

ロバスト尺度推定量のバイアス

南山大学経営学研究科 安藤雅和
南山大学数理情報学部 木村美善

1 はじめに

ロバスト推定は、標本の確率分布が仮定された分布（モデル分布）からずれていたり、少し異なっている場合に、モデル分布のもとで「よい」推定量がどのような影響を受けるかを調べたり、このような場合にふさわしい推定量はどのようなものかを研究することを中心課題とする統計学の分野である．ロバスト推定では、実際の確率分布はモデル分布に必ずしも一致するものではなく、せいぜい近似的に等しいといえるだけである、という立場をとっている．したがって、ロバスト推定の観点からすれば、モデル分布のもとでかなりのよさを保持しつつ、仮定からの「ずれ」があってもその影響をさほど受けず、「よさ」の損失の少ない、いわゆるロバスト（頑健な）推定量が望ましい、ということになる．ロバスト推定量であれば、モデル分布が現実の確率分布とずれていても安心して使用できるということである．ロバスト推定理論では、通常、標本の分布のモデル分布からのずれ具合を表現するためにモデル分布の近傍を用いている．近傍の種類と大きさをえることによって、ずれ具合を決めるわけである．

推定量のロバストネス（頑健性）をはかる測度としては、様々なものが提案されているが、最も重要なもののひとつは、推定量の近傍上での最大バイアスである．これは推定量の大域的なロバストネスを考察するうえで有用な情報を多く持っており、「ずれ」に対処することのできる範囲の限界を表す破綻点（breakdown point）やモデル分布からの微小な「ずれ」に対する影響の大きさを表す GES（gross error sensitivity）に関する情報も含んでいる．最大バイアスをロバストネスの主要な測度とし、これを最小にする推定量を求めるというアプローチ（bias robustness approach）は、Huber（1964,1981）により提唱されたが、その重要性が最近再認識されつつある．このアプローチからの研究としては、Martin, Yohai and Zamar（1989）、Martin and Zamar（1993）、He and Simpson（1993）、Chen（1998）などがある．

尺度（scale）の推定問題は、重要なロバスト推定問題のひとつであるが、単独で純粋な問題として扱われるというよりは、位置母数あるいは回帰母数の推定問題における補助的な推定問題として取り扱われることが多い．この場合には、尺度推定量は自分自身の推定量の「よさ」のみでなく、同時に主たる位置推定量あるいは回帰推定量の「よさ」を可能な限り損なわないようなものであることが望まれる．この観点に立てば、尺度のロバスト推定量としては、他のロバストネスの測度（例えば、効率など）より、バイアスに関するロバストネスを重視することになる．尺度のロバスト推定量としては、Hampel（1974）により奨励された MAD（the median absolute deviation）がよく用いられている．しかし、Rousseeuw and Croux（1993）は MAD が対称分布に強く依存しており、非対称分布に対しては不十分な対応しかできないことから、MAD をさらに改善できる余地があるとして、新しい2つの推定量 S_n , Q_n を提案した．そして、これらの3つの推定量について、 ϵ -contamination 近傍上での2種類のバイアス、すなわち、外破バイアス（explosion bias）と内破バイアス（implosion bias）を導出し、その比較を行うとともに S_n と Q_n が MAD より高い効率をもつことを示した．

本論文の目的は、モデルからの「ずれ」を表現するために、ある特別容量（special capacity）により定義される近傍（特別容量近傍と呼ぶ）を採用し、MAD, S_n , Q_n を含む代表的な5つのロバスト推定量の特別容量近傍上での内破バイアスを導出することであり、そして、モデル分布

が正規分布の場合に内破バイアスの図表を与え、これを考察することである．特別容量近傍は ε -contamination 近傍と total variation 近傍を含み、Rieder (1977) によって導入された近傍をさらに一般化したものである．したがって、我々の結果は、 ε -contamination 近傍を用いた Rousseeuw and Croux (1993) による内破バイアスの結果を拡張したものとなっている．

次の第2節では、尺度推定モデル、5つのロバスト推定量の定義および第3節以降の議論に必要な基本的事項を述べる．第3節から第7節までは、それぞれ、5つの推定量である MAD_n , S_n , Q_n , LMS_n , U_n の最小バイアスの導出にあて、第8節では最小バイアスの図表とその考察を与える．第9節はまとめである．

2 定義と基本的結果

$\mathcal{X}$ を実数空間、 $\mathcal{B}$ を $\mathcal{X}$ の部分集合からなる Borel σ -集合体とし、 $\mathcal{M}$ を $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ 上の確率測度の全体からなる集合とする．また、 $F_0 \in \mathcal{M}$ とし、 F_0 は原点对称で単峰な密度関数 f_0 をもつと仮定する．Ando and Kimura (2000) は F_0 の近傍として

$$(2.1) \quad \mathcal{P}_{F_0}(c, \gamma) = \{F \in \mathcal{M} \mid cF_0(B) - (c + \gamma - 1) \leq F(B) \leq cF_0(B) + \gamma, \forall B \in \mathcal{B}\},$$

を提案した．ここで $0 \leq \gamma < 1$, $1 - \gamma \leq c < \infty$ ．この近傍は ε -contamination 近傍と total variation 近傍を含み、Rieder (1997) によって導入された特別容量に基づく近傍をさらに一般化したものである．

次の定理は Ando and Kimura (2000) の Theorem 2.1 であり、(2.1) の近傍の一つの特徴づけを与える．

定理 2.1 $0 \leq \gamma < 1$, $1 - \gamma \leq c < \infty$ に対して

$$(2.2) \quad \mathcal{P}_{F_0}(c, \gamma) = \{F = c(F_0 - W) + \gamma K \mid W \in \mathcal{W}_{F_0}(c, \gamma), K \in \mathcal{M}\},$$

が成り立つ．ここで $\mathcal{W}_{F_0}(c, \gamma)$ は

$$\mathcal{W}_{F_0}(c, \gamma) = \begin{cases} \left\{ W \mid W \leq F_0, \left(\frac{c}{c + \gamma - 1} \right) W \in \mathcal{M} \right\}, & \text{if } c \neq 1 - \gamma, \\ \phi, & \text{if } c = 1 - \gamma, \end{cases}$$

であり、 $W \leq F_0$ は $\forall B \in \mathcal{B}$ に対して $W(B) \leq F_0(B)$ が成り立つことを意味する．

注 2.1 Ando and Kimura (2000) の Theorem 2.1 は $\mathcal{X}$ が一般的なポーランド空間 (完備, 可分距離空間) の場合について (2.1) の近傍の特徴づけ定理を与えている．

いま、 z を F_0 の上側確率 $\frac{100(c + \gamma - 1)}{2c}\%$ 点、 $\hat{W}$ を

$$\hat{W}(B) = F_0(B \cap [-z, z]^c), \quad \forall B \in \mathcal{B},$$

により定義される測度, Δ_0 を原点 0 で確率 1 をもつ確率測度とし, 確率測度 $\hat{F}$ を

$$(2.3) \quad \hat{F} = c(F_0 - W) + \gamma \Delta_0,$$

により定義する. ここで $\hat{F} \in \mathcal{P}_{F_0}(c, \gamma)$ であることに注意する.

このとき, Ando and Kimura (2000) の Theorem 3.1 として与えられた次の基本定理を得る.

定理 2.2 X と Y を独立で同一な分布 $F \in \mathcal{P}_{F_0}(c, \gamma)$ に従う確率変数とする. このとき, $|X - Y|$ の分布は $\hat{F}$ のもとで確率的に最小となる. すなわち,

$$\sup_{F \in \mathcal{P}_{F_0}(c, \gamma)} P_{F \times F}(|X - Y| \leq t) = P_{\hat{F} \times \hat{F}}(|X - Y| \leq t), \quad 0 \leq t < \infty$$

が成り立つ.

本論文では特別容量近傍 (2.1) を用いて, 尺度母数の推定問題を次のように定式化する. $X_1, \dots, X_n$ を独立で同一な分布 F に従うものとし, F は次の F_0 の近傍に属すると仮定する.

$$(2.4) \quad \mathcal{P}_{F_0}(c, \gamma) = \left\{ F \mid F(x) = c(F_0 - W) \left(\frac{x - \mu_0}{s_0} \right) + \gamma K(x), \right. \\ \left. x \in R, W \in \mathcal{W}_{F_0}(c, \gamma), K \in \mathcal{M} \right\},$$

ここで μ_0 は未知の位置母数, $s_0 > 0$ は推定すべき未知の尺度母数であり, $\mathcal{W}_{F_0}(c, \gamma)$, $\mathcal{M}$ は (2.2) で定義されたものである. μ_0 は局外母数とし, s_0 を推定することが目的である. s_0 の代表的なロバスト推定量として次のものが提案されている.

$$(2.5) \quad \begin{aligned} MAD_n &= a \cdot \text{med}_i \{ |X_i - \text{med}_j X_j| \}, \\ S_n &= b \cdot \text{med}_i \{ \text{med}_j |X_i - X_j| \}, \\ Q_n &= d \cdot \{ |X_i - X_j|, i < j \}_{(k)}, \\ LMS_n &= a' \cdot \min_i |X_{(i+h-1)} - X_{(i)}|, \\ U_n &= a \cdot \min_i \{ \text{med}_j |X_i - X_j| \}, \end{aligned}$$

ここで, a, b, d と a' は定数, $k = \binom{h}{2}$, $h = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ であり, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ は順序統計量である. これらの尺度推定量はモデル分布が正規分布のもとで Fisher-consistent となるように通常は $a = 1.4826, b = 1.1926, d = 2.2219, a' = 0.7413$ が用いられている.

MAD_n (メディアン絶対偏差) は最もよく用いられるロバスト尺度推定量である. S_n, Q_n は MAD_n に対抗する推定量として Rousseeuw and Croux (1993) によって提案されたもので, 50% 破綻点と MAD_n より高い漸近効率をもつ. LMS_n は MAD_n と同じ影響関数をもち (Rousseeuw and Leroy, 1988), 漸近効率も等しい (Grübel, 1988) 推定量であり, U_n は漸近的に LMS_n と等しく, 50% 破綻点をもつ推定量である.

T を尺度汎関数とするとき近傍 (2.4) に関する T の外破バイアスと内破バイアスは

$$(2.6) \quad B_T^+(c, \gamma) = \sup \{ T(F) : F \in \mathcal{P}_{F_0}(c, \gamma) \},$$

$$(2.7) \quad B_T^-(c, \gamma) = \inf \{ T(F) : F \in \mathcal{P}_{F_0}(c, \gamma) \},$$

によって定義される．外破バイアス $B_T^+(c, \gamma)$ と内破バイアス $B_T^-(c, \gamma)$ は T の大域的なロバストネスを表すものであり，前者は小さいほど，また後者は大きいほど望ましい．本論文では (2.5) の5つの推定量に対する内破バイアスを導出することが主な目的である．

3 MAD_n の内破バイアスの導出

本節以降 X, Y は独立な確率変数を表すものとする． MAD_n の漸近形は

$$MAD(F) = a \cdot \text{med}_F\{|X - \text{med}_F Y|\}.$$

である．このとき MAD の内破バイアスを与える次の結果を得る．

定理 3.1 F_0 を原点对称で単峰な密度関数 f_0 をもつ分布とする．近傍 (2.4) に関する MAD の内破バイアスは

$$B_{MAD}^-(c, \gamma) = \begin{cases} a F_0^{-1}\left(\frac{2c - 2\gamma + 1}{4c}\right), & \text{if } 0 \leq \gamma < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{if } \gamma \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

によって与えられる．

証明 $\hat{F}$ を (2.3) で与えられた分布とする．このとき f_0 の対称性と単峰性から $\forall F \in \mathcal{P}_{F_0}(c, \gamma)$ と $\forall t \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} P_F(|X - \text{med}_F Y| \leq t) &\leq \sup_y P_F(|X - y| \leq t) \\ &\leq P_{\hat{F}}(|X| \leq t) = P_{\hat{F}}(|X - \text{med}_{\hat{F}} Y| \leq t). \quad (\text{med}_{\hat{F}} Y = 0) \end{aligned}$$

がいえる．これは F のもとでの $|X - \text{med}_F Y|$ の分布 G_F が $F = \hat{F}$ のとき確率的に最小となることを意味する．それゆえ

$$B_{MAD}^-(c, \gamma) = MAD(\hat{F}) = a G_{\hat{F}}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right),$$

となる．ここで

$$G_{\hat{F}}(t) = \begin{cases} \gamma, & \text{if } t = 0, \\ 2cF_0(t) - c + \gamma, & \text{if } 0 < t \leq F_0^{-1}\left(\frac{c-\gamma+1}{2c}\right), \\ 1, & \text{if } t \geq F_0^{-1}\left(\frac{c-\gamma+1}{2c}\right), \end{cases}$$

であることから

$$G_{\hat{F}}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = F_0^{-1}\left(\frac{2c - 2\gamma + 1}{4c}\right),$$

がいえる．また $\gamma \geq \frac{1}{2}$ のときは $G_{\hat{F}}^{-1}(\frac{1}{2}) = 0$ となることは明らかである．□

4 S_n の内破バイアスの導出

S_n の漸近形は

$$S(F) = b \cdot \operatorname{med}_F g_F(X),$$

である．ここで $g_F(x)$ は

$$g_F(x) = \operatorname{med}_F |x - Y|,$$

である． F_n が経験分布であるとき $S(F_n) = S_n$ が推定量となる．次の定理は S の内破バイアスを与える．

定理 4.1 F_0 を原点对称で単峰な密度関数 f_0 をもつ分布とする．このとき， S の内破バイアスは

$$(4.1) \quad B_S^-(c, \gamma) = \begin{cases} b g^-(F_0^{-1}(\frac{2c-2\gamma+1}{4c})), & \text{if } 0 \leq \gamma < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{if } \gamma \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

によって与えられる．ここで g^- は次式を満たす関数である．

$$(4.2) \quad F_0(x + g^-(x)) - F_0(x - g^-(x)) = \frac{1 - 2\gamma}{2c}.$$

証明 $0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$ の場合を考える．最初に $B_S^-(c, \gamma) = S(\hat{F})$ を示す．ここで $\hat{F}$ は (2.3) である．任意の x に対して a_x を

$$F_0(x + a_x) - F_0(x - a_x) = \frac{1 - \gamma}{c},$$

を満たす正数とする．そして F_x^* を

$$(4.3) \quad F_x^* = c(F_0 - W_x^*) + \gamma \Delta_x,$$

とする．ここで

$$W_x^*(B) = F_0(B \cap [x - a_x, x + a_x]^c), \quad \forall B \in \mathcal{B},$$

であり， Δ_x は x で確率 1 をもつ確率測度とする．このとき，

$$g_{F_x^*}(x) = \inf\{g_F(x) : F \in \mathcal{P}_{F_0}(c, \gamma)\}, \quad \forall x \in R,$$

である． $0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$ であるので，

$$P_{F_x^*}(|x - Y| \leq g_{F_x^*}(x)) = \frac{1}{2},$$

となる．ゆえに $g_{F_x^*}(x) < a_x$ によって

$$F_0(x + g_{F_x^*}(x)) - F_0(x - g_{F_x^*}(x)) = \frac{1 - 2\gamma}{2c}.$$

f_0 の対称性と単峰性から， $g_{F_x^*}(x)$ と $g_{\hat{F}}(x)$ は $|x|$ に関して狭義増加であり，原点对称である．それゆえ，任意の $F \in \mathcal{P}_{F_0}(c, \gamma)$ に対して

$$\begin{aligned} S(F) &= b \operatorname{med}_F g_F(X) \geq b \operatorname{med}_F g_{F_X^*}(X) = b g_{F_{\operatorname{med}_F |X|}^*}(\operatorname{med}_F |X|) \\ &\geq b g_{F_{\operatorname{med}_F |X|}^*}(\operatorname{med}_F |X|) = b g_{\hat{F}}(\operatorname{med}_F |X|) = S(\hat{F}). \end{aligned}$$

が成り立つ．これは $B_S^-(c, \gamma) = S(\hat{F})$ を意味する．

次に， $S(\hat{F}) = b g^-(F_0^{-1}(\frac{2c-2\gamma+1}{4c}))$ を示す． $g_{\hat{F}}(x)$ は

$$\begin{aligned} c\{(F_0 - \hat{W})(x + g_{\hat{F}}(x)) - (F_0 - \hat{W})(x - g_{\hat{F}}(x))\} \\ + \gamma\{\Delta_0(x + g_{\hat{F}}(x)) - \Delta_0(x - g_{\hat{F}}(x))\} + \gamma I(x - g_{\hat{F}}(x) = 0) \geq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

を満たす最小の正数である． $0 \leq t < x$ に対して，

$$P_{\hat{F}}(|x - Y| \leq t) < \frac{1}{2},$$

であるから， $g_{\hat{F}}(x) \geq x$ である．また，

$$x = g_{\hat{F}}(x) \quad \text{iff} \quad x \geq F_0^{-1}\left(\frac{c - 2\gamma + 1}{2c}\right)/2,$$

も成り立つことがわかる．次に， $x < g_{\hat{F}}(x)$ に対して

$$F_0(x + g_{\hat{F}}(x)) - F_0(x - g_{\hat{F}}(x)) = \frac{1 - 2\gamma}{2c},$$

がいえる．これは $g_{\hat{F}}(x) = g^-(x)$ を意味する． $\hat{F}$ の対称性から，

$$\operatorname{med}_{\hat{F}} |X| = \hat{F}^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = F_0^{-1}\left(\frac{2c - 2\gamma + 1}{4c}\right),$$

が従う．それゆえ

$$S(\hat{F}) = b g_{\hat{F}}(\operatorname{med}_{\hat{F}} |X|) = b g^-\left(F_0^{-1}\left(\frac{2c - 2\gamma + 1}{4c}\right)\right),$$

を得る．

$$F_0^{-1}\left(\frac{2c - 2\gamma + 1}{4c}\right) < F_0^{-1}\left(\frac{c - 2\gamma + 1}{2c}\right)/2,$$

であるので， $B_S^-(c, \gamma)$ は (4.1) と (4.2) により与えられる．

$\gamma \geq \frac{1}{2}$ のときは $S(\hat{F}) = 0$ であり， $B_S^-(c, \gamma) = 0$ は明らかである．

5 Q_n の内破バイアスの導出

Q_n の漸近形は

$$Q(F) = d H_F^{-1} \left(\frac{1}{4} \right) = d K_F^{-1} \left(\frac{5}{8} \right),$$

である. ここで H_F と K_F はそれぞれ F のもとでの $|X - Y|$ と $X - Y$ の分布である. K_F は原点で対称であることに注意する. 次の定理は Q の内破バイアスを与える.

定理 5.1 F_0 を原点对称で単峰な密度関数 f_0 をもつ分布とする. このとき,

$$B_Q^-(c, \gamma) = \begin{cases} Q(\hat{F}), & \text{if } 0 \leq \gamma < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{if } \gamma \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

であり, $Q(\hat{F})$ は

$$(5.1) \quad c^2(F_0 - \hat{W})^{*2}(d^{-1} Q(\hat{F})) + 2c\gamma(F_0 - \hat{W})(d^{-1} Q(\hat{F})) + \gamma^2 = \frac{5}{8},$$

を満たす. ここで, $\hat{F}$ は (2.3) で与えられたものであり, $(F_0 - \hat{W})^{*2}$ は たたみこみ (convolution), $(F_0 - \hat{W}) * (F_0 - \hat{W})$ を表す.

証明 まず, 定理 2.2 より $B_Q^-(c, \gamma) = Q(\hat{F})$ が成り立つことに注意する. $0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$ とする. このとき $Q(\hat{F}) = d K_{\hat{F}}^{-1}(\frac{5}{8}) > 0$ であり,

$$P_{\hat{F} \times \hat{F}}(X - Y \leq d^{-1} Q(\hat{F})) = \frac{5}{8},$$

が成り立つ. この等式は

$$\begin{aligned} & c^2((F_0 - \hat{W}) \times (F_0 - \hat{W}))(X - Y \leq d^{-1} Q(\hat{F})) \\ & + 2c\gamma((F_0 - \hat{W}) \times \Delta_0)(X - Y \leq d^{-1} Q(\hat{F})) + \gamma^2(\Delta_0 \times \Delta_0)(X - Y \leq d^{-1} Q(\hat{F})) = \frac{5}{8}, \end{aligned}$$

のように書き表すことができるので, (5.1) に帰着する. 他方, $\gamma \geq \frac{1}{2}$ ときは

$$\mathcal{P}_{\hat{F} \times \hat{F}}(X - Y < 0) < \frac{5}{8} \leq \mathcal{P}_{\hat{F} \times \hat{F}}(X - Y \leq 0),$$

から $Q(\hat{F}) = 0$ がいえる. $\square$

6 LMS_n の内破バイアスの導出

LMS_n の漸近形は

$$\text{LMS}(F) = a' \inf_{t \in [0, \frac{1}{2}]} \left| F^{-1} \left(t + \frac{1}{2} \right) - F^{-1}(t) \right|,$$

であり，次の定理は LMS の内破バイアスを与える．

定理 6.1 F_0 を原点对称で単峰な密度関数 f_0 をもつ分布とする．このとき LMS の内破バイアスは

$$(6.1) \quad B_{\text{LMS}}^-(c, \gamma) = \begin{cases} 2a' F_0^{-1} \left(\frac{2c - 2\gamma + 1}{4c} \right), & \text{if } 0 \leq \gamma < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{if } \gamma \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

によって与えられる．

証明 $0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$ のとき， $\forall F \in \mathcal{P}_{F_0}(c, \gamma)$ に対して $\inf_{t \in [0, \frac{1}{2}]} \left| F^{-1} \left(t + \frac{1}{2} \right) - F^{-1}(t) \right| \geq \left| \hat{F}^{-1} \left(\frac{3}{4} \right) - \hat{F}^{-1} \left(\frac{1}{4} \right) \right|$ が成り立つから， $\text{LMS}(F) \geq \text{LMS}(\hat{F})$ がいえる．ここで $\hat{F}$ は (2.3) で与えられるものである．分布関数 $\hat{F}_0(= (F_0 - \hat{W}))$ は

$$\hat{F}_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq F_0^{-1} \left(\frac{c+\gamma-1}{2c} \right), \\ F_0(x) - \frac{c+\gamma-1}{2c}, & \text{if } F_0^{-1} \left(\frac{c+\gamma-1}{2c} \right) < x \leq F_0^{-1} \left(1 - \frac{c+\gamma-1}{2c} \right), \\ 1 - \frac{c+\gamma-1}{c}, & \text{if } x > F_0^{-1} \left(1 - \frac{c+\gamma-1}{c} \right), \end{cases}$$

であるから

$$\begin{aligned} \hat{F}^{-1} \left(\frac{3}{4} \right) &= F_0^{-1} \left(\frac{2c - 2\gamma + 1}{4c} \right), \\ \hat{F}^{-1} \left(\frac{1}{4} \right) &= F_0^{-1} \left(\frac{2c + 2\gamma - 1}{4c} \right). \end{aligned}$$

それゆえ，

$$\begin{aligned} \text{LMS}(\hat{F}) &= a' \left| \hat{F}^{-1} \left(\frac{3}{4} \right) - \hat{F}^{-1} \left(\frac{1}{4} \right) \right| = a' \left| F_0^{-1} \left(\frac{2c - 2\gamma + 1}{4c} \right) - F_0^{-1} \left(\frac{2c + 2\gamma - 1}{4c} \right) \right| \\ &= 2a' F_0^{-1} \left(\frac{2c - 2\gamma + 1}{4c} \right). \end{aligned}$$

また， $\gamma \geq \frac{1}{2}$ のとき， $\text{LMS}(\hat{F}) \leq 0$ となるのは明らかである．□

注 6.1 定理 6.1 の a' は

$$a' = \frac{1}{F_0^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) - F_0^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)},$$

によって得られ, モデル分布が正規分布の場合 ($F_0 = \Phi$) には, $2a' = a$ であるから, LMS の内破バイアスは MAD の内破バイアスと一致する.

7 U_n の内破バイアスの導出

U_n の漸近形 は

$$U(F) = a \cdot \inf_x g_F(x),$$

である. ここで $g_F(x)$ は

$$g_F(x) = \operatorname{med}_F |x - Y|,$$

である. 次の定理は U の内破バイアスを与える.

定理 7.1 F_0 を原点对称で単峰な密度 f_0 をもつ分布とする. このとき U の内破バイアスは

$$(7.1) \quad B_U^-(c, \gamma) = \begin{cases} aF_0^{-1}\left(\frac{2c - 2\gamma + 1}{4c}\right), & \text{if } 0 \leq \gamma < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{if } \gamma \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

である.

証明 $0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$ とする. このとき, 任意の $x \in R$ に対して,

$$g_{F_x^*}(x) = \inf\{g_F(x) : F \in \mathcal{P}_{F_0}(c, \gamma)\},$$

が成り立つ. ここで, F_x^* は (4.3) によって与えられるものである. ゆえに,

$$\begin{aligned} B_U^-(c, \gamma) &= a \inf_x \{\inf_x g_F(x) \mid F \in \mathcal{P}_{F_0}(c, \gamma)\} \\ &= a \inf_x \{\inf_x g_F(x) \mid F \in \mathcal{P}_{F_0}(c, \gamma)\} \\ &= a \inf_x g_{F_x^*}(x) = a g_{F_0^*}(0) = a \operatorname{med}_F |Y| \\ &= a F^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = a' F^{-1}\left(\frac{2c - 2\gamma + 1}{4c}\right). \end{aligned}$$

また, $\gamma \geq \frac{1}{2}$ のとき, $B_U^-(c, \gamma) \leq 0$ となることは明らかである. $\square$

8 標準正規分布の場合の内破バイアス

本節では、モデル分布 F_0 が標準正規分布 Φ の場合について、5つの推定量の内破バイアスを考察することにする。定理 3.1, 6.1 および 7.1 により、 $B_{MAD}^-(c, \gamma) = B_{LMS}^-(c, \gamma) = B_U^-(c, \gamma)$ であるから $B_{MAD}^-(c, \gamma)$, $B_S^-(c, \gamma)$, $B_Q^-(c, \gamma)$ の図表を与えて比較する。

MAD , S , Q , LMS , U を Φ のもとで Fisher-consistent とするためにそれぞれ定数を $a = 1.4826$, $b = 1.1926$, $d = 2.2219$, $a' = \frac{1}{2}a = 0.7413$ とする。

表 8.1, 8.2, 8.3 は c と γ に対する $B_{MAD}^-(c, \gamma)$, $B_S^-(c, \gamma)$, $B_Q^-(c, \gamma)$ を示した。与えられた c , γ に対する 3つのバイアス $B_{MAD}^-(c, \gamma)$, $B_S^-(c, \gamma)$, $B_Q^-(c, \gamma)$ の中での最大値と最小値をそれぞれボルド体とイタリック体で表した。表から次の関係をみてとることができる。

- (i) $B_Q^-(c, \gamma) > B_{MAD}^-(c, \gamma) > B_S^-(c, \gamma)$, for $c < 1$.
- (ii) $B_{MAD}^-(c, \gamma) > B_Q^-(c, \gamma) > B_S^-(c, \gamma)$, for $c \geq 1$ and $\gamma \geq 0.04$.
- (iii) $B_{MAD}^-(c, \gamma) > B_Q^-(c, \gamma) \dot{=} B_S^-(c, \gamma)$, for $c \geq 1$ and $\gamma < 0.04$.

バイアスの値は小数点 2 桁までが有効である。図 8.1(a) は $\gamma = 0, 0.05, 0.1$ のときの c に対する 3つの内破バイアスの変化を示したものであり、図 8.1(b) は $c = 1.0, 1.5, 2.0, 3.0$ のときの γ に対する 3つの内破バイアスの変化を示したものである。3つの内破バイアスは c に関しては凸であり、 γ に関してはほぼ線形である。また、0 付近での γ による減少よりも 1 付近での c による減少の方がかなり大きいことがわかる。特に重要な Rieder 近傍 $\mathcal{P}_\Phi(1 - \varepsilon, \varepsilon + \delta)$ の場合を考えてみると、3つの内破バイアスについて次のことがいえる。

$$(1) B_{MAD}^-(1 - \varepsilon, \varepsilon + \delta) = 1.4826 \Phi^{-1} \left(\frac{3 - 4\varepsilon - 2\delta}{4(1 - \varepsilon)} \right), \quad \text{if } 0 < \varepsilon + \delta < \frac{1}{2}.$$

$$(2) B_S^-(1 - \varepsilon, \varepsilon + \delta) = 1.1926 g^- \left(\Phi^{-1} \left(\frac{3 - 4\varepsilon - 2\delta}{4(1 - \varepsilon)} \right) \right), \quad \text{if } 0 < \varepsilon + \delta < \frac{1}{2}.$$

ここで g^- は

$$\Phi(x + g^-(x)) - \Phi(x - g^-(x)) = \frac{1 - 2(\varepsilon + \delta)}{2(1 - \varepsilon)}.$$

を満たすものである。

- (3) $B_Q^-(1 - \varepsilon, \varepsilon + \delta)$ は次の関係式を満たす。

$$(1 - \varepsilon)^2 (\Phi - \hat{W})^{*2} \left(\frac{B_Q^-}{2.2219} \right) + 2(1 - \varepsilon)(\varepsilon + \delta)(\Phi - \hat{W}) \left(\frac{B_Q^-}{2.2219} \right) + (\varepsilon + \delta)^2 = \frac{5}{8},$$

if $0 < \varepsilon + \delta < \frac{1}{2}$.

- (4) $B_{MAD}^-(1 - \varepsilon, \varepsilon + \delta) = B_S^-(1 - \varepsilon, \varepsilon + \delta) = B_Q^-(1 - \varepsilon, \varepsilon + \delta) = 0$, if $\varepsilon + \delta \geq \frac{1}{2}$.

$\delta = 0$ (i.e., ε -contamination) の場合、 $B_{MAD}^-(1 - \varepsilon, \varepsilon)$, $B_S^-(1 - \varepsilon, \varepsilon)$ と $B_Q^-(1 - \varepsilon, \varepsilon)$ はそれぞれ Rousseeuw and Croux (1993) の結果と一致する。表 8.4, 8.5, 8.6 は選ばれた ε, δ に対する $B_{MAD}^-(1 - \varepsilon, \varepsilon + \delta)$, $B_S^-(1 - \varepsilon, \varepsilon + \delta)$, $B_Q^-(1 - \varepsilon, \varepsilon + \delta)$ を示す。これらの表から、すべての ε, δ に対して $B_S^-(1 - \varepsilon, \varepsilon + \delta)$ が最小であることがわかる。また $\varepsilon > 0.05$ では $B_S^-(1 - \varepsilon, \varepsilon + \delta) <$

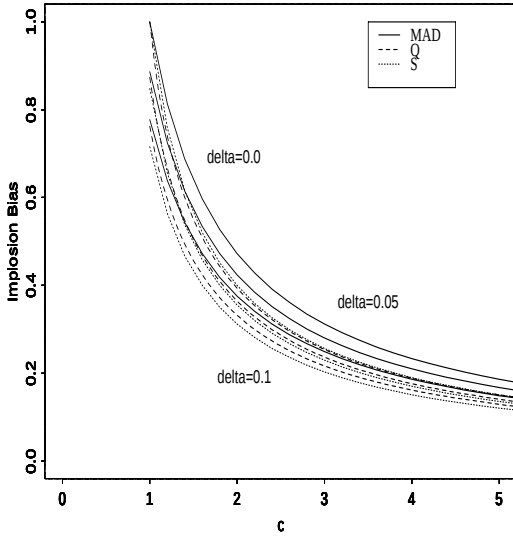
$B_{MAD}^-(1 - \varepsilon, \varepsilon + \delta) < B_Q^-(1 - \varepsilon, \varepsilon + \delta)$ の関係が成り立つこともわかる．図 8.2(a) は $\delta = 0, 0.05$ の場合の ε に対する 3 つの内破バイアスの変化を図示したものであり，図 8.2(b) は $\varepsilon = 0, 0.05$ の場合の δ に対するバイアスの変化を図示している． $\delta = 0$ のとき 図 8.2(a) は Rousseeuw and Croux (1993) の Figure 2(b) と一致すること，すなわち， $\delta = 0$ では $B_S^- < B_{MAD}^- < B_Q^-$ の関係が成り立つことに注意する．3 つの内破バイアスが ε に関して凹 (concave) であり (図 8.2(a) 参照)， δ に関して凸 (convex) であることがみてとれる (図 8.2(b) 参照)．0 付近では ε に対してよりも， δ に対して内破バイアスが大きく減少していることもわかる．これは ε と δ の役割の相違によるものと考えられる． $\mathcal{P}_\Phi(1 - \varepsilon, \varepsilon) \subset \mathcal{P}_\Phi(1, \varepsilon)$ であることに注意すべきである．

9 おわりに

本論文では，モデル分布からの「ずれ」を表現する近傍として，ある特別容量により定義される近傍を採用し，代表的な 5 つのロバスト尺度推定量の内破バイアスを導出した．この特別容量近傍は，Ando and Kimura (2000) により導入され，その構造が明らかにされたが，Rieder (1977) により提案された近傍を一般化したものになっている．したがって，ロバスト推定で最もよく用いられる ε -contamination 近傍や total variation 近傍は，この特別容量近傍の特殊な場合にあたり，第 3 節から第 5 節にかけて導出された MAD, S, Q の内破バイアスは，Rousseeuw and Croux (1993) が導出した ε -contamination 近傍上での内破バイアスの拡張になっている．特別容量近傍を用いた場合に，5 つのロバスト推定量のどれがよいのか，という問題については，内破バイアスのみを基準にすれば，これを最も大きくする傾向にある Q または MAD がよいということになる．もちろん，内破バイアスだけでなく，外破バイアスも同時に考慮する必要がある，外破バイアスを求めることが次の課題である．また，本論文においては，尺度母数推定量のロバストネスを評価するための立場として，バイアスを重視したバイアス・ロバストネスのアプローチをとっている．このアプローチの重要性は，現在では広く認識されるところとなっているが，これ以外のアプローチからの重要なロバストネス評価もいろいろとある．例えば，影響関数 (influence function) の諸性質やモデル分布のもとでの効率，それに，推定量を計算するための時間やコストなどは考慮しなければならないものである．どの推定量を用いるかについては，これらのロバストネス基準と評価を総合的に検討していく必要がある．

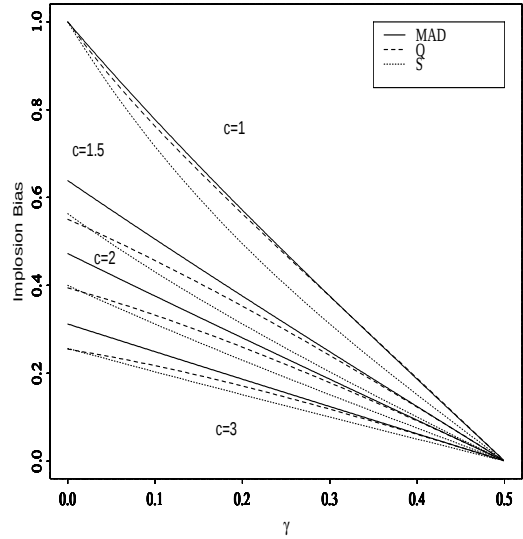
著者達の関心は， ε -contamination 近傍に関して得られているロバスト推定量の諸結果が， ε -contamination 近傍を含む特別容量近傍の場合にどのように拡張されるかを探っていくことにある．これには，推定量のバイアス・ロバストネス以外のロバストネス研究が不可欠であり，今後はこの分野の研究にも積極的に取り組んでいきたいと考えている．

[付記] 本研究に対して著者の一人 (木村美善) は南山大学「パッヘ研究奨励金 I-A」を受けた．



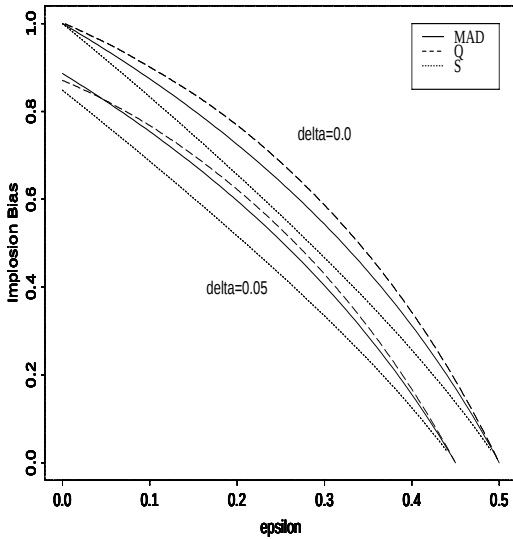
☒ 8.1(a)

$B_*^-(c, 0.0), B_*^-(c, 0.05), B_*^-(c, 0.1)$ ($* = MAD, S, D$)



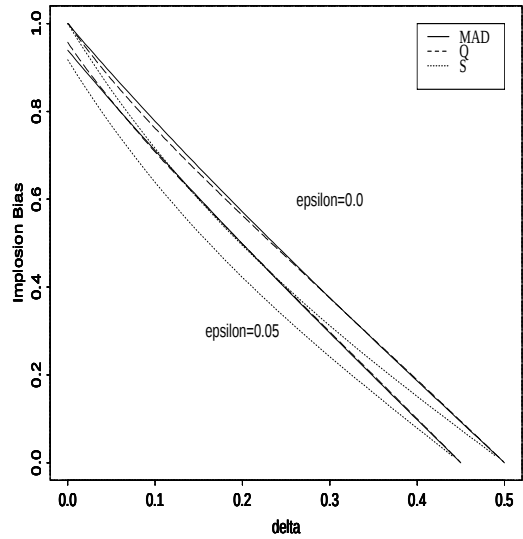
☒ 8.1(b) n

$B_*^-(1, \gamma), B_*^-(1.5, \gamma), B_*^-(2, \gamma), B_*^-(3, \gamma)$ ($* = MAD, S, D$)



☒ 8.2(a)

$B_*^-(1 - \epsilon, \epsilon), B_*^-(1 - \epsilon, \epsilon + 0.05)$ ($* = MAD, S, D$)



☒ 8.2(b)

$B_*^-(1, \delta), B_*^-(0.95, 0.05 + \delta)$ ($* = MAD, S, D$)

表 8.1: $B_{MAD}^-(c, \gamma)$

$c \setminus \gamma$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
0.8	-	-	-	-	-	-	-	-	0.725	0.596	0.472	0.352
0.9	-	-	-	-	-	-	0.874	0.754	0.639	0.527	0.418	0.312
1.0	1.000	0.977	0.954	0.931	0.909	0.886	0.777	0.673	0.571	0.472	0.376	0.280
1.1	0.896	0.876	0.856	0.836	0.817	0.797	0.701	0.608	0.517	0.428	0.341	0.255
1.2	0.813	0.795	0.777	0.760	0.742	0.725	0.639	0.555	0.472	0.392	0.312	0.233
1.3	0.745	0.729	0.713	0.697	0.681	0.665	0.587	0.510	0.435	0.361	0.288	0.215
1.4	0.687	0.673	0.658	0.643	0.629	0.614	0.543	0.472	0.403	0.335	0.267	0.200
1.5	0.639	0.625	0.612	0.598	0.585	0.571	0.505	0.440	0.376	0.312	0.249	0.186
2.0	0.472	0.463	0.453	0.443	0.433	0.424	0.376	0.328	0.280	0.233	0.186	0.140
3.0	0.312	0.306	0.299	0.293	0.287	0.280	0.249	0.218	0.186	0.155	0.124	0.093
5.0	0.186	0.183	0.179	0.175	0.171	0.168	0.149	0.130	0.112	0.093	0.074	0.056
10.0	0.093	0.091	0.089	0.087	0.086	0.084	0.074	0.065	0.056	0.046	0.037	0.028
50.0	0.019	0.018	0.018	0.017	0.017	0.017	0.015	0.013	0.011	0.009	0.007	0.006
100.0	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.008	0.007	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003

表 8.2: $B_S^-(c, \gamma)$

$c \setminus \gamma$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
0.8	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>0.656</i>	<i>0.520</i>	<i>0.400</i>	<i>0.291</i>
0.9	-	-	-	-	-	-	<i>0.833</i>	<i>0.689</i>	<i>0.563</i>	<i>0.452</i>	<i>0.350</i>	<i>0.257</i>
1.0	1.000	<i>0.968</i>	<i>0.937</i>	<i>0.907</i>	<i>0.877</i>	<i>0.848</i>	<i>0.716</i>	<i>0.599</i>	<i>0.495</i>	<i>0.400</i>	<i>0.312</i>	<i>0.230</i>
1.1	0.861	0.836	0.811	<i>0.786</i>	<i>0.762</i>	<i>0.739</i>	<i>0.630</i>	<i>0.532</i>	<i>0.442</i>	<i>0.359</i>	<i>0.281</i>	<i>0.208</i>
1.2	0.758	0.737	0.716	0.696	<i>0.676</i>	<i>0.656</i>	<i>0.563</i>	<i>0.478</i>	<i>0.400</i>	<i>0.326</i>	<i>0.257</i>	<i>0.190</i>
1.3	0.679	0.661	0.643	0.625	<i>0.608</i>	<i>0.591</i>	<i>0.510</i>	<i>0.435</i>	<i>0.365</i>	<i>0.299</i>	<i>0.236</i>	<i>0.175</i>
1.4	0.615	0.599	0.584	<i>0.568</i>	<i>0.553</i>	<i>0.538</i>	<i>0.467</i>	<i>0.400</i>	<i>0.336</i>	<i>0.276</i>	<i>0.218</i>	<i>0.162</i>
1.5	0.563	0.549	0.535	<i>0.522</i>	<i>0.508</i>	<i>0.495</i>	<i>0.431</i>	<i>0.370</i>	<i>0.312</i>	<i>0.257</i>	<i>0.203</i>	<i>0.151</i>
2.0	0.400	0.391	<i>0.382</i>	<i>0.373</i>	<i>0.364</i>	<i>0.355</i>	<i>0.312</i>	<i>0.270</i>	<i>0.230</i>	<i>0.190</i>	<i>0.151</i>	<i>0.113</i>
3.0	0.257	0.251	<i>0.246</i>	<i>0.240</i>	<i>0.235</i>	<i>0.230</i>	<i>0.203</i>	<i>0.177</i>	<i>0.151</i>	<i>0.125</i>	<i>0.100</i>	<i>0.075</i>
5.0	0.151	<i>0.148</i>	<i>0.145</i>	<i>0.142</i>	<i>0.139</i>	<i>0.136</i>	<i>0.120</i>	<i>0.105</i>	<i>0.090</i>	<i>0.075</i>	<i>0.060</i>	<i>0.045</i>
10.0	0.075	<i>0.073</i>	<i>0.072</i>	<i>0.070</i>	<i>0.069</i>	<i>0.067</i>	<i>0.060</i>	<i>0.052</i>	<i>0.045</i>	<i>0.037</i>	<i>0.030</i>	<i>0.022</i>
50.0	<i>0.015</i>	<i>0.015</i>	<i>0.014</i>	<i>0.014</i>	<i>0.014</i>	<i>0.013</i>	<i>0.012</i>	<i>0.010</i>	<i>0.009</i>	<i>0.007</i>	<i>0.006</i>	<i>0.004</i>
100.0	<i>0.007</i>	<i>0.007</i>	<i>0.007</i>	<i>0.007</i>	<i>0.007</i>	<i>0.007</i>	<i>0.006</i>	<i>0.005</i>	<i>0.004</i>	<i>0.004</i>	<i>0.003</i>	<i>0.002</i>

表 8.3: $B_Q^-(c, \gamma)$

$c \setminus \gamma$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
0.8	-	-	-	-	-	-	-	-	0.767	0.622	0.489	0.363
0.9	-	-	-	-	-	-	0.902	0.766	0.645	0.532	0.423	0.317
1.0	1.000	0.974	0.947	0.922	0.897	0.873	0.762	0.660	0.563	0.468	0.375	0.282
1.1	<i>0.844</i>	<i>0.824</i>	<i>0.806</i>	0.788	0.770	0.754	0.667	0.583	0.501	0.419	0.336	0.254
1.2	<i>0.740</i>	<i>0.724</i>	<i>0.709</i>	<i>0.695</i>	0.681	0.667	0.596	0.524	0.452	0.379	0.306	0.231
1.3	<i>0.661</i>	<i>0.649</i>	<i>0.637</i>	0.625	0.613	0.601	0.540	0.477	0.413	0.347	0.280	0.212
1.4	<i>0.600</i>	<i>0.590</i>	<i>0.580</i>	0.569	0.559	0.548	0.494	0.438	0.380	0.320	0.259	0.196
1.5	<i>0.550</i>	<i>0.542</i>	<i>0.533</i>	0.524	0.514	0.505	0.457	0.406	0.352	0.297	0.240	0.182
2.0	<i>0.394</i>	<i>0.388</i>	0.383	0.377	0.371	0.365	0.332	0.297	0.259	0.220	0.178	0.136
3.0	<i>0.254</i>	<i>0.251</i>	0.248	0.244	0.241	0.237	0.217	0.195	0.171	0.145	0.118	0.090
5.0	<i>0.151</i>	0.149	0.147	0.145	0.142	0.141	0.129	0.116	0.102	0.086	0.070	0.053
10.0	<i>0.074</i>	0.073	0.073	0.072	0.071	0.070	0.063	0.057	0.050	0.043	0.035	0.027
50.0	0.016	0.015	0.015	0.015	0.015	0.014	0.013	0.012	0.011	0.009	0.007	0.005
100.0	0.009	0.009	0.009	0.008	0.008	0.008	0.007	0.006	0.005	0.005	0.004	0.003

表 8.4: $B_{MAD}^-(1 - \varepsilon, \varepsilon + \delta)$

$\varepsilon \setminus \delta$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
0.00	1.000	0.977	0.954	0.931	0.909	0.886	0.777	0.673	0.571	0.472	0.376
0.01	0.988	0.965	0.942	0.919	0.896	0.874	0.765	0.659	0.557	0.458	0.360
0.02	0.976	0.953	0.930	0.907	0.884	0.861	0.751	0.646	0.543	0.443	0.344
0.03	0.964	0.941	0.917	0.894	0.871	0.849	0.738	0.632	0.528	0.427	0.328
0.04	0.952	0.928	0.905	0.882	0.859	0.836	0.725	0.617	0.513	0.412	0.312
0.05	0.939	0.916	0.892	0.869	0.846	0.823	0.711	0.603	0.498	0.396	0.295
0.10	0.874	0.849	0.825	0.801	0.777	0.754	0.639	0.527	0.418	0.312	0.207
0.15	0.803	0.777	0.753	0.728	0.703	0.679	0.560	0.444	0.331	0.219	0.109
0.20	0.725	0.699	0.673	0.647	0.622	0.596	0.472	0.352	0.233	0.116	0.000
0.25	0.639	0.612	0.585	0.558	0.531	0.505	0.376	0.249	0.124	0.000	0.000
0.30	0.543	0.515	0.486	0.458	0.431	0.403	0.267	0.133	0.000	0.000	0.000
0.35	0.435	0.405	0.376	0.346	0.317	0.288	0.143	0.000	0.000	0.000	0.000
0.40	0.312	0.280	0.249	0.218	0.186	0.155	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

表 8.5: $B_S^-(1 - \varepsilon, \varepsilon + \delta)$

$\varepsilon \setminus \delta$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
0.00	<i>1.000</i>	<i>0.968</i>	<i>0.937</i>	<i>0.907</i>	<i>0.877</i>	<i>0.848</i>	<i>0.716</i>	<i>0.599</i>	<i>0.495</i>	<i>0.400</i>	<i>0.312</i>
0.01	<i>0.984</i>	<i>0.952</i>	<i>0.921</i>	<i>0.890</i>	<i>0.861</i>	<i>0.832</i>	<i>0.701</i>	<i>0.584</i>	<i>0.480</i>	<i>0.386</i>	<i>0.298</i>
0.02	<i>0.967</i>	<i>0.935</i>	<i>0.904</i>	<i>0.874</i>	<i>0.845</i>	<i>0.817</i>	<i>0.685</i>	<i>0.570</i>	<i>0.466</i>	<i>0.371</i>	<i>0.284</i>
0.03	<i>0.951</i>	<i>0.919</i>	<i>0.888</i>	<i>0.858</i>	<i>0.829</i>	<i>0.800</i>	<i>0.670</i>	<i>0.555</i>	<i>0.451</i>	<i>0.357</i>	<i>0.270</i>
0.04	<i>0.934</i>	<i>0.902</i>	<i>0.872</i>	<i>0.842</i>	<i>0.813</i>	<i>0.784</i>	<i>0.654</i>	<i>0.540</i>	<i>0.437</i>	<i>0.343</i>	<i>0.256</i>
0.05	<i>0.918</i>	<i>0.886</i>	<i>0.855</i>	<i>0.825</i>	<i>0.796</i>	<i>0.768</i>	<i>0.639</i>	<i>0.524</i>	<i>0.422</i>	<i>0.329</i>	<i>0.241</i>
0.10	<i>0.833</i>	<i>0.802</i>	<i>0.771</i>	<i>0.742</i>	<i>0.714</i>	<i>0.686</i>	<i>0.560</i>	<i>0.448</i>	<i>0.348</i>	<i>0.255</i>	<i>0.167</i>
0.15	<i>0.746</i>	<i>0.715</i>	<i>0.686</i>	<i>0.657</i>	<i>0.629</i>	<i>0.603</i>	<i>0.479</i>	<i>0.370</i>	<i>0.270</i>	<i>0.177</i>	<i>0.088</i>
0.20	<i>0.656</i>	<i>0.626</i>	<i>0.598</i>	<i>0.570</i>	<i>0.543</i>	<i>0.517</i>	<i>0.396</i>	<i>0.288</i>	<i>0.188</i>	<i>0.094</i>	<i>0.000</i>
0.25	<i>0.563</i>	<i>0.534</i>	<i>0.506</i>	<i>0.479</i>	<i>0.453</i>	<i>0.427</i>	<i>0.309</i>	<i>0.201</i>	<i>0.100</i>	<i>0.000</i>	<i>0.000</i>
0.30	<i>0.467</i>	<i>0.439</i>	<i>0.411</i>	<i>0.385</i>	<i>0.359</i>	<i>0.334</i>	<i>0.216</i>	<i>0.107</i>	<i>0.000</i>	<i>0.000</i>	<i>0.000</i>
0.35	<i>0.365</i>	<i>0.338</i>	<i>0.311</i>	<i>0.285</i>	<i>0.259</i>	<i>0.234</i>	<i>0.115</i>	<i>0.000</i>	<i>0.000</i>	<i>0.000</i>	<i>0.000</i>
0.40	<i>0.257</i>	<i>0.229</i>	<i>0.203</i>	<i>0.176</i>	<i>0.150</i>	<i>0.125</i>	<i>0.000</i>	<i>0.000</i>	<i>0.000</i>	<i>0.000</i>	<i>0.000</i>

表 8.6: $B_Q^-(1 - \varepsilon, \varepsilon + \delta)$

$\varepsilon \setminus \delta$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
0.00	1.000	0.975	0.948	0.923	0.898	0.874	0.763	0.661	0.564	0.468	0.375
0.01	0.994	0.966	0.940	0.914	0.889	0.865	0.753	0.650	0.551	0.454	0.360
0.02	0.986	0.958	0.931	0.905	0.880	0.856	0.743	0.639	0.539	0.441	0.345
0.03	0.977	0.949	0.922	0.895	0.870	0.846	0.732	0.627	0.526	0.427	0.330
0.04	0.968	0.939	0.912	0.886	0.860	0.836	0.721	0.614	0.512	0.412	0.314
0.05	0.958	0.929	0.902	0.876	0.850	0.825	0.710	0.602	0.499	0.397	0.298
0.10	0.904	0.875	0.847	0.820	0.793	0.767	0.647	0.533	0.424	0.317	0.211
0.15	0.841	0.811	0.782	0.754	0.727	0.701	0.574	0.454	0.339	0.225	0.113
0.20	0.768	0.738	0.708	0.679	0.651	0.623	0.490	0.364	0.241	0.120	0.000
0.25	0.684	0.653	0.622	0.592	0.562	0.533	0.393	0.260	0.129	0.000	0.000
0.30	0.587	0.554	0.522	0.491	0.460	0.429	0.282	0.140	0.000	0.000	0.000
0.35	0.474	0.440	0.406	0.374	0.341	0.309	0.152	0.000	0.000	0.000	0.000
0.40	0.343	0.307	0.271	0.236	0.202	0.168	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

参考文献

- [1] Ando, M., and Kimura, M. (2000a). A characterization of neighborhoods defined by certain special capacities and its applications to robust estimation, Working Paper No.9905, Center for Management Studies, Nanzan University, submitted.
- [2] Ando, M., and Kimura, M. (2000b). Lower bounds for the maximum bias of estimates over (ε, δ) -contamination neighborhoods, Working Paper No.0001, Center for Management Studies, Nanzan University, submitted.
- [3] Bednarski, T. (1981). On solutions of minimax test problems for special capacities, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete.*, **10**, 269-278.
- [4] Chen, Z. (1998). A note on bias robustness of the median, *Statist. Probab. Lett.*, **38**, 363-368.
- [5] Donoho, D., and Liu, R. (1988). The "automatic" robustness of minimum distance functionals, *Ann. Statist.*, **16**, 552-586.
- [6] Grübel, R. (1988). The length of the Shorth, *Ann. Statist.*, **16**, 619-628.
- [7] Hampel, F. R. (1974). The influence curve and its role in robust estimation, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **69**, 383-393.
- [8] Hampel, F. R., Ronchetti, E. M., Rousseeuw, P. J. and Stahel, W. A. (1986). *Robust Statistics: The approach Based on Influence Functions*, Wiley, New York.
- [9] He, X., and Simpson, D. G. (1993). Lower bounds for contamination bias: globally minimax versus locally linear estimation, *Ann. Statist.*, **21**, 314-337.
- [10] Huber, P. J. (1964). Robust estimation of a location parameter, *Ann. Math. Statist.*, **35**, 73-101.
- [11] Huber, P. J. (1981). *Robust Statistics*, Wiley, New York.
- [12] Martin, R. D. and Zamar, R. H. (1993). Bias robust estimation of scale, *Ann. Statist.*, **21**, 991-1017.
- [13] Rieder, H. (1977). Least favorable pairs for special capacities. *Ann. Statist.*, **6**, 1080-1094.
- [14] Rousseeuw, P. J., and Leroy, A. M. (1987). *Robust Regression and Outlier Detection*, Wiley, New York.
- [15] Rousseeuw, P. J., and Croux, C. (1993). Alternatives to the median absolute deviation, *J. Amer. Statist. Assoc.* **88**, 1273-1283.

Masakazu Ando
 Graduate School of Business Administration,
 Nanzan University.
 18 Yamazato-cho, Showa-ku, Nagoya,
 466-8673, JAPAN
 E-mail: anne@iq.nanzan-u.ac.jp

Miyoshi Kimura
 Department of Mathematical Sciences,
 Nanzan University.
 27 Seirei-cho, Seto-shi, Aichi,
 489-0863, JAPAN
 E-mail: kimura@ms.nanzan-u.ac.jp