, v)\} \leq \max_{v \in V(x_i)} \{d(x_i, v)\}$ である。これはすべての母点において成立するので、 $\max_{i=1, \dots, p} \{ \max_{v \in V(x_i)} \{d(x'_i, v)\} \} \leq \max_{i=1, \dots, p} \{ \max_{v \in V(x_i)} \{d(x_i, v)\} \}$ 。式 (5) から、 $F(X'_p) \leq F(X_p)$ となる。□

次に、この算法に対する空間計算量の線形化を試みる。ここで単純にある 2 点間の距離を必要とするごとに求めるように変更した場合、対象とするネットワークのすべての頂点を用いて頂点間の距離を求める必要がある。これは頂点が多いときに非常に多くの計算時間を必要とする。そこで、以下のような部分ネットワークを考える。

$$E(x_i) = \{e(v_i, v_j) \in E \mid v_i \in V(x_i) \wedge v_j \in V(x_i)\} \quad (6)$$

とするとき、 $N_{x_i}(V(x_i), E(x_i))$ を x_i の部分ネットワークとする。また、 $d_{N_{x_i}}(v_i, v_j)$ を部分ネットワーク

N_{x_i} での頂点 v_i から頂点 v_j への最短経路距離とする．これに伴い，Step 3 を以下のように変更する．

Step 3. $X'_p = \emptyset$ とする．各母点 $x_i \in X_p$ の部分ネットワーク $N_{x_i}(V(x_i), E(x_i))$ ごとに 1 ノードセンター x'_i を求める． $\max_{v \in V(x_i)} \{d_{N_{x_i}}(x'_i, v)\} < \max_{v \in V(x_i)} \{d_{N_{x_i}}(x_i, v)\}$ となるとき， $X'_p \leftarrow X'_p \cup \{x'_i\}$ ．
 $\max_{v \in V(x_i)} \{d_{N_{x_i}}(x'_i, v)\} = \max_{v \in V(x_i)} \{d_{N_{x_i}}(x_i, v)\}$ であるとき， $X'_p \leftarrow X'_p \cup \{x_i\}$ ．

これにより，いくつかの頂点对の最短経路距離が元のネットワーク N における最短経路距離よりも大きくなる．これは， $N(V, E)$ における $V(x_i)$ の 1 ノードセンターでは， $v_i, v_j \in V(x_i)$ としたとき， v_i から v_j への最短経路には $v_k \notin V(x_i)$ となるような頂点を含んでいる可能性がある．しかし， N_{x_i} 上での v_i から v_j への最短経路を求めたとき， v_k を通ることはできず，結果 $d(v_i, v_j) \leq d_{N_{x_i}}(v_i, v_j)$ となる．つまり，部分ネットワークを作成しその中で最短経路距離を求めることで， N における最短経路距離よりも大きくなる可能性がある．しかし，実際の計算においては，多くの場合に影響を与えないことがわかった．これについては次節で示す．

ここで，各 Step において必要とする空間計算量は，

Step 1. $O(p)$ ：母点を保持するために必要な領域

Step 2. $O(n)$ ：ネットワークボロノイ図の算法による [6, 9]．

Step 3. $O(m + n)$ ：部分ネットワークを実現するために $O(m + n)$ ．また，1 ノードセンターを求めるために必要な空間計算量は，各頂点でその部分ネットワークにおける最も遠い頂点までの距離を記憶する必要があるので， $O(n)$ ．

Step 4. 新たな記憶領域を必要としない．

となり， p は n より必ず小さいので，全体で $O(m + n)$ の空間計算量で解を得ることができる．

距離行列をあらかじめ作成した場合と比較して，当然，その都度頂点間の距離を計算しているため計算時間の増加が予想される．しかし，各部分ネットワークにおいて頂点間の距離を求めるときには，最短経路距離の計算を各部分ネットワークに限定しており，部分ネットワークの頂点数に依存した時間で距離を求めることができる．単純に必要とするごとに頂点間の距離を求めるように変更した場合には，対象とするネットワークのすべての頂点を用いて頂点間の距離を求める必要があり，我々の解法は実時間の面で高速になることが期待できる．

3 評価実験

本節では前節で提案した解法を評価する．なお，本節と次節で示す計算はすべて，Intel Pentium IV プロセッサ (2.53GHz)，メモリ 512MB 搭載の計算機を用いた．

我々の解の精度を見るために厳密解との比較を行う．そこで，まず厳密解を求める方法を示す． p ノードセンター問題は以下のように整数計画問題として捉えることで解を得ることができる [5]．

決定変数

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{新規施設を頂点 } v_j \in V \text{ に配置する場合} \\ 0 & \text{配置しない場合} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{頂点 } v_i \in V \text{ を新規施設 } v_j \in V \text{ に} \\ & \text{割り当てる場合} \\ 0 & \text{割り当てない場合} \end{cases}$$

W = 頂点と割り当てられる施設との最大距離

とすると、以下のように定式化できる。

$$\text{Minimize } W \quad (7)$$

$$\text{Subject to } \sum_{j=1}^n z_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (8)$$

$$z_{ij} \leq y_j \quad i, j = 1, \dots, n \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j = p \quad (10)$$

$$W \geq \sum_{j=1}^n d(v_i, v_j) z_{ij} \quad i = 1, \dots, n \quad (11)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n \quad (12)$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j = 1, \dots, n \quad (13)$$

目的関数 (7) は頂点とそれが割り当てられる施設との間の最大距離を最小にすることを意味している。制約条件 (8) はそれぞれの頂点がただ 1 つの施設に必ず割り当てられることを示している。制約条件 (9) によって、施設が配置されたときのみ、各頂点はその施設に割り当てられることができる。制約条件 (10) は p 個の施設が配置されることを表している。制約条件 (11) では変数 z_{ij} によって最大距離を定義している。最後に、制約条件 (12) および制約条件 (13) は標準的な整数制約である。

表 1 ドローネ三角網に対する p ノードセンターの計算結果

n	p	exact	best	time (s)	app.
100	3	0.466	0.466	2.34	393
100	5	0.322	0.322	2.62	394
100	10	0.223	0.229	1.86	0

表 2 昭和区の道路網に対する p ノードセンターの計算結果

n	p	exact	best	time (s)	app.
100	3	3107.67	3107.67	3.28	323
100	5	2426.46	2426.46	2.80	156
100	10	1633.56	1633.56	2.65	2
200	3	5068.67	5068.67	9.67	246
200	5	3703.24	3703.24	9.37	20
200	10	2486.01	2486.01	7.78	6

実験対象のネットワークとして以下の 3 種類のネットワークを用いた。

- ドローネ三角網
- 愛知県名古屋市昭和区の道路ネットワーク
- OR-Library^{*2} [2] による p メディアン問題用のネットワーク

^{*2} OR-Library <http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/info.html>

表 1 と表 2 は、それぞれドローネ三角網と道路ネットワークに対する距離行列を利用した解法の結果の一部である。このとき、マルチスタートを 10000 回とした。表中では、頂点数 n のネットワークに対する施設数 p のときの厳密解 (exact) と我々の解法による最適解 (best), 計算時間 (time) およびマルチスタート 10000 回における厳密解の出現回数 (app.) である。ドローネ三角網や道路ネットワークにおいては、他のデータを用いた場合においても、ほぼ同様の結果を得ることができた。

表 3 と表 4 は OR-Library にある p メディアン用のデータに対する計算結果である。表 3 は、ポロノイ分割による頂点集合とそれらを結ぶ枝で作成した部分ネットワークを用いて、計算した結果である。また、表 4 は最初に 1 回だけ距離行列を作成して計算した結果である。各表では厳密解 (exact), 最適解 (best) とマルチスタート 1000 回における最適解の数 (#best), マルチスタート 1000 回中最も多く出現した解 (mode) およびその数 (#mode), 総計算時間 (time) と反復回数 (rep.) を示している。なお、表 3 と表 4 では、各データにおける乱数の種は統一した。2 つの表で得られた最適解を比較しても、ほとんど差がない。また、距離行列を作成して解を求めた結果のが最適解の良いものであっても、部分ネットワークを作成して得られた最適解との差の多くは 1 である。前節で述べたように、部分ネットワークを作成することで、枝が限定されるため同じ頂点集合においては 1 ノードセンターの最大距離が大きくなることはあっても、小さくなることはない。にもかかわらず、部分ネットワークを作成して得られた最適解の良いものも存在する (No.10,23,25)。この原因としては、ある反復で 1 ノードセンターの最大距離が大きくなる、つまり、距離行列の場合と次の反復における母点となる頂点が異なり、ネットワークポロノイ図が変わってしまうことを挙げることができる。結果として以降の反復において、より良い解を得ることができた。また、各頂点から等距離にある頂点が複数個存在すること、つまり、1 ノードセンターを計算する際に、最大距離を持つ頂点が複数個存在する可能性がある。距離行列を作成した場合と部分ネットワークを作成した場合とは、このときの 1 ノードセンターとなる頂点の選択が異なる可能性がある。上述の 3 つのネットワークでは、これらが良い方に影響したと考えられる。

また、各頂点から等距離にある頂点が複数個存在することの影響として、ドローネ三角網や道路ネットワークと比較して解の質があまりよくないことを挙げることができる。つまり、ある頂点を考えたとき、等しい距離を持つ母点が 2 つ以上存在する可能性がある。しかし、このときこれらは等距離であるにもかかわらず、作成したプログラムの基準でいずれかの母点に分類される。結果として、ネットワークポロノイ図の分割における頂点集合に偏りが発生し、解の質を悪くしていると思われる。しかし、現実には、このような等距離の母点を 2 つ持つ頂点が大量に存在する状況は考えにくい。実際の多くの問題では大きな影響を与えないと考えられる。

これまでの結果から、 p の数が一定数を超えると実行時間が早くなる一方、解の質が悪くなっていることがわかる。まず実行時間に関しては、ネットワークポロノイ図を求めるのに必要な計算量は p に依存しない。また、 p 個の母点でネットワークを分割し、1 ノードセンターを求めるとき、 p の値が大きくなるにつれ、平均的には 1 ノードセンターの対象となる頂点数が少なくなる。1 ノードセンターの計算時間にはその頂点数が大きく影響しており、なおかつ、全体の計算時間のなかでも p 回の 1 ノードセンターの求解に要する時間の比重が大きいことなどによって、 p の数が一定数を超えると実行時間が早くなることが予想される。また、解の質が悪化する理由としては、 p が大きいとき、ネットワークポロノイ図によって計算された各頂点集合の要素数が平均的に小さくなり、解法中の Step 3 において母点がほとんど移動しないため、反復ごとのネットワークポロノイ図が大きく変更されない。結果、初期母点の影響が非常に大きくなっていることが予想される。これはマルチスタートの改良等を考える必要があり、次節で議論する。

表 3 OR-Library の p メディアン問題用のデータに対する実験結果 (マルチスタート回数 : 1000). 空間計算量の線形化版.

No.	n	m	p	exact	best	#best	mode	#mode	time(s)	rep.
1	100	200	5	127	127	8	148	215	13.84	3.59
2	100	200	10	98	104	1	129	181	8.33	3.81
3	100	200	10	93	95	1	128	91	7.68	4.66
4	100	200	20	74	82	1	102	183	4.09	4.37
5	100	200	33	48	69	1	85	432	2.70	3.82
6	200	800	5	84	91	9	98	109	80.36	3.73
7	200	800	10	64	67	1	84	141	59.22	4.53
8	200	800	20	55	68	2	84	217	23.92	4.79
9	200	800	40	37	55	2	84	395	11.53	4.77
10	200	800	67	20	35	1	70	375	8.56	4.63
11	300	1800	5	59	60	3	73	215	451.64	3.86
12	300	1800	10	51	59	1	72	494	117.37	4.62
13	300	1800	30	36	45	1	54	198	50.19	5.45
14	300	1800	60	26	45	7	60	478	22.16	5.10
15	300	1800	100	18	35	2	44	549	15.97	4.80
16	400	3200	5	47	48	44	55	279	744.58	4.14
17	400	3200	10	39	42	3	53	138	282.70	4.74
18	400	3200	40	28	38	1	50	579	64.73	5.53
19	400	3200	80	18	28	1	35	433	37.44	5.51
20	400	3200	133	13	29	1	44	254	25.70	4.89
21	500	5000	5	40	41	5	47	142	1222.48	3.97
22	500	5000	10	38	44	2	52	460	473.23	4.51
23	500	5000	50	22	29	1	37	264	98.58	5.94
24	500	5000	100	15	25	1	33	339	58.89	5.65
25	500	5000	167	11	22	1	44	286	46.47	5.48
26	600	7200	5	38	40	8	44	177	2258.63	4.14
27	600	7200	10	32	35	1	39	513	1231.67	5.07
28	600	7200	60	18	26	1	57	894	140.70	6.14
29	600	7200	120	13	25	2	36	626	88.61	5.93
30	600	7200	200	9	24	2	40	588	68.80	5.43
31	700	9800	5	30	31	5	34	193	3106.58	4.13
32	700	9800	10	29	33	2	72	753	1260.19	4.59
33	700	9800	70	15	21	1	28	361	206.81	6.38
34	700	9800	140	11	23	4	45	442	139.66	6.01
35	800	12800	5	30	31	6	36	533	4760.69	4.41
36	800	12800	10	27	32	1	42	959	1657.61	4.68
37	800	12800	80	15	22	2	33	416	246.00	6.28
38	900	16200	5	29	31	1	40	862	6608.07	4.34
39	900	16200	10	23	26	1	74	950	2803.25	4.89
40	900	16200	90	13	20	1	23	398	317.15	6.43

表 4 OR-Library の p メディアン問題用のデータに対する実験結果 (マルチスタート回数 : 1000). 距離行列版 .

No.	n	m	p	exact	best	#best	mode	#mode	time(s)	rep.
1	100	200	5	127	127	4	148	276	0.19	3.65
2	100	200	10	98	102	1	129	216	0.23	3.87
3	100	200	10	93	95	1	134	88	0.20	4.72
4	100	200	20	74	82	2	102	178	0.25	4.37
5	100	200	33	48	69	1	85	436	0.31	3.82
6	200	800	5	84	85	1	98	175	0.66	3.82
7	200	800	10	64	67	1	84	166	0.75	4.58
8	200	800	20	55	68	3	84	262	0.66	4.93
9	200	800	40	37	55	2	84	390	0.80	4.81
10	200	800	67	20	36	2	70	374	1.11	4.60
11	300	1800	5	59	59	1	65	226	2.75	4.13
12	300	1800	10	51	59	3	72	756	1.52	4.68
13	300	1800	30	36	45	1	54	209	1.61	5.46
14	300	1800	60	26	45	7	60	495	2.09	5.11
15	300	1800	100	18	35	2	44	548	3.16	4.76
16	400	3200	5	47	47	2	52	233	6.20	4.25
17	400	3200	10	39	42	5	47	156	4.86	4.84
18	400	3200	40	28	38	1	50	603	4.45	5.58
19	400	3200	80	18	28	2	35	411	5.97	5.53
20	400	3200	133	13	29	2	44	250	7.99	4.94
21	500	5000	5	40	40	14	44	196	11.08	4.32
22	500	5000	10	38	44	11	52	541	9.33	4.79
23	500	5000	50	22	30	2	37	233	9.14	5.97
24	500	5000	100	15	24	1	33	366	10.83	5.62
25	500	5000	167	11	23	5	44	284	14.95	5.50
26	600	7200	5	38	38	1	44	261	17.82	4.41
27	600	7200	10	32	34	1	39	684	16.45	5.14
28	600	7200	60	18	26	2	57	894	14.84	6.14
29	600	7200	120	13	23	1	36	612	17.94	5.97
30	600	7200	200	9	24	2	40	581	21.69	5.49
31	700	9800	5	30	30	8	34	502	25.08	4.37
32	700	9800	10	29	33	1	72	769	21.94	4.85
33	700	9800	70	15	20	1	28	371	23.28	6.36
34	700	9800	140	11	23	4	45	429	26.33	6.01
35	800	12800	5	30	30	6	36	351	36.64	4.56
36	800	12800	10	27	31	2	42	983	31.72	5.01
37	800	12800	80	15	22	3	33	472	31.59	6.45
38	900	16200	5	29	30	1	40	927	47.02	4.39
39	900	16200	10	23	26	2	74	989	43.78	5.20
40	900	16200	90	13	20	1	23	431	41.42	6.44

表 5 愛知県の実際の道路ネットワークに対する実験結果 (マルチスタート回数: 10)

	n	m	p	dis.(km)	t.(m)
Seto	58168	62102	10	5141.46	7.19
Agui	33598	35807	5	2952.75	6.23
Showa	14248	18402	5	2793.36	1.05

図 1-3 は、国土地理院の数値地図による行政区分ごとの分割に基づく道路ネットワークに対して p ノードセンターを求めた結果である。表 5 はこれらのネットワークに対する結果をまとめた表であり、マルチスタート回数 10 とした。図中では 10 回中最も良い最大距離 (dis.), 10 回の総計算時間 (t.) を表している。



図 1 愛知県瀬戸市の道路ネットワーク頂点数約 58000 の 10 ノードセンター



図 2 愛知県阿久比町の道路ネットワーク頂点数約 33000 の 5 ノードセンター

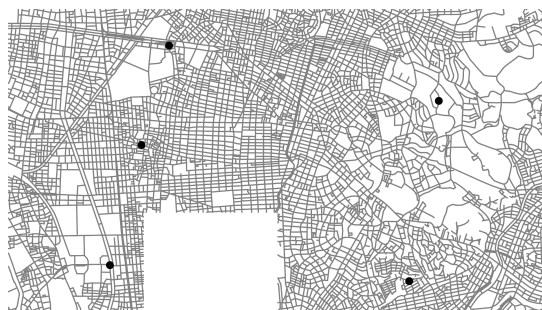


図 3 愛知県名古屋市昭和区の道路ネットワーク頂点数約 14000 の 5 ノードセンター

4 マルチスタートの改良

本節では、マルチスタートの改良を考える。我々の解法は、各反復 (2 節 Step 2-Step4) で 1 回前の最大距離と比較したとき、その距離が悪くなることはない、という特徴がある。現在、 p 個の施設を配置するとき、

マルチスタートの各スタートではすべての母点を乱数で決めている (Step 1) が、各スタートの母点 (これを初期母点とする) における最大距離の値が小さければ、

- それよりも良い解が得られる、
- 反復の回数を減らすことができる、

などを期待できる。

そこで、次のような変更を考える。

Step 1. 1 ノードセンター問題の厳密解を求める。 $i := 2$ 。

Step 2. $(i - 1)$ ノードセンター問題の近似解の頂点と乱数で求めた 1 つの頂点とを初期母点として、 i ノードセンター問題の近似解を求める。

Step 3. $i \neq p$ であるならば、 $i := i + 1$ 、Step 2. へ。そうでなければ、終了。

単純にすべて乱数で母点を決めて、複数回 p ノードセンターを求めるのではなく、 $(i - 1)$ ノードセンターの近似解と乱数で求めた 1 個の頂点とを i ノードセンターを求めるときの初期母点とする。これは以下の理由に基づいている。

1. 施設数 i のときの近似解を求めるとき、施設数 $i - 1$ の近似解に対して 1 つ施設を増やすことになるので、 i の近似解は $i - 1$ のときよりも良いことが期待できる。
2. ネットワークポロノイ図を用いた近似解法は、前節での実験結果などから p の値が小さいほど解の質が高い。

実際にこの方法を実現するために、以下の 2 点の観点から実験・考察を行う。

- i ノードセンターのマルチスタート回数について
- i ノードセンターの初期母点の決定方法について

i ノードセンターのマルチスタート回数について ここで提案するマルチスタート方法を実践するためには、 i ノードセンター ($i = 2, \dots, p$) を求めるときのスタート回数を決めなければならない。ここでは、以下の 2 通りの実験を行った (なお、 $i = 1$ 、つまり 1 ノードセンターは各頂点から最遠となる頂点までの距離を最小とする 1 つの頂点を求めれば良く容易に解を得ることができる)。対象とするネットワークは前節と同様に OR-Library の p メディアン問題用のネットワークを用いた。総マルチスタート回数を M とし、あらかじめ距離行列を作成するプログラムを用いた。

- $i = 2, \dots, p - 1$ まで 1 回ずつ行う。
 $i = 2, \dots, p - 1$ まで 1 回ずつ行い、 $i = p$ のときは残り回数 ($M - (p - 2)$) である。表 6 の “one” の列は、全体でのマルチスタート回数 $M = 1000$ としたときの実験結果である。表中の “basic” とはすべて乱数でマルチスタートを行った結果であり、“diff.” とは “basic” の解との差である。“#starts” は $i = p$ のときのスタート回数である。
- $i = 2, \dots, p$ で可能な限り均等に行う。
 $i = 2, \dots, p - 1$ まで均等 ($M / (p - 1)$ 回)、 $i = p$ のときは残り回数 ($M / (p - 1) + M \bmod (p - 1)$) である。 $i - 1$ の解の中から最も良い解を用いて、 i 回目の初期母点とする。表 6 の “even” の列は、全体でのマルチスタート回数 $M = 1000$ としたときの実験結果である。

表中の乱数の種はすべて統一したが、実際には各方法で必要とする乱数の数と時期が異なるため単純には比較できない。しかし、“even”の解は“basic”の解と比較して6割以上のデータで良くなっている。なお、いずれの方法においても、 i ノードセンターの初期母点の1つは、 $(i-1)$ ノードセンターを母点とするネットワークポロノイ図において最大距離を持つ部分ネットワークの頂点から選んだ。次にこの初期母点の1つの選び方について述べる。

i ノードセンターの初期母点の決定方法について i ノードセンターの初期母点として $(i-1)$ ノードセンターの解に加えて、1つの頂点を選ばなければならない。これをすべての頂点からただ乱数で選ぶのではなく、最大距離を持つ部分ネットワークの中から選ぶことによって、マルチスタートの改良を試みた。最大を最小にするという目的、また最大距離を持つ部分ネットワークの頂点数は他の部分ネットワークのそれと比較して多いことが期待でき、ネットワークポロノイ図が変化しやすいことなどが理由である。以下の2つの実験を行った。

- 最大距離を持つ部分ネットワークの頂点の中から乱数で選ぶ。

表7の“max”は、 $(i-1)$ ノードセンターを母点とするネットワークポロノイ図において、最大距離を持つ部分ネットワークの頂点の中から、 i ノードセンターの初期母点として新たな1つの頂点を選んだ結果である。

- 全体の中から乱数で選ぶ

表7における“all”は、すべての頂点を新たな初期母点の候補として乱数で選んだ。

いずれの方法でも、 i ノードセンターのスタート回数は上述の均等に配分する方法を用いた。“max”の方法では6割以上のデータで良くなっているのに対して、“all”の方法ではわずか2割弱しかない。

マルチスタートに関するまとめと問題点 ここでは2種類の観点からマルチスタートの改良を試みた。いずれの実験も複数の乱数の種で行ったが、ほぼ同様の結果を得ることができた。いずれの場合においても、 p が小さいときには、単にすべての母点を乱数で選ぶのが良いという結果となった。元々 p が小さいときには解の質が高く、提案の改良手法の効果よりも乱数による結果の差異の大きいことが原因の1つと考えられる。これは総マルチスタート回数にも依存すると思われる。

これまでの実験からは頂点数に対して p が一定以上のときは、 i ノードセンターのスタート回数には全体のマルチスタート回数から均等に割り与え、初期母点には最大距離を持つ部分ネットワークの頂点の中から選ぶ(これを均等最大型とする)のが良いという結果を得られた。

表 6 i ノードセンターのマルチスタート回数についての実験結果

No.	p	exact	basic		one				even			
			best	time(s)	best	diff.	time(s)	#starts	best	diff.	time(s)	#starts
1	5	127	127	0.19	127	0	0.16	997	128	1	0.17	250
2	10	98	102	0.23	107	5	0.14	992	102	0	0.16	112
3	10	93	95	0.2	108	13	0.14	992	96	1	0.16	112
4	20	74	82	0.25	83	1	0.16	982	79	-3	0.14	64
5	33	48	69	0.31	70	1	0.17	969	53	-16	0.16	39
6	5	84	85	0.66	96	11	0.39	997	89	4	0.58	250
7	10	64	67	0.75	67	0	0.47	992	70	3	0.5	112
8	20	55	68	0.66	70	2	0.38	982	69	1	0.45	64
9	40	37	55	0.8	49	-6	0.45	962	40	-15	0.44	50
10	67	20	36	1.11	28	-8	0.56	935	25	-11	0.47	25
11	5	59	59	2.75	60	1	1.53	997	60	1	1.95	250
12	10	51	59	1.52	60	1	0.8	992	59	0	1.47	112
13	30	36	45	1.61	48	3	0.91	972	43	-2	1.02	48
14	60	26	45	2.09	36	-9	1.23	942	33	-12	1.09	72
15	100	18	35	3.16	25	-10	1.75	902	23	-12	1.34	20
16	5	47	47	6.2	48	1	3.75	997	48	1	4.84	250
17	10	39	42	4.86	44	2	2.66	992	40	-2	3.42	112
18	40	28	38	4.45	40	2	2.36	962	38	0	2.56	50
19	80	18	28	5.97	23	-5	3.14	922	23	-5	2.77	64
20	133	13	29	7.99	18	-11	4.63	869	17	-12	3.38	83
21	5	40	40	11.08	40	0	5.55	997	40	0	8.45	250
22	10	38	44	9.33	47	3	4.98	992	43	-1	7.13	112
23	50	22	30	9.14	29	-1	5.09	952	29	-1	5.14	40
24	100	15	24	10.83	21	-3	6.14	902	20	-4	5.45	20
25	167	11	23	14.95	16	-7	7.81	835	15	-8	6.53	10
26	5	38	38	17.82	38	0	10.99	997	39	1	14.23	250
27	10	32	34	16.45	38	4	9.03	992	34	0	12.63	112
28	60	18	26	14.84	25	-1	7.47	942	24	-2	8.74	72
29	120	13	23	17.94	18	-5	9.72	882	17	-6	9.06	56
30	200	9	24	21.69	15	-9	13.41	802	13	-11	10.52	10
31	5	30	30	25.08	30	0	15.33	997	30	0	19.69	250
32	10	29	33	21.94	33	0	12.2	992	32	-1	19.55	112
33	70	15	20	23.28	20	0	13.74	932	19	-1	13.05	48
34	140	11	23	26.33	16	-7	15.55	862	15	-8	15.11	34
35	5	30	30	36.64	30	0	21.86	997	33	3	30.31	250
36	10	27	31	31.72	32	1	19.47	992	29	-2	24.88	112
37	80	15	22	31.59	20	-2	19.81	922	19	-3	19.33	64
38	5	29	30	47.02	33	3	28.97	997	29	-1	43.94	250
39	10	23	26	43.78	25	-1	27.02	992	25	-1	33.63	112
40	90	13	20	41.42	18	-2	25.73	912	18	-2	25.52	32

表7 i ノードセンターの初期母点の決定方法についての実験結果

No.	p	exact	basic		max				all			
			basic	time(s)	best	diff.	time(s)	#starts	best	diff.	time(s)	#starts
1	5	127	127	0.22	132	5	0.22	250	127	0	0.2	250
2	10	98	102	0.22	104	2	0.16	112	105	3	0.16	112
3	10	93	94	0.25	102	8	0.16	112	104	10	0.17	112
4	20	74	82	0.25	82	0	0.14	64	80	-2	0.14	64
5	33	48	66	0.28	53	-13	0.16	39	53	-13	0.16	39
6	5	84	86	0.7	89	3	0.58	250	90	4	0.56	250
7	10	64	67	0.74	64	-3	0.52	112	80	13	0.5	112
8	20	55	68	0.7	67	-1	0.42	64	63	-5	0.44	64
9	40	37	56	0.81	44	-12	0.42	50	53	-3	0.44	50
10	67	20	40	1.13	23	-17	0.47	25	33	-7	0.48	25
11	5	59	60	2.69	60	0	2.08	250	60	0	2	250
12	10	51	56	1.55	58	2	1.56	112	56	0	1.48	112
13	30	36	46	1.64	44	-2	1.09	48	44	-2	1.11	48
14	60	26	42	2.11	30	-12	1.14	72	37	-5	1.09	72
15	100	18	34	3.19	20	-14	1.41	20	40	6	1.38	20
16	5	47	47	6.22	48	1	4.88	250	48	1	5.08	250
17	10	39	41	4.83	41	0	3.67	112	41	0	3.72	112
18	40	28	40	4.58	35	-5	2.55	50	40	0	2.55	50
19	80	18	28	5.83	24	-4	2.83	64	35	7	2.8	64
20	133	13	28	7.59	18	-10	3.36	83	28	0	3.42	83
21	5	40	40	11.59	40	0	8.14	250	40	0	8.38	250
22	10	38	44	9.5	43	-1	7.17	112	44	0	7.09	112
23	50	22	30	9.33	26	-4	5.36	40	32	2	5.08	40
24	100	15	26	11.02	19	-7	5.55	20	33	7	5.52	20
25	167	11	22	14.5	15	-7	6.56	10	28	6	6.61	10
26	5	38	38	18.64	39	1	15.49	250	40	2	15.14	250
27	10	32	33	17.14	32	-1	12.91	112	34	1	12.66	112
28	60	18	26	15.25	22	-4	8.67	72	26	0	8.78	72
29	120	13	23	18.03	17	-6	9.19	56	23	0	9.3	56
30	200	9	20	21.61	13	-7	10.7	10	29	9	10.44	10
31	5	30	30	26.24	32	2	19.91	250	31	1	19.49	250
32	10	29	33	23.03	30	-3	18.61	112	33	0	19.03	112
33	70	15	22	23.42	20	-2	14.05	48	23	1	13.53	48
34	140	11	22	27.06	15	-7	15.09	34	26	4	14.78	34
35	5	30	30	37.73	31	1	29.94	250	31	1	31.83	250
36	10	27	31	33.02	29	-2	25.33	112	42	11	27.19	112
37	80	15	22	32.38	20	-2	19.52	64	24	2	19.2	64
38	5	29	30	48.94	29	-1	42.03	250	40	10	39.52	250
39	10	23	25	44.72	26	1	34.95	112	74	49	34.36	112
40	90	13	20	42.61	18	-2	25.47	32	21	1	26.03	32

表 8 空間計算量を線形化したプログラムでの実験結果

No.	p	exact	basic		even-max1000				even-max500			
			best	time(s)	best	diff.	time(s)	prop.	best	diff.	time(s)	prop.
1	5	127	127	13.84	127	0	13.30	0.96	128	1	6.58	0.48
2	10	98	104	8.33	102	-2	8.34	1	105	1	4.25	0.51
3	10	93	95	7.68	96	1	7.91	1.03	109	14	3.72	0.48
4	20	74	82	4.09	84	2	4.63	1.13	80	-2	2.28	0.56
5	33	48	69	2.70	53	-16	3.84	1.42	48	-21	2.11	0.78
6	5	84	91	80.36	89	-2	79.05	0.98	92	1	39.49	0.49
7	10	64	67	59.22	73	6	64.66	1.09	69	2	31.52	0.53
8	20	55	68	23.92	67	-1	32.56	1.36	57	-11	15.33	0.64
9	40	37	55	11.53	41	-14	15.95	1.38	43	-12	8.67	0.75
10	67	20	35	8.56	25	-10	16.91	1.97	26	-9	6.88	0.80
11	5	59	60	451.64	60	0	327.91	0.73	60	0	166.48	0.37
12	10	51	59	117.37	56	-3	137.83	1.17	59	0	68.33	0.58
13	30	36	45	50.19	44	-1	74.84	1.49	43	-2	34.64	0.69
14	60	26	45	22.16	32	-13	33.38	1.51	33	-12	16.91	0.76
15	100	18	35	15.97	21	-14	26.19	1.64	24	-11	16.97	1.06
16	5	47	48	744.58	49	1	703.69	0.95	49	1	339.38	0.46
17	10	39	42	282.70	44	2	285.09	1.01	43	1	145.53	0.51
18	40	28	38	64.73	34	-4	95.53	1.48	36	-2	51.44	0.79
19	80	18	28	37.44	23	-5	61.63	1.65	23	-5	27.13	0.72
20	133	13	29	25.70	17	-12	48.74	1.9	17	-12	19.00	0.74
21	5	40	41	1222.48	41	0	1146.19	0.94	41	0	522.30	0.43
22	10	38	44	473.23	41	-3	636.53	1.35	41	-3	300.11	0.63
23	50	22	29	98.58	29	0	184.91	1.88	31	2	104.50	1.06
24	100	15	25	58.89	20	-5	99.52	1.69	19	-6	54.52	0.93
25	167	11	22	46.47	15	-7	95.42	2.05	15	-7	66.72	1.44
26	5	38	40	2258.63	40	0	2737.45	1.21	39	-1	1330.84	0.59
27	10	32	35	1231.67	34	-1	1781.70	1.45	34	-1	951.74	0.77
28	60	18	26	140.70	22	-4	271.86	1.93	22	-4	137.81	0.98
29	120	13	25	88.61	18	-7	148.22	1.67	19	-6	81.06	0.91
30	200	9	24	68.80	14	-10	90.78	1.32	12	-12	53.02	0.77
31	5	30	31	3106.58	32	1	2831.44	0.91	31	0	1416.02	0.46
32	10	29	33	1260.19	31	-2	2494.38	1.98	31	-2	1059.98	0.84
33	70	15	21	206.81	20	-1	300.97	1.46	19	-2	140.98	0.68
34	140	11	23	139.66	15	-8	212.50	1.52	16	-7	85.80	0.61
35	5	30	31	4760.69	31	0	4703.69	0.99	30	-1	2363.81	0.50
36	10	27	32	1657.61	30	-2	2558.49	1.54	28	-4	1216.64	0.73
37	80	15	22	246.00	19	-3	358.56	1.46	20	-2	198.44	0.81
38	5	29	31	6608.07	29	-2	10300.00	1.56	31	0	3746.59	0.57
39	10	23	26	2803.25	25	-1	5335.88	1.9	26	0	3172.70	1.13
40	90	13	20	317.15	17	-3	454.86	1.43	17	-3	211.61	0.67

表 8 は、空間計算量を線形化したプログラムによる実験結果である。表中の “even-max1000” は均等最大型でマルチスタート回数を 1000 としたときの結果である。表中の “prop.” の列はすべて乱数で初期母点選んだ “basic” の計算時間に対して、均等最大型は何倍の計算時間を要したかを表している。多くのデータにおいて計算時間が増加しており、最も増えたもので約 2 倍の計算時間を要している。 p が小さいとき各部分ネットワークの頂点数は p が大きいときのそれと比較して平均的に多くなる。部分ネットワークの頂点数が多くなると 1 ノードセンターを求めるのに要する時間が大きくなるのが、計算時間の増加の原因であろう (1 ノードセンターを求める際の時間計算量は $O(mn + n^2 \log n)$ である)。万を超える頂点数のネットワークに対して解を得たいとき、これは大きな問題となる可能性がある。また、“even-max500” は均等最大型でマルチスタート回数を 500 としたときとマルチスタート回数 1000 回のすべてにおいて乱数で初期母点を選んだものとを比較したものである。やはり各方法で必要とする乱数の数と時期が異なるため単純には比較できないが、総スタート回数が半分になっているにもかかわらず、多くのデータで均等最大型の方が良い結果となった。今後は特に p が大きいときのマルチスタートをどのように配分すべきかを考える必要がある。

5 まとめ

本稿では、ネットワークポロノイ図を利用した p ノードセンター問題の近似解法を提案した。 p ノードセンターが得られた状況でこれらを母点とするネットワークポロノイ図を考える。 p ノードセンター問題の中で最遠距離を持つ施設は、自身を母点とする部分ネットワークにおいて、1 ノードセンターになっていることに注目した。提案する手法は、ネットワークポロノイ図の計算と 1 ノードセンターの計算とを反復するという単純なものであるが、マルチスタートと組み合わせることで十分に強力なものとなった。我々の手法は、以下のような 2 つの特徴を持っている。1 つは厳密解となる入力が必ず存在することであり、2 つ目は、反復ごとに得られる解は、1 回前と等しい、もしくはより良い解を得ることができることである。

また、ネットワークポロノイ図によって作成される各母点の頂点集合に基づき部分ネットワークを作成することで、空間計算量の線形化を試みた。既存の多くの解法が距離行列を与えられるもしくはあらかじめ計算することを前提としている。これに対して、我々の解法の基本的な考え方は必要とするたびに距離を計算するというものであるが、ネットワークポロノイ図による分割を利用することで効率良く計算を行っている。

いくつかの種類のネットワークに対する計算機実験から、頂点間の距離に等距離のものをあまり含まないネットワークでは、マルチスタートを行うことで多くの場合に厳密解を得られることがわかった。また、頂点数に対して p の値が小さいときに、より良い解を得やすい結果となった。実際の数万個の頂点からなるネットワークに対しても、現実的な時間で近似解を得ることができた。

また、マルチスタートについても、単にすべて乱数で行うだけでなく、我々の手法の反復ごとに必ず解が等しいもしくは良くなるという性質を利用して、 $(i - 1)$ ノードセンター問題の近似解を利用して i ノードセンター問題の近似解を求めるという改良を試みた。

今後の課題としては、さらなるマルチスタートの改良や、提案手法を p 絶対センター問題 [3, 14, 15] に拡張することを挙げるができる。また、他のネットワークに対するさらなる計算機実験を行うことなどがある。

謝辞

本研究は日本学術振興会科学研究費補助金 (基盤研究 A(2)) 16201035 の援助を受けた。

参考文献

- [1] Akyildiz, I. F., Su, W., Sankarasubramaniam, Y. and Cayirci, E.: A Survey on Sensor Networks, *IEEE Communications Magazine*, (2002), 102–114.
- [2] Beasley, J.: OR-Library: distributing test problems by electronic mail, *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 41 (1990), 1069–1072.
- [3] Bozkaya, B. and Tansel, B.: A spanning tree approach to the absolute p -center problem, *Location Science*, Vol. 6 (1998), 83–107.
- [4] Daskin, M. S.: *Network and discrete location: models, algorithms, and applications*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley & Sons, New York, 1995.
- [5] Daskin, M. S.: A new approach to solving the vertex p -center problem to optimality: Algorithm and computational results, in Japanese (訳: 鈴木勉), *Communications of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 45 (2000), 428–436.
- [6] Erwig, M.: The graph Voronoi diagram with applications, *Networks*, Vol. 36 (2000), 156–163.
- [7] Hakimi, S. L.: Optimum location of switching centers and the absolute centers and medians of a graph, *Operations Research*, Vol. 12 (1964), 450–459.
- [8] Hakimi, S. L.: Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems, *Operations Research*, Vol. 13 (1965), 462–475.
- [9] Hakimi, S. L., Labbé, M. and Schmeiche, E.: The Voronoi partition of a network and its implications in location theory, *INFORMS Journal on Computing*, Vol. 4 (1992), 412–417.
- [10] Kariv, O. and Hakimi, S. L.: An algorithmic approach to network location problems. I: The p -centers, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 37 (1979), 513–538.
- [11] Li, L. and Halpern, J. Y.: Minimum-Energy Mobile Wireless Networks Revisited, *In Proc. IEEE International Conference on Communications (ICC)*, (2001).
- [12] Minieka, E.: The m -center problem, *SIAM Review*, Vol. 12 (1970), 138–139.
- [13] Mirchandani, P. B. and Francis, R. L.: *Discrete Location Theory*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley & Sons, New York, 1990.
- [14] Plesník, J.: A heuristic for the p -center problem in graphs, *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 17 (1987), 263–268.
- [15] Plesník, J.: Two heuristics for the absolute p -center problem in graphs, *Math. Slovaca*, Vol. 38 (1988), 227–233.