競合を考慮したハブ・ネットワークデザインモデルの構築†

佐々木 美裕
南山大学 数理情報学部 数理科学科
mihiro@ms.nanzan-u.ac.jp

概 要

本論文では, 競合を考慮したハブ配置モデルとして提案されているシュタッケルベルグ型ハブ配置モデルに改良を加え, 新しくハブ・ネットワークデザインモデルを構築する．実用性の観点から重要な要素とされる枝流量下限制約を設け，ハブと枝の配置および OD ペアごとの運航ルートを同時に求める総合的なネットワーク設計を行うモデルの構築を目指す.

1 はじめに

ハブ配置モデルの研究は，O'Kelly [4] が離散型モデルを提案し，2 次整数計画法として定式化したことにはじまる．これまでにさまざまなタイプのモデルや解法が研究されてきたが，他社との競合を考慮したモデルはあまり研究されていない．Marianov ら [2] は，競合を考慮したハブ配置モデルをはじめて提案し，タブー探索による近似解法を用いて計算実験を行った．このモデルは，すでに競合相手が存在するマーケットに新たに参入する会社が，競合相手から奪うことのできる客数を最大にするハブの配置を求めるモデルである．一方，Sasaki ら [5] は，規模の異なる複数の競合会社が先手と後手に分かれて利益最大化を目的としてハブを配置するシュタッケルベルグ型ハブ配置モデルを提案し，2 段階最適化問題として定式化した．さらに，競合相手の存在がハブ配置や利益に与える影響について，分析結果を報告している．

本論文では，シュタッケルベルグ型ハブ配置モデルを改良し，枝流量下限制約を設けることによってハブの配置だけでなく，枝の配置も求めるネットワークデザインモデルを構築する．競合のない枝流量下限制約を課したモデルは，Campbell [1] によって提案されているが，これまでに解法および計算実験結果についての報告はない．競合と枝流量下限制約の双方を考慮することにより，実用的なモデルの構築が可能となる．次節以降の構成は次のとおりである．第 2 節では，シュタッケルベルグ型ハブ配置モデルを紹介し，改良すべき点について述べる．第 3 節では，第 2 節での議論をもとに，新しくハブ・ネットワークデザインモデルを提案し，2 段階最適化問題として定式化する．第 4 節では，結論と今後の課題について述べる．

†本研究は，科学研究費 (若手研究 (B)) および南山大学パッヘ I-A-2 の助成を受けた.

2 シュタッケルベルグ型ハブ配置モデル

本節では, 提案するネットワークデザインモデルの基本となるシュタッケルベルグ型ハブ配置モデル (以下, SHLP) について簡単に説明し, 改良すべき点について述べる.

2.1 モデルの概要

SHLP の概要は, 以下のとおりである.

- 利益最大化を目的とする 1 つの大規模な会社と，同じく利益最大化を目的とするその他複数の中小規模の会社がそれぞれ 1 つずつ平面上にハブを配置してサービスを提供する.
- 出発地から目的地までの直行距離に対する実際の移動距離 (ハブを経由した際の距離距離) の比を, そのハブ経由サービスの不便度とする. 各サービスの不便度に関するロジット関数 [3] によって利用者が配分されるものとする.

  例えば，k 種類のサービスが利用可能である OD ペアにおいて，それぞれのサービスの不便度を $u_i, i = 1, \cdots, k$ で表すとき，サービス i が獲得する利用者の割合は
  $$L_i(u) = \frac{\exp[-\alpha u_i]}{\sum_{j=1}^{k} \exp[-\alpha u_j]}, \quad i = 1, \cdots, k, \tag{1}$$
  で与えられるものとする．ただし，$\alpha > 0$ は適当なパラメータであり，α が大きくなるにつれて all-or-nothing の配分に近付く.
- サービスの価格 (運賃) は，サービスを提供する会社によらず, OD ペアが同じであればすべて同じであると仮定し, 価格競争はないものとする.
- 後手が提供するサービスは先手が提供するサービスの部分集合とし，後手同士のサービスの集合は互いに素であり，後手同士には競合はないものとする.
- 先手がハブを配置したあと，後手の会社は同時にハブを配置するものとする．後手は，先手の配置を知った上で自社のハブの配置を決定し，先手は，各後手が最適配置をすると予測して自社のハブの配置を決定する.
- ハブは経由するだけの施設とし，ハブ自身には需要はないものと仮定する．また，容量制約もないものとする.
- サービスはすべて 1-stop サービスとし，2 つ以上のハブを経由したり，直行便で目的地に到達することはないとする.
- 上記の仮定のもと, 先手および後手各社の最適なハブの配置 (座標) を求める.

2.2 モデルの改良

計算機実験によって, SHLP に関するいくつかの興味深い結果が得られているが [5], 同時に改良すべき点も浮かび上がった. 先手はすべての OD ペアにサービスを提供し, 後手がサービスを提供する OD ペアは所与という仮定を設けたために, 極端に流量の少ない枝が多く存在する結果が得られることがある. 実際には, 流量が少なく採算の合わないサービスからは撤退するなど, サービス提供に関する意思決定については, 各社にゆだねられているのが一般的である. この点を改良するために, 枝の流量下限制約を設け, 一定以上の乗客の確保ができない場合はサービスの提供を行わないことを可能にすることが実用上有効と考えられる. 同時に, すべての OD ペアにサービスを提供するという仮定をはずし, ハブと枝の双方の配置を求め, 最適なハブ・ネットワークを設計するモデルの構築が有効である.

3 ハブ・ネットワークデザインモデルの定式化

先手会社を A 社とし, 後手会社を B 社とする. ここでは, 後手会社は 1 社のみとし, 先手と後手の規模の差は特に問わない. また, 各 OD ペアにサービスを提供するかどうかを表すデザイン変数を導入する. それぞれの会社の決定変数を以下のように表す.

x: A 社のハブの配置, $x \in \Re^2$.
y: B 社のハブの配置, $y \in \Re^2$.
u_π: A 社が OD ペア π にサービスを提供するとき 1, そうでないとき 0 をとる 0-1 変数.
v_π: B 社が OD ペア π にサービスを提供するとき 1, そうでないとき 0 をとる 0-1 変数.

さらに, 次の記号を定義する.

N: 需要点 (ノード) の集合, $|N| = n$.
d_i: ノード $i \in N$ の座標, $d_i \in \Re^2$.
Π: OD ペアの集合, $\Pi \subseteq N \times N$.
t_π: OD ペア π における流量下限 (割合), $0 \leq t_\pi \leq 0.5$.
W_π: OD ペア $\pi \in \Pi$ の需要.
F_π: OD ペア $\pi \in \Pi$ に対する価格 (運賃).
$D_\pi(x)$: $x \in \Re^2$ に配置されたハブを経由して OD ペア π を移動したときの移動距離.
M: 十分大きな数.

枝流量下限制約については, 流量そのものに対する下限を設けるのではなく, 獲得できる乗客の割合に下限を設ける. サービスの不便度については SHLP と同様に定義し, 乗客の配分は不便度に関するロジット関数 [3] に従うものとする. したがって, OD ペア $\pi = (i, j)$

間を $x \in \Re^2$ に配置された A 社のハブを利用して移動する場合の不便度 $\eta_\pi^A(x)$ は

$$\eta_\pi^A(x) = D_\pi(x)/ \parallel d_i - d_j \parallel,$$

と表される. 同様にして, OD ペア $\pi = (i, j)$ 間を $y \in \Re^2$ に配置された B 社のハブを利用して移動する場合の不便度 $\eta_\pi^B(y)$ は

$$\eta_\pi^B(y) = D_\pi(y)/ \parallel d_i - d_j \parallel .$$

と表される.

ここで, A 社と B 社がが自社のハブをそれぞれ $x \in \Re^2$, $y \in \Re^2$ に配置したと仮定する. ある OD ペア π において, A 社も B 社もサービスを提供していれば, A 社が獲得できる乗客の割合は次のように表すことができる.

$$\phi_\pi(x, y) = \frac{\exp[-\alpha\eta_\pi^A(x)]}{\exp[-\alpha\eta_\pi^A(x)] + \exp[-\alpha\eta_\pi^B(y)]}. \tag{2}$$

ただし, $\alpha > 0$ は定数である. 同様にして, B 社が獲得できる乗客の割合は次のように表すことができる.

$$\psi_\pi(x, y) = \frac{\exp[-\alpha\eta_\pi^B(y)]}{\exp[-\alpha\eta_\pi^A(x)] + \exp[-\alpha\eta_\pi^B(y)]} = 1 - \phi_\pi(x, y). \tag{3}$$

(2)(3) に注意し, 新たに導入したデザイン変数 u_π, v_π を用いると, 実際に A 社と B 社が獲得する乗客の割合は, それぞれ,

$$\Phi_\pi(x, y, u, v) = \frac{\exp[-\alpha\eta_\pi^A(x)]u_\pi}{\exp[-\alpha\eta_\pi^A(x)]u_\pi + \exp[-\alpha\eta_\pi^B(y)]v_\pi}\ , \tag{4}$$

$$\Psi_\pi(x, y, u, v) = \frac{\exp[-\alpha\eta_\pi^B(y)]v_\pi}{\exp[-\alpha\eta_\pi^A(x)]u_\pi + \exp[-\alpha\eta_\pi^B(y)]v_\pi}\ , \tag{5}$$

と表され, A 社と B 社の総収入は, それぞれ次のように与えられる.

$$f(x, y, u, v) = \sum_{\pi\in\Pi} F_\pi W_\pi \Phi_\pi(x, y, u, v), \tag{6}$$

$$g(x, y, u, v) = \sum_{\pi\in\Pi} F_\pi W_\pi \Psi_\pi(x, y, u, v). \tag{7}$$

B 社は, A 社の配置を知った上で総収入最大化を目的に自社のハブを配置するので, B 社の問題は次のように表すことができる.

[HNDP-B]

$$\begin{aligned}
\text{maximize}_{y,v} \quad & g(x,y,u,v) \\
\text{subject to} \quad & t_\pi - \psi_\pi(x,y) \le M(1-v_\pi), && \pi \in \Pi, \qquad (8) \\
& y \in Y \subseteq \Re^2, \\
& v_\pi \in \{0,1\}, && \pi \in \Pi,
\end{aligned}$$

ただし, Y は B 社のハブの配置に可能領域である．制約条件 (8) は, 流量下限に満たない割合の乗客しか獲得できない OD ペアに対して, B 社はサービスを提供できないことを表している．B 社が HNDP-B を解いた結果, A 社の配置 $x \in X$ に対して, 最適配置 $y \in Y$ を求めることができるとすると, A 社は $y \in Y$ が HNDP-B の最適解であるという条件のもと, 自社の問題を解くことになる．したがって, A 社の問題は次に示す 2 段階最適化問題として定式化できる．

[HNDP-A]

$$\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & f(x,y,u,v) \\
\text{subject to} \quad & t_\pi - \phi_\pi(x,y) \le M(1-u_\pi), \quad \pi \in \Pi, \qquad (9) \\
& x \in X \subseteq \Re^2, \\
& u_\pi \in \{0,1\}, \quad \pi \in \Pi, \\
& [y,v] \in \arg\max\{g(x,y,u,v) | y \in Y, v \in V\}
\end{aligned}$$

ここで, Y および V は HNDP-A の実行可能領域である．制約条件 (9) は, 流量下限に満たない割合の乗客しか獲得できない OD ペアに対して, A 社はサービスを提供できないことを表している．

このモデルにおいて, 全需要が必ず満たされることを確認しよう．(4)–(7) より, $f(x,y,u,v)$ は u_π の増加関数であり, $g(x,y,u,v)$ は v_π の増加関数である．したがって, $\phi_\pi(x,y) \ge t_\pi$ が成立する OD ペア π については, 最適解において必ず $u_\pi = 1$ となり, 同様に $\psi_\pi(x,y) \ge t_\pi$ が成立する OD ペア π については, 最適解において必ず $v_\pi = 1$ となる．一方, (3) により, $\phi_\pi(x,y) + \psi_\pi(x,y) = 1, \forall\pi$ が成立し, $0 \le t_\pi \le 0.5$ であるため, 少なくとも $\phi_\pi(x,y) \ge t_\pi$, $\psi_\pi(x,y) \ge t_\pi$ のいずかが成り立つ．以上により, すべての OD ペアにおいて, 少なくとも 1 社は必ずサービスを提供することになる．また, 明らかに, A 社が OD ペア π にサービスを提供し, B 社が提供しなかった場合, すなわち, $u_\pi = 1, v_\pi = 0$ の場合, A 社が OD ペア π の乗客をすべて獲得し, 逆に B 社が OD ペア π にサービスを提供し, A 社が提供しなかった場合, すなわち, $u_\pi = 0, v_\pi = 1$ の場合, B 社が OD ペア π の乗客をすべて獲得する．A 社も B 社も OD ペア π にサービスを提供する場合, すなわち, $u_\pi = v_\pi = 1$ の場合は, 乗客はロジット関数 (2) および (3) に従って配分される．以上により, 全需要は満たされることが確認できた．

4 まとめ

本論文では, シュタッケルベルグ型ハブ配置モデルを改良し, 新しく競合を考慮したハブ・ネットワークデザインモデルを提案し, 2 段階最適化問題として定式化した. 従来のハブ配置モデルでは, 必ず用いられていたすべての路線にサービスを提供するという仮定をはずし, 流量下限制約を導入することにより, 競合相手が存在するマーケットにおけるネットワークデザインモデルの構築ができた. 一方, シュタッケルベルグ型ハブ配置モデルは, 後手の問題が制約なし非線形計画問題であったのに対し, この問題は, 後手の問題も 0-1 整数計画問題となっており, 実行可能解を求めることも困難である. このモデルの解を求める方法を提案するとともに, より一般化した実用性重視のモデル構築が今後の重要な課題である.

参考文献

[1] J. F. Campbell: Integer programming formulations of discrete hub location problems, *European Journal of Operational Research*, **72** (1994) 387–405.

[2] V. Marianov, D. Serra and C. Revelle: Location of hubs in a competitive environment. *European Journal of Operational Research*, **114** (1999) 363–371.

[3] D. McFadden: Conditional logit analysis of qualitative choice behavior, In P. Zarembka (ed.): *Frontiers in Econometrics*, Academic Press, NY, 1974, pp. 105–142.

[4] M. E. O'Kelly: A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities, *European Journal of Operational Research*, **32** (1987) 393–404.

[5] M. Sasaki and M. Fukushima: Stackelberg hub location problem, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **44** (2001) 390–402.