あとがき (1 部カット)

第 1 章に, 観測値が従う様々な分布を紹介した．第 2, 3 章は，1, 2 群モデルにおける t 検定統計量，符号付順位統計量，順位和統計量による手法の理論的な紹介を行った．ウィルコクソンの符号付順位統計量は 0 について対称に分布しないため，ウィルコクソンの符号付順位統計量と同等な局所最強力順位検定統計量を使って統計手法の表現を行った．漸近正規性だけを利用した手法が一般的に紹介されているが，順位統計量が離散分布に従うことを配慮し，正確な順位検定法と信頼区間を構築した．この場合棄却点を与える数表を作成するためのアルゴリズムも述べた．次に，漸近正規性よりも近似がよくなるエッジワース展開を利用した順位手法を述べた．観測値にタイがある場合には中央値順位 (mid-rank) に基づく順位検定法が多くの統計書で紹介されているが, その問題点を指摘した．タイがある場合には，同じ値が存在してもうまく定義されている順位信頼区間を推奨した.

多群モデルの分散分析法では，平均の一様性の帰無仮説の F 検定とクラスカル · ウォリスのノンパラメトリック順位検定を紹介した．また，位置パラメータの信頼領域は (4.8), (4.17) の楕円の内部で与えられた.

すべての平均相違のテューキー・クレーマー型多重比較法に関して，正規理論，ノンパラメトリック論に対して，定理 5.1 と定理 5.2 の中で，それぞれ, 次の (1), (2) の不等式を得た.

$$TA(t) \leqq P_0(\max_{i<i'} |T_{ii'}| \leqq t) \leqq TA^*(t), \tag{1}$$

$$A(t) \leqq \lim_{n\to\infty} P_0(\max_{i<i'} |\widehat{Z}_{ii'}| \leqq t) \leqq A^*(t). \tag{2}$$

ただし，2 群間の t 検定統計量を $T_{ii'}$, 2 群間の順位検定統計量を $\widehat{Z}_{ii'}$ とする. $TA(t)$, $TA^*(t)$ は 2 重積分で表現される．$TA(t/\sqrt{2})$ はスチューデント化された範囲の分布とよばれ，(1) 式の左側の不等式は Hayter (1984) によって示された．スチューデント化された範囲の分布を調整した分布 $TA(t)$ を使うテューキー・クレーマー法は保守的な手法になっていた．$P_0(\max_{i<i'} |T_{ii'}| \leqq t) = TA^*(t)$ と書かれた日本の統計書が複数ある．またいくつかの文献にもそのように書

かれた．このため，長年この等式が正しいと信じられていた．$P_0(\max_{i<i'}|T_{ii'}| \geqq t)$ は次元の大きな多重積分でしか表現できず，積分領域も複雑なため，計算機による精度保証された数値積分が使えない．(1) の右側の不等式の関係が正しいことを，白石 (2006) は示した．(1), (2) の左側の分布関数 $TA(t)$, $A(t)$ を使って保守的な多重比較法を導くことができた．$TA(t)$ は 2 重積分で表現されるが，$A(t)$ は 1 次元の積分で表現できた．右側の分布関数 $TA^*(t)$, $A^*(t)$ を使って保守度を調べることができた．$TA^*(t)$, $A^*(t)$ はサイズ $n_1, \cdots, n_k$ の関数であるので，保守度を制御することができた．群サイズの最大値が群サイズの最小値の 2 倍以下を仮定すれば，保守度は小さいことを，精度を保証した数値計算により示した．多重比較検定として，シングルステップの手法と閉検定手順も紹介した．閉検定手順は検出力を高める手法であった．さらに，これまでの閉検定手順であるテューキー・ウェルシュの方法や REGW 法よりも一様に検出力をあげる白石 (2011b) によって提案された閉検定手順を論述した．これまで閉検定手順の中でペリの方法 (Peritz (1970)) が最も検出力が高いものとされてきた．$k = 4, 5$ のとき，白石 (2011b) の閉検定手順の検出力はペリの方法よりも一様に高い優越性を 5.5.1, 5.5.2 節の中で与えた．定理 5.6, 5.7 はこれらの論証のかぎとなった．さらに，命題 5.2, 5.3 とそのすぐ後に，シングルステップ法よりも白石 (2011b) の閉検定手順が一様に検出力の高いことを示した．順位による多重比較法は漸近理論を使うと，手法の表現が容易になった．さらに，小標本での正確な手法を論じることもできることを説明した．

全体順位を使う統計量に基づくノンパラメトリック多重比較検定法をダン (Dunn (1964)) が提案したが，Oude Voshaar (1980) と Hsu (1996) は，ダンの方法が多重比較検定になっていないことを指摘した．シングルステップのノンパラメトリック多重比較法では，全体順位ではなく 2 群間の中での順位を使う方法が正しい．この間違いは，タイプ I FWER (type I familywise error rate, 正しい帰無仮説のうち少なくとも 1 つが棄却される確率) を，平均の一様性の帰無仮説の下での有意確率とみなしたことに起因していた．正規分布の下でのテューキー・クレーマー法, ダネット法，シェフェ法などの (シングルステップ) 多重比較検定法は，統計量の構成法から，平均の一様性の帰無仮説の下での有意確率がそのまま タイプ I FWER の最大値になっていた．しかし

ながら，ノンパラメトリック多重比較法に対しては，タイプ I FWER に注意を向け考慮しないと間違いを起こす．タイプ I FWER が α 以下に保守されているかの正当性と不当性についてもポイントとなる場所で論じた．水準 α の t 検定を繰り返したときのタイプ I FWER の最大値を，表 5.5, 表 6.3 に掲載した．また，水準 α の順位検定を繰り返したときのタイプ I FWER の最大値も論じた．

多重比較検定だけでは，平均の相違を指摘できても，どちらの方がどのくらい大きいかを判定できない．ノンパラメトリック法を紹介した日本の統計書は多重比較検定のみが書かれていた．これに対して，平均の違いがどれくらいであるかを解析することのできる分布に依らない平均差に関する同時信頼区間も本書で紹介した．この場合，ウィルコクソンの順位和検定統計量が離散分布に従うことを考慮し，信頼係数 $1-\alpha$ に対する順位統計量の領域を正確に表現した．さらに，ガウス記号を使って明解で簡潔である正確な同時信頼区間の表現を行った．これにより，アルゴリズムが容易に解釈でき，データ解析が容易になった．

正規標本での二元配置モデルにおけるすべての主効果の相違に関しては，Tamhane (2009) が，テューキー・クレーマー型多重比較法を紹介している．二元配置モデルにおけるテューキー・クレーマー型のノンパラメトリック多重比較法の理論は，多群モデルにおけるテューキー・クレーマー型のノンパラメトリック多重比較法とは全く異なり，今後の研究になるものと思われる．

連続モデルにおける対照群との平均相違のダネット型の多重比較法を第 6 章に述べた．テューキー・クレーマー型多重比較法では (1), (2) の不等式の分布を導いたが，ダネット型の統計量の分布は等式の未知パラメータを含まない分布を導くことができた．多重比較検定としてデータ解析が容易な逐次棄却型検定法を提案することができた．標本サイズが異なる場合でも提案した逐次棄却型検定法が閉検定手順になっていることを，定理 6.5 として与え，証明を行った．6.2, 6.3 節のシングルステップ法よりも，この節の逐次棄却型検定法の方が一様に検出力が高いことが解った．さらに，シングルステップ法で棄却されない帰無仮説も逐次棄却型検定法を使えば棄却されることがある．逐次棄却型検定法で棄却されない帰無仮説は，シングルステップ法を使っても棄却されない．

1, 2 群モデルにおける順位統計量の分布は，エッジワース展開の理論によって漸近正規よりもよい近似がおこなえたが，第 5, 6 章で紹介した多重比較の順位統計量の分布は，漸近分布が単純でないため，エッジワース展開などの精密化の議論をすることが極めて難しい．筆者はしばらくは解決できない問題と思っている．

すべての平均の多重比較法を第 7 章で述べた．正規分布の下では，1 標本 t 統計量と t 分布を使って構成でき，ノンパラメトリック法はウィルコクソンの符号付順位によって構成できた．第 4 章から第 6 章までは分散が共通である必要があったが，第 7 章では分散の一様性を仮定する必要がない．しかしながら，第 4 章から第 6 章までに論じられたノンパラメトリック法は分布に対称性を仮定しなくてもよいが，第 7 章で述べられたノンパラメトリック法は分布に対称性の仮定を置く必要があった．第 6 章と同様に，逐次棄却型検定法を論じることができた．

シェフェ型の多重比較法を第 8 章に述べた．線形順位統計量に基づく多重比較検定を記述している文献や統計書があるが，それらは誤っていた．分布に依らない多重比較法は存在せず，順位推定に基づく頑健な多重比較法を構成できた．

第 4-6, 8 章で論述した正規母集団での最良手法 (パラメトリック法) に対する順位に基づくノンパラメトリック法の漸近相対効率は，第 3 章で論じた t 検定に対するウィルコクソンの順位和検定の漸近相対効率に等しく，(3.46) で与えられた．その漸近相対効率の値を表 3.2-3.4 に掲載した．

ボンフェローニの不等式 $P\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) \leqq \sum_{n=1}^{m} P(A_n)$ を使った多重比較検定法と同時信頼区間は，それぞれ検出力が低く区間幅が大きくなるので，本書で紹介した手法よりも一様に悪くなる．このため，本書ではボンフェローニの不等式を使った多重比較法を扱わなかった．歴史的にはボンフェローニの不等式を使った多重比較法が初期に提案され，その後，本書で論述した有限個の統計量に MAX をとった分布に基づく多重比較法の理論が構築された．ボンフェローニの不等式を使う方法のほうが適用範囲が広いが，ここで扱ったモデルすべてにおいては，統計量に MAX をとった分布に基づく多重比較法を論じ

ることが出来た．また，本書で論じたことが理解できていれば，ボンフェローニの不等式を使う方法とその理論も容易に習得出来る．ボンフェローニの不等式を使った多重比較法の詳細は，杉山等 (2007), 丹後・小西 (2010), Bretz, Hothorn & Westfall (2011) 等を参照せよ．

2011 年 12 月

白石高章