「多重比較法の理論と数値計算」 7 章証明編

杉浦洋

2018 年 9 月 24 日

付録 P

7 章の定理の証明

拙著『多重比較法の理論と数値計算』(白石・杉浦 [2])(以下原著) 第 7 章の全ての定理に証明を付す．証明の一部は白石・杉浦 [1] の内容と重なるが，省略せずに掲載した．

原著の「付録 P 章」として構成した．節番号，定理番号，式番号の先頭には全て P が付され，先頭に章番号 7 が付く原著のそれと区別される．章番号を除いた節番号は，第 7 章のそれと一致する．例えば，7.4.4 節の定理の証明は P.4.4 節に記されている．

P.1　関数族 $\mathbf{G}$ と sinc 近似

P.1.1　関数族 $\mathbf{G}$

（定理 7.1 の証明） 任意の $\xi = x + x' \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}
|a_1 f_1(\xi) + a_2 f_2(\xi)| &\leqq |a_1|\,|f_1(\xi)| + |a_2|\,|f_2(\xi)| \\
&\leqq |a_1|\, A_1 e^{-\alpha_1 x^2 + \beta_1 x'^2} + |a_2|\, A_2 e^{-\alpha_2 x^2 + \beta_2 x'^2} \\
&\leqq (|a_1|\, A_1 + |a_2|\, A_2) \max\left\{e^{-\alpha_1 x^2}, e^{-\alpha_2 x^2}\right\} \max\left\{e^{\beta_1 x'^2}, e^{\beta_2 x'^2}\right\} \\
&= (|a_1|\, A_1 + |a_2|\, A_2)\, e^{-\min\{\alpha_1,\alpha_2\}x^2 + \max\{\beta_1,\beta_2\}x'^2}
\end{aligned}$$

である． □

（定理 7.2 の証明） 任意の $\xi = x + x' \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}
|f_1(\xi) f_2(\xi)| &\leqq A_1 e^{-\alpha_1 x^2 + \beta_1 x'^2} A_2 e^{-\alpha_2 x^2 + \beta_2 x'^2} \\
&= A_1 A_2 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)x^2 + (\beta_1+\beta_2)x'^2}
\end{aligned}$$

である． □

補題 P.1　実数 $\alpha \neq \alpha'$, b について，$\delta(\alpha, \alpha', b) = \alpha\alpha' b^2/(\alpha' - \alpha)$ とすると，任意の実数 x について，

$$\begin{aligned}
\alpha(x+b)^2 &\leqq \alpha' x^2 + \delta(\alpha, \alpha', b) \ \ (\alpha < \alpha'), \\
\alpha(x+b)^2 &\geqq \alpha' x^2 + \delta(\alpha, \alpha', b) \ \ (\alpha > \alpha').
\end{aligned}$$

（証明）$\alpha(x+b)^2 - \alpha' x^2 - \delta(\alpha, \alpha', b) = (\alpha - \alpha')\{x - \alpha b/(\alpha - \alpha')\}^2$ より． □

（定理 7.3 の証明） $f \in \mathbf{G}(A, \alpha, \beta)$ とする．補題 P.1 より，$d_1 = \delta(\alpha', a^2\alpha, c/a)$, $d_2 = \delta(a^2\beta, \beta', c'/a)$ とすると，

$$\alpha' x^2 + d_1 \leqq a^2\alpha(x + c/a)^2,\ \ \beta' x'^2 + d_2 \geqq a^2\beta(x' + c'/a)^2.$$

これより，

$$\begin{aligned} |g(x + ix')| &= |f\left((ax + c) + i(ax' + c')\right)| \\ &\leqq Ae^{-\alpha(ax+c)^2+\beta(ax'+c')^2} \\ &\leqq Ae^{-d_1+d_2}e^{-\alpha' x^2+\beta' x'^2} \end{aligned}$$

である．よって，$g \in \mathbf{G}(\alpha', \beta')$ である． □

（定理 7.4 の証明） $f \in \mathbf{G}(A, \alpha, \beta)$ とする．補題 P.1 の関数 δ により，

$$\begin{aligned} d_1 &= \min_{0 \leqq \theta \leqq 2\pi} \delta(\alpha, \alpha', \cos\theta) = \min_{-1 \leqq b \leqq 1} \delta(\alpha, \alpha', b) = \frac{\alpha\alpha'}{\alpha' - \alpha}, \\ d_2 &= \max_{0 \leqq \theta \leqq 2\pi} \delta(\beta, \beta', \cos\theta) = \max_{-1 \leqq b \leqq 1} \delta(\beta, \beta', b) = \frac{\beta\beta'}{\beta' - \beta} \end{aligned}$$

とする．Cauchy の定理と補題 P.1 により，

$$\begin{aligned} |f'(\xi)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-\xi|=1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \xi)^2} d\zeta \right| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta-\xi|=1} |f(\zeta)|\,|d\zeta| = \max_{|\zeta-\xi|=1} |f(\zeta)| \\ &\leqq \max_{0 \leqq \theta \leqq 2\pi} Ae^{-\alpha(x+\cos\theta)^2+\beta(x'+\sin\theta)^2} \\ &\leqq Ae^{-\alpha' x^2 - d_1 + \beta' x'^2 + d_2} \leqq Ae^{-d_1+d_2}e^{-\alpha' x^2+\beta' x'^2} \end{aligned}$$

となる．よって，$f' \in \mathbf{G}(\alpha', \beta')$ である． □

（定理 7.5 の証明） 不等式

$$\begin{aligned} |F_1(\xi)| &= \left| \int_{-\infty}^{x} f_1(y + ix')dy \right| \leqq \int_{-\infty}^{x} |f_1(y + ix')|\,dy \\ &\leqq \int_{-\infty}^{\infty} A_1 e^{-\alpha_1 y^2 + \beta_1 x'^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1}}\, A_1 e^{\beta_1 x'^2} \end{aligned}$$

より，

$$|F_1(x) f_2(x)| \leqq \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1}}\, A_1 e^{\beta_1 x'^2} A_2 e^{-\alpha_2 x^2 + \beta_2 x'^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1}}\, A_1 A_2 e^{-\alpha_2 x^2 + (\beta_1+\beta_2) x'^2}$$

である． □

（定理 7.6 の証明） Cauthy の定理により，任意の $y \in \mathbb{R}$ について，

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + iy) e^{i\omega(x+iy)} dx$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
\left|\hat{f}(u+iv)\right| &\leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|\left|e^{i(u+iv)(x+iy)}\right|dx \\
&\leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}Ae^{-\alpha x^2+\beta y^2-vx-uy}dx \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi}}e^{\beta y^2-uy}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha x^2-vx}dx \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi}}e^{\beta y^2-uy}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{v^2/(4\alpha)}
\end{aligned}
$$

となる．ここで，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha x^2-vx}dx=\sqrt{\pi/\alpha}\ e^{v^2/(4\alpha)}$ を用いた．最右辺の $\beta y^2-uy=\beta\{y-(u/2\beta)\}^2-u^2/(4\beta)$ を最小化するために $y=u/(2\beta)$ と置くと，

$$
\left|\hat{f}(u+iv)\right| \leqq \frac{A}{\sqrt{2\alpha}}e^{-u^2/(4\beta)+v^2/(4\alpha)}
$$

である．後半も同様に証明できる． □

（**定理 7.7 の証明**）$f\in\mathbf{G}(\alpha,\beta)$，$f\neq 0$ であるから，

$$
0<A\equiv\sup_{x,y\in\mathbb{R}}\frac{|f(x+iy)|}{e^{-\alpha x^2+\beta y^2}}<\infty
$$

である．この A について $f\in\mathbf{G}(A,\alpha,\beta)$ であるから，定理 7.6 第 1 式より

$$
\hat{f}\in\mathbf{G}(A',\alpha',\beta'),\ A'=\frac{A}{\sqrt{2\alpha}},\ \alpha'=\frac{1}{4\beta},\ \beta'=\frac{1}{4\alpha}
$$

である．さらに，定理 7.6 第 2 式を用いて，

$$
f\in\mathbf{G}(A'',\alpha'',\beta''),\ A''=\frac{A'}{\sqrt{2\alpha'}},\ \alpha''=\frac{1}{4\beta'},\ \beta''=\frac{1}{4\alpha'}
$$

となる．ここで，

$$
A''=\frac{A'}{\sqrt{2\alpha'}}=\frac{A/\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{2(1/4\beta)}}=A\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}},\ \alpha''=\frac{1}{4(1/(4\alpha))}=\alpha,\ \beta''=\frac{1}{4(1/(4\beta))}=\beta
$$

であるから，

$$
f\in\mathbf{G}\left(A\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}},\alpha,\beta\right)
$$

を得る．ゆえに，全ての $x,y\in\mathbb{R}$ について，

$$
|f(x+iy)|\leqq A\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}e^{-\alpha x^2+\beta y^2}.
$$

よって，

$$
A=\sup_{x,y\in\mathbb{R}}\frac{|f(x+iy)|}{e^{-\alpha x^2+\beta y^2}}\leqq A\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}
$$

これと $A>0$ より，$\beta\geqq\alpha$ である． □

注 P.1　この定理によれば，$\alpha>\beta$ なら $\mathbf{G}(\alpha,\beta)=\{0\}$ である．また，$\alpha=\beta$ なら，

$$
\mathbf{G}(\alpha,\alpha)=\left\{a\varphi(\sqrt{1/(2\alpha)},\cdot)\ \middle|\ a\in\mathbb{C}\right\}
$$

であることを，青山学院大学の杉原正顯教授からご指摘頂いた．

(定理 7.8 の証明) 定理 7.6 第 1 式より，$\hat{f} \in \mathbf{G}(A/\sqrt{2\alpha},\ 1/(4\beta),\ 1/(4\alpha))$, $\hat{g} \in \mathbf{G}(A'/\sqrt{2\alpha'},\ 1/(4\beta'),\ 1/(4\alpha'))$ ゆえ，

$$\hat{h} = \sqrt{2\pi}\hat{f}\,\hat{g} \in \mathbf{G}\left(\sqrt{2\pi}\frac{A}{\sqrt{2\alpha}}\frac{A'}{\sqrt{2\alpha'}},\ \frac{1}{4\beta}+\frac{1}{4\beta'},\ \frac{1}{4\alpha}+\frac{1}{4\alpha'}\right) = \mathbf{G}\left(AA'\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha\alpha'}},\ \frac{\beta+\beta'}{4\beta\beta'},\ \frac{\alpha+\alpha'}{4\alpha\alpha'}\right).$$

よって，定理 7.6 第 2 式より

$$h \in \mathbf{G}\left(AA'\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha\alpha'}}\Big/\sqrt{\frac{\beta+\beta'}{2\beta\beta'}},\ \frac{\alpha\alpha'}{\alpha+\alpha'},\ \frac{\beta\beta'}{\beta+\beta'}\right) = \mathbf{G}\left(AA'\sqrt{\frac{\pi\beta\beta'}{\alpha\alpha'(\beta+\beta')}},\ \frac{\alpha\alpha'}{\alpha+\alpha'},\ \frac{\beta\beta'}{\beta+\beta'}\right)$$

である． □

(定理 7.9 の証明) 条件より，$\xi = x + ix' \in \mathbb{C}$ について，

$$\begin{aligned}
|f * g(\xi)| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi - t)g(t)dt\right| \\
&\leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi - t)g(t)|\,dt \\
&\leqq \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\alpha(x-t)^2+\beta x'^2}A'e^{-\alpha' t^2}dt \\
&\leqq AA'\exp\left(\frac{\alpha}{\alpha+\alpha'}x^2\beta x'^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left((\alpha+\alpha')\left(t-\frac{\alpha}{\alpha+\alpha'}\right)^2\right)dt \\
&\leqq \sqrt{\frac{\pi}{\alpha+\alpha'}}AA'\exp\left(\frac{\alpha\alpha'}{\alpha+\alpha'}x^2+\beta x'^2\right)
\end{aligned}$$

である．ここで，

$$\begin{aligned}
\alpha(x-t)^2 + \alpha' t^2 &= (\alpha+\alpha')\left(t - \frac{\alpha}{\alpha+\alpha'}x\right)^2 - \frac{\alpha^2}{\alpha+\alpha'}x^2 + \alpha x^2 \\
&= (\alpha+\alpha')\left(t - \frac{\alpha}{\alpha+\alpha'}x\right)^2 + \frac{\alpha\alpha'}{\alpha+\alpha'}x^2
\end{aligned}$$

を用いた． □

多変数整関数の積分表現

密度関数，分布関数の解析接続を議論するため，多変数正則関数とその積分表現について考える．

n 変数複素関数 $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ が点 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{C}^n$ で正則 (解析的) であるとは，f が $\boldsymbol{\alpha}$ を中心とした Taylor 展開を持つことである．$\mathbb{C}^n$ 全域で正則な関数を整関数と言う．次の命題は基本的である．

命題 P.1　n 変数複素関数 f が点 $\boldsymbol{\alpha}$ で各変数について正則なら，n 変数複素関数として $\boldsymbol{\alpha}$ で正則である．

系 P.1　n 変数複素関数 f が各変数について整関数なら，f は n 変数整関数である．

複素数 $\alpha,\ \beta\in\mathbb{C}$ を結ぶ線分を

$$C(\alpha,\beta):\xi=(1-y)\alpha+y\beta\ \ (y:0\to 1)$$

と書く．実数 a に対し，実軸上の半直線を

$$C(-\infty,a):\xi=y\ \ (y:-\infty\to a),$$
$$C(a,\infty):\xi=y\ \ (y:a\to\infty)$$

と書く．

2 点 $\alpha,\ \beta\in\mathbb{C}$ に対して，次の複素積分を定義する．

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta f(\xi)d\xi &\equiv \int_{C(\alpha,\beta)} f(\xi)d\xi,\\
\int_{-\infty}^\beta f(\xi)d\xi &\equiv \int_{C(-\infty,0)+C(0,\beta)} f(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^0 f(x)dx+\int_0^\beta f(\xi)d\xi,\\
\int_\alpha^\infty f(\xi)d\xi &\equiv \int_{C(\alpha,0)+C(0,\infty)} f(\xi)d\xi = \int_\alpha^0 f(\xi)d\xi+\int_0^\infty f(x)dx.
\end{aligned}\tag{P.1}$$

定義 P.1　関数族 $\mathbf{G}^3$ を，3 変数整関数 $f(\tau,\xi,\eta)$ $\big((\tau,\xi,\eta)=(t+it',x+ix',y+iy')\in\mathbb{C}^3\big)$ で，正数 $A>0$ と y^2 の係数が正の 2 次形式 $a(t,x,y)$ 及び 2 次形式 $b(t',x',y')$ が存在し，

$$|f(\tau,\xi,\eta)|\leqq Ae^{-a(t,x,y)+b(t',x',y')}\qquad\big((\tau,\xi,\eta)\in\mathbb{C}^3\big)\tag{P.2}$$

が成立するもの全体から成る族とする．

命題 P.2　関数 $f\in\mathbf{G}^3$ なら，

$$F(\tau,\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau,\xi,y)dy$$

は $(\tau,\xi)\in\mathbb{C}^2$ の整関数である．

（証明）$f(\tau,\xi,\eta)$ は不等式 (P.2) を満たすとする．$p>0$ について，有限積分で定義される関数

$$F_p(\tau,\xi)=\int_{-p}^{p} f(\tau,\xi,y)dy$$

は $(\tau,\xi)\in\mathbb{C}^2$ の整関数である．$F_p(\tau,\xi)$ $(p\to\infty)$ が $(\tau,\xi)\in\mathbb{C}^2$ で広義一様収束することを示せばよい．

集合 $D\subset\mathbb{C}^2$ を任意の有界閉集合とする．2 次形式 $a(t,x,y)$ の y^2 の係数を $1/(2\sigma^2)$ とし，y に関する平方完成を

$$a(t,x,y)=\{y+c(t,x)\}^2/(2\sigma^2)+d(t,x)\tag{P.3}$$

とする．$c(t,x)$ は t, x の 1 次式，$d(t,x)$ は t, x の 2 次形式である．$\tau = t + it'$, $\xi = x + ix'$ とし，

$$\begin{aligned} A_{\max} &= \max_{(\tau,\xi)\in D} Ae^{b(t,x,0)-d(t,x)}, \\ c_{\min} &= \min_{(\tau,\xi)\in D} c(t,x), \\ c_{\max} &= \max_{(\tau,\xi)\in D} c(t,x) \end{aligned}$$

とすると，

$$\begin{aligned} \left|\int_p^\infty f(\tau,\xi,y)dy\right| &\leqq \int_p^\infty |f(\tau,\xi,y)|\,dy \\ &\leqq \int_p^\infty Ae^{-\{y+c(t,x)\}^2/(2\sigma^2)-d(t,x)+b(t',x',0)}dy \\ &= Ae^{b(t',x',0)-d(t,x)}\int_p^\infty e^{-\{y+c(t,x)\}^2/(2\sigma^2)}dy \\ &= Ae^{b(t',x',0)-d(t,x)}\sqrt{2\pi}\,\sigma\left\{1-\mathit{\Phi}\left(\frac{p+c(t,x)}{\sigma}\right)\right\} \\ &\leqq \sqrt{2\pi}\,\sigma A_{\max}\left\{1-\mathit{\Phi}\left(\frac{p+c_{\min}}{\sigma}\right)\right\} \to 0 \;\; (p\to\infty) \end{aligned}$$

同様に

$$\left|\int_{-\infty}^{-p} f(\tau,\xi,y)dy\right| \leqq \sqrt{2\pi}\,\sigma A_{\max}\mathit{\Phi}\left(\frac{-p+c_{\max}}{\sigma}\right) \to 0 \;\; (p\to\infty) \tag{P.4}$$

ゆえに，$(\tau,\xi)\in D$ で $F_p(\tau,\xi)$ $(p\to\infty)$ は一様収束する．よって，$F_p(\tau,\xi)$ $(p\to\infty)$ は $(\tau,\xi)\in\mathbb{C}^2$ で広義一様収束する． □

命題 P.3　関数 $f\in\mathbf{G}^3$ なら，任意の整関数 $\omega(\tau,\xi)$ $(\tau,\xi\in\mathbb{C})$ について，

$$\begin{aligned} F_-(\tau,\xi) &\equiv \int_{-\infty}^{\omega(\tau,\xi)} f(\tau,\xi,\eta)\,d\eta, \\ F_+(\tau,\xi) &\equiv \int_{\omega(\tau,\xi)}^{\infty} f(\tau,\xi,\eta)\,d\eta \end{aligned} \tag{P.5}$$

は $(\tau,\xi)\in\mathbb{C}^2$ の整関数である．また，

$$\begin{aligned} F_-(\tau,\xi) &= \int_{-\infty}^{\mathrm{Re}\,\omega(\tau,\xi)} f(\tau,\xi,y+i\,\mathrm{Im}\,\omega(\tau,\xi))\,dy, \\ F_+(\tau,\xi) &= \int_{\mathrm{Re}\,\omega(\tau,\xi)}^{\infty} f(\tau,\xi,y+i\,\mathrm{Im}\,\omega(\tau,\xi))\,dy \end{aligned} \tag{P.6}$$

である．

（証明）$f(\tau,\xi,\eta)$ は不等式 (P.2) を満たすとする．$F_-(\tau,\xi)$ について (P.5), (P.6) を証明する．$F_+(\tau,\xi)$ についても同様である．

まず，(P.5) を示す．実数 $p\in\mathbb{R}$ について，

$$F_p(\tau,\xi) \equiv \int_{-p}^{0} f(\tau,\xi,y)\,dy + \int_0^{\omega(\tau,\xi)} f(\tau,\xi,\eta)\,d\eta$$

は有限積分だから，$(\tau,\xi)\in\mathbb{C}^2$ の整関数である．

集合 $D\subset\mathbb{C}^2$ を任意の有界閉集合とする．命題 P.2 の式 (P.4) より，

$$|F_-(\tau,\xi)-F_p(\tau,\xi)| = \left|\int_{-\infty}^{-p} f(\tau,\xi,y)dy\right|$$

は $(\tau,\xi)\in D$ で 0 に一様収束する．ゆえに，$F_p(\tau,\xi)$ $(p\to\infty)$ は $(\tau,\xi)\in\mathbb{C}^2$ で $F_-(\tau,\xi)$ に広義一様収束する．よって，$F_-(\tau,\xi)$ は $(\tau,\xi)\in\mathbb{C}^2$ の整関数である．

次に，式 (P.6) を示す．固定された $(\tau,\xi)\in\mathbb{C}^2$ に対し，$\omega(\tau,\xi)=w+iw'$ とする．実数 $p\in\mathbb{R}$ に対し，積分路

$$\Gamma=C(-\infty,-p)+C(-p,-p+iw')+C(-p+iw',w+iw')$$

を取ると，Cauchy の積分定理より，

$$\begin{aligned}F_-(\tau,\xi)&=\int_\Gamma f(\tau,\xi,\eta)d\eta\\&=\int_{-\infty}^{-p}f(\tau,\xi,y)dy+i\int_0^{w'}f(\tau,\xi,p+iy')dy'+\int_p^w f(\tau,\xi,y+iw')dy\end{aligned}\tag{P.7}$$

である．右辺第 1 項は (P.4) より，$p\to\infty$ で 0 に収束する．第 2 項については，

$$b_{\max}=\max_{0\leqq y'\leqq w'}b(t',x',y')$$

とすると，

$$\begin{aligned}\left|i\int_0^{w'}f(\tau,\xi,-p+iy')dy'\right|&\leqq\int_0^{w'}\left|f(\tau,\xi,-p+iy')\right|dy'\\&\leqq\int_0^{w'}Ae^{-a(t,x,-p)+b(t',x',y')}dy'\\&\leqq Ae^{-a(t,x,-p)+b_{\max}}\int_0^{w'}dy'\\&=w'Ae^{-a(t,x,-p)+b_{\max}}\end{aligned}$$

で押さえられる．条件より $a(t,x,y)$ は y の 2 次式で y^2 の係数は正だから，$a(t,x,-p)\to\infty$．ゆえに，第 2 項も $p\to\infty$ で 0 に収束する．ゆえに，式 (P.7) で $p\to\infty$ とすると，

$$F_-(\tau,\xi)=\int_{-\infty}^{w}f(\tau,\xi,y+iw')dy=\int_{-\infty}^{\mathrm{Re}\,\omega(\tau,\xi)}f(\tau,\xi,y+i\,\mathrm{Im}\,\omega(\tau,\xi))dy$$

である． □

系 P.2　標準正規関数の密度関数 $\varphi(\xi)$ と分布関数 $\Phi(\xi)$ について，$\xi=x+ix'\in\mathbb{C}$ について，

$$|\varphi(\xi)|\leqq\varphi(x)e^{x'^2/2},\tag{P.8}$$

$$|\Phi(\xi)|\leqq\Phi(x)e^{x'^2/2},\tag{P.9}$$

$$|1-\Phi(\xi)|\leqq(1-\Phi(x))e^{x'^2/2}\ \ (\xi=x+ix')\tag{P.10}$$

である．

（証明）まず，

$$|\varphi(\xi)|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2+x'^2/2}=\varphi(x)e^{x'^2/2}$$

である．これより，$\varphi(\eta)$ $(\eta\in\mathbb{C})$ は $(\tau,\xi,\eta)\in\mathbb{C}^3$ の関数として，$\mathbf{G}^3$ に属する．また，$\omega(\xi)=\xi$ は $(\tau,\xi)\in\mathbb{C}^2$

の整関数である．ゆえに，命題 P.3 より，

$$
\begin{aligned}
|\varPhi(\xi)| = \left|\int_{-\infty}^{\omega(\xi)} \varphi(\eta)d\eta\right| \qquad &= \int_{-\infty}^{x} |\varphi(y+ix')|\, dy \\
= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2+x'^2/2} dy &= e^{x'^2/2}\int_{-\infty}^{x}\varphi(y)dy \\
= \varPhi(x)e^{x'^2/2}.
\end{aligned}
$$

同様にして，

$$
|1-\Phi(\xi)| \leqq \int_{x}^{\infty} |\varphi(y+ix')|\, dy = e^{x'^2/2}\int_{-\infty}^{x}\varphi(y)dy = (1-\Phi(x))e^{x'^2/2}
$$

である． □

注 P.2　不等式 (P.9)，(P.10) は簡潔であるが，あまり良い不等式でないことは承知している．

$$
\Phi(\xi) = \int_{-\infty}^{x}\varphi(y)dy + i\int_{0}^{x'}\varphi(x+iy')dy' = \Phi(x) + i\int_{0}^{x'}\varphi(x+iy')dy'
$$

において，

$$
\left|\int_{0}^{x'}\varphi(x+iy')dy'\right| \leqq \int_{0}^{x'}|\varphi(x+iy')|\,|dy'| \leqq \varphi(x)\int_{0}^{|x'|}e^{y'^2}dy
$$

を真面目に押さえた方が良い不等式が得られるであろう．

P.1.4　有限 sinc 近似の誤差理論

原著 p.212 の有限 sinc 近似と sinc 近似の差 (打ち切り誤差) を，引用のためここに転載する．

$$\check{E}c_{\boldsymbol{x}}^{n}[f](x) \equiv c_{\boldsymbol{x}}^{n}[f](x) - c_{\boldsymbol{x}}[f](x) \quad = -\sum_{|k|>n} f(kh)s_h(x_k, x), \tag{P.11}$$

$$\check{E}C_{\boldsymbol{x}}^{n}[f](x) \equiv C_{\boldsymbol{x}}^{n}[f](x) - C_{\boldsymbol{x}}[f](x) = -\sum_{|k|>n} f(kh)S_h(x_k, x), \tag{P.12}$$

$$\check{E}T_{\boldsymbol{x}}^{n}[f] \equiv T_{\boldsymbol{x}}^{n}[f] - T_{\boldsymbol{x}}[f] \qquad = -h\sum_{|k|>n} f(kh) \tag{P.13}$$

定理 7.10 式 (7.18) を証明しよう．始めに，Stenger[5] の誤差理論を紹介する．複素平面 $\mathbb{C}$ の帯領域 $\mathcal{D}_d$ を

$$\mathcal{D}_d \equiv \{x + ix' \mid x,\ x' \in \mathbb{R},\ |x'| < d\}$$

で定義する (図 P.1)．$\mathcal{D}_d$ で解析的な関数の族 $\mathbf{H}^1(\mathcal{D}_d)$ を次のように定義する．

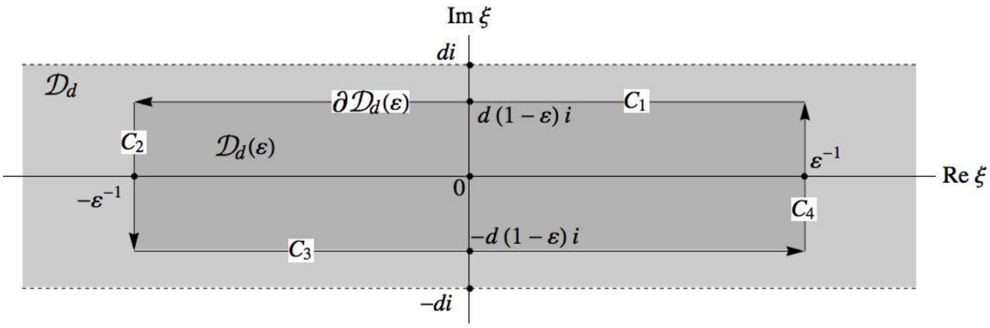

図 P.1　領域 $\mathcal{D}_d$, $\mathcal{D}_d(\varepsilon)$ と境界 $\partial\mathcal{D}_d(\varepsilon) = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$

定義 P.2　$\mathbf{H}^1(\mathcal{D}_d)$ は $\mathcal{D}_d$ で解析的な関数 $f(\xi)$ で

$$N_1(f,\ \mathcal{D}_d) \equiv \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{\partial\mathcal{D}_d(\varepsilon)} |f(\xi)|\,|d\xi| < \infty \tag{P.14}$$

を満たすもの全体の族である．ここで，

$$\mathcal{D}_d(\varepsilon) \equiv \left\{\xi = x + ix' \;\middle|\; |x| < \varepsilon^{-1},\ |x'| < d(1-\varepsilon)\right\} \qquad (0 < \varepsilon < 1)$$

であり，$\partial\mathcal{D}_d(\varepsilon)$ はその境界である (図 P.1)．

命題 P.4　(Stenger[5] の (3.1.12), (3.6.27), (3.2.3)) $f \in \mathbf{H}^1(\mathcal{D}_d)$ なら，離散化誤差は，

$$\begin{aligned} \|Ec_{\boldsymbol{x}}[f]\|_\infty &\leqq \frac{N_1(f,\mathcal{D}_d)}{2\pi d\sinh(\pi d/h)} &&= O\left(d^{-1}e^{-\pi d/h}\right), \\ \|EC_{\boldsymbol{x}}[f]\|_\infty &\leqq \frac{hN_1(f,\mathcal{D}_d)}{4d\sinh(\pi d/h)} &&= O\left(hd^{-1}e^{-\pi d/h}\right), \\ |ET_{\boldsymbol{x}}[f]| &\leqq \frac{e^{-\pi d/h}N_1(f,\mathcal{D}_d)}{2\sinh(\pi d/h)} &&= O\left(e^{-2\pi d/h}\right) \end{aligned} \tag{P.15}$$

で評価される．

命題 P.4 から次の補題が得られる．

補題 P.2　$f \in \mathbf{G}$ が不等式 (7.16) を満たすとき，任意の $d>0$ に対し，

$$N_1(f,\ \mathcal{D}_d) \leqq 2A\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\ e^{\beta d^2}$$

が成立する．

（証明）$f \in \mathbf{G}$ ゆえ，$f(\xi)$ は $\mathbb{C}$ 全域で解析的．ゆえに，任意の $d>0$ について，$f(\xi)$ は領域 $\mathcal{D}_d$ で解析的である．式 (P.14) の積分路を

$$\begin{aligned}
\partial\mathcal{D}_d(\varepsilon) = {} & C_1 + C_2 + C_3 + C_4, \\
& C_1 :\ \xi = s + id' \qquad (s :\ \varepsilon^{-1} \to -\varepsilon^{-1}), \\
& C_2 :\ \xi = -\varepsilon^{-1} + is \quad (s :\ d' \to -d'), \\
& C_3 :\ \xi = s - id' \qquad (s :\ -\varepsilon^{-1} \to \varepsilon^{-1}), \\
& C_2 :\ \xi = \varepsilon^{-1} + is \qquad (s :\ -d' \to d')
\end{aligned}$$

と分割する (図 P.1)．ここで，$d' = d(1-\varepsilon)$ である．まず，

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} |f(\xi)|\,|d\xi| &\leqq \int_{-\varepsilon^{-1}}^{\varepsilon^{-1}} A e^{-\alpha s^2 + \beta d'^2} ds \leqq A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha s^2 + \beta d^2} ds = A\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\ e^{\beta d^2}, \\
\int_{C_2} |f(\xi)|\,|d\xi| &\leqq \int_{-d'}^{d'} A e^{-\alpha\varepsilon^{-2} + \beta s^2} ds \ \leqq A e^{-\alpha\varepsilon^{-2}} \int_{-d}^{d} e^{\beta s^2} ds = o(\varepsilon) \qquad (\varepsilon \to 0)
\end{aligned}$$

である．同様に

$$\begin{aligned}
\int_{C_3} |f(\xi)|\,|d\xi| &\leqq A\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\ e^{\beta d^2}, \\
\int_{C_4} |f(\xi)|\,|d\xi| &= o(\varepsilon) \qquad (\varepsilon \to 0)
\end{aligned}$$

が示せる．ゆえに，

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D_d(\varepsilon)} |f(\xi)|\,|d\xi| &= \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}\right) |f(\xi)|\,|d\xi| \leqq 2A\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\ e^{\beta d^2} + o(\varepsilon), \\
N_1(f,\ \mathcal{D}_d) &= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial D_d(\varepsilon)} |f(\xi)|\,|d\xi| \leqq 2A\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\ e^{\beta d^2}
\end{aligned}$$

である．□

以上の準備の元に，定理 7.10 の式 (7.18) を示す．

（定理 7.10 式 (7.18) の証明） 定理 P.4 と補題 P.2 より，任意の $d>0$ で

$$\begin{aligned}
\|Ec_{\boldsymbol{x}}[f]\|_\infty &\leqq \frac{N_1(f, \mathcal{D}_d)}{2\pi d \sinh(\pi d/h)} \\
&\leqq \frac{2A\sqrt{\pi/\alpha}\,e^{\beta d^2}}{\pi d(e^{\pi d/h} - e^{-\pi d/h})} \\
&= \frac{2A}{\sqrt{\pi\alpha}\,d(1 - e^{-2\pi d/h})} e^{\beta d^2 - \pi d/h}
\end{aligned}$$

となる．ここで，最右辺の e の指数 $\beta d^2 - \pi d/h$ を最小とする $d = \pi/(2\beta h)$ を選ぶと，式 (7.18) の最初の不等式を得る．$\|EC_{\boldsymbol{x}}[f]\|_\infty$ に関する第 2 の不等式についても同様である．また，$|ET_{\boldsymbol{x}}[f]|$ に関する第 3 の不等

式については，

$$
\begin{aligned}
|ET_{\boldsymbol{x}}| &\leqq \frac{e^{-\pi d/h} N_1(f, \mathcal{D}_d)}{2\sinh(\pi d/h)} \\
&\leqq \frac{2A\sqrt{\pi/\alpha}\, e^{\beta d^2 - \pi d/h}}{e^{\pi d/h} - e^{-\pi d/h}} \\
&= \frac{2\sqrt{\pi}A}{\sqrt{\alpha}(1 - e^{-2\pi d/h})} e^{\beta d^2 - 2\pi d/h}
\end{aligned}
$$

に，$d = \pi/(\beta h)$ を代入することにより得られる． □

最後に定理 7.10 の式 (7.19) を示す．

（定理 7.10 式 (7.19) の証明） 打ち切られた標本値 $f(kh)$ の絶対値和を

$$
E_h^n[f] = \sum_{|k|>n} |f(kh)|
$$

とすると，不等式 (7.16) より，

$$
\begin{aligned}
E_h^n[f] = \sum_{|k|>n} |f(kh)| &\leqq \sum_{|k|>n} A e^{-\alpha k^2 h^2} \\
&\leqq 2A \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-\alpha(n+1)kh^2} \\
&= 2A \frac{e^{-\alpha(n+1)^2 h^2}}{1 - e^{-\alpha(n+1)h^2}} < \frac{2A}{1 - e^{-\alpha R h}} e^{-\alpha R^2}
\end{aligned}
\tag{P.16}
$$

である．

式 (P.11) と式 (7.4) より，

$$
\left\| \check{E}c_{\boldsymbol{x}}^n[f] \right\|_\infty \leqq \sum_{|k|>n} |f(kh)| \, \|s_h(x_k, \cdot)\|_\infty = \sum_{|k|>n} |f(kh)| = E_h^n[f]. \tag{P.17}
$$

また，式 (P.12) と式 (7.10) より，

$$
\left\| \check{E}C_{\boldsymbol{x}}^n[f] \right\|_\infty \leqq \sum_{|k|>n} |f(kh)| \, \|S_h(x_k, \cdot)\|_\infty = \frac{4h}{\pi} \sum_{|k|>n} |f(kh)| = \frac{4h}{\pi} E_h^n[f]. \tag{P.18}
$$

最後に，式 (P.13) より，

$$
\left| \check{E}T_{\boldsymbol{x}}^n[f] \right| h \leqq \sum_{|k|>n} |f(kh)| = hE_h^n[f] \tag{P.19}
$$

である．

式 (P.17)，(P.18)，(P.19) に (P.16) を用いて (7.19) が示される． □

P.1.6　原始関数の有限 sinc 補間

（定理 7.11 の証明） $g(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ の $\xi = x + ix \in \mathbb{C}$ への解析接続

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} g'(\eta) d\eta$$

を考える．$A_1 = \max\left\{A,\ F(\infty)/(\sqrt{2\pi}\sigma)\right\}$ と置くと，

$$\begin{aligned}
|g'(\eta)| &= \left| f(\eta) - F(\infty)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\eta^2/(2\sigma^2)} \right| \\
&\leqq Ae^{-\alpha y^2+\beta y'^2} + \frac{F(\infty)}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{(-y^2+y'^2)/(2\sigma^2)} \\
&\leqq A_1 e^{-\alpha' y^2+\beta' y^2}.
\end{aligned}$$

また，積分上限 $\omega(\tau,\xi) = \xi$ は $(\tau,\xi) \in \mathbb{C}^2$ の解析関数であるから，命題 P.3 より，

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{x} g'(y + ix)dy$$

は整関数.

さて，$x \leqq 0$ のとき，

$$|g(\xi)| \leqq \int_{-\infty}^{x} |g'(y+ix')|\, dy = \int_{-x}^{\infty} |g'(-y+ix')|\, dy \leqq \int_{|x|}^{\infty} A_1 e^{-\alpha' y^2+\beta' x'^2}dy.$$

$x > 0$ のとき，$g(\infty) = F(\infty) - F(\infty)\Phi(\sigma,\infty) = 0$ より，

$$\begin{aligned}
|g(z)| = |g(z) - g(\infty)| &= \left| \int_{-\infty}^{x} g'(y+ix')dy - \int_{-\infty}^{\infty} g'(y+ix')dy \right| \\
&= \left| \int_{x}^{\infty} g'(y+ix')dy \right| \leqq \int_{x}^{\infty} |g'(y+ix')|\, dy \\
&\leqq \int_{|x|}^{\infty} A_1 e^{-\alpha' y^2+\beta' x'^2}dy.
\end{aligned}$$

よって，任意の $x \in \mathbb{R}$ で

$$\begin{aligned}
|g(z)| &\leqq \int_{|x|}^{\infty} A_1 e^{-\alpha' y^2+\beta' x'^2}dy = A_1 e^{\beta' x'^2}\int_{|x|}^{\infty} e^{-\alpha' y^2}dy \\
&= A_1 e^{\beta' x'^2}\frac{1}{\sqrt{\alpha'}}\int_{\sqrt{\alpha'}|x|}^{\infty} e^{-y^2}dy \\
&\leqq A_1 e^{\beta' x'^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha'}}e^{-\alpha' x^2} = A' e^{-\alpha' x^2+\beta' x'^2}
\end{aligned}$$

である．ここで，Abramowitz and Stegun[3] の不等式 7.1.13；

$$\int_{x}^{\infty} e^{-t^2}dt \leqq \frac{e^{-x^2}}{x+\sqrt{x^2+4/\pi}} \leqq \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2} \qquad (x \geqq 0)$$

を用いた． □

P.2　最大値統計量の分布関数の性質

この節では，自由度 m の χ^2 分布に従う確率変数 $U_E \sim \chi^2_m$ に対し，$\sqrt{U_E/m}$ の密度関数を

$$g(x|m) = \frac{2(m/2)^{m/2}}{\Gamma(m/2)} x^{m-1} e^{-mx^2/2} \quad (x \geqq 0) \tag{P.20}$$

と書く．

P.2.1　ヘイター型統計量の分布関数とその性質

7.2.1 節で定義した関数の解析接続を考える．複素数 $\tau,\ \xi \in \mathbb{C}$ に対し，$H_r(\tau, \xi)$ $(r \geqq 1)$ を

$$H_1(\tau, \xi) = \Phi(\sqrt{2}\,\tau + \xi), \tag{P.21}$$

$$H_r(\tau, \xi) = \int_{-\infty}^{\xi} H_{r-1}(\tau, \eta)\varphi(\eta)d\eta + H_{r-1}(\tau, \xi)\left\{\Phi(\sqrt{2}\,\tau + \xi) - \Phi(\xi)\right\} \quad (r \geqq 2) \tag{P.22}$$

で定義する．また，$D_1(\tau|k)$ $(k \geqq 1)$ を

$$D_1(\tau|k) = \int_{-\infty}^{\infty} H_{k-1}(\tau, y)\varphi(y)dy \tag{P.23}$$

で定義する．これらは $\tau,\ \xi \in \mathbb{R}$ のときは $H_r(t, x),\ D_1(t|k)$ と一致する．これらが $(\tau, \xi) \in \mathbb{C}^2$ の整関数となることを示し，定理 7.12, 7.13 を証明する．

命題 P.5　命題 1 式 (P.21), (P.22) で定義された $H_r(\tau, \xi)$ $(r \geqq 1)$ は $(\tau, \xi) \in \mathbb{C}^2$ の整関数であり，ある正定数 $A > 0$ に対し

$$|H_r(\tau, \xi)| \leqq A e^{r(\sqrt{2}t' + x')^2/2 + (r-1)x'^2/2} \tag{P.24}$$

を満たす．また，

$$H_r(\tau, \xi) = \int_{-\infty}^{x} H_{r-1}(\tau, y + ix')\varphi(y + ix')dy + H_{r-1}(\tau, \xi)\left\{\Phi(\sqrt{2}\,\tau + \xi) - \Phi(\xi)\right\} \tag{P.25}$$

である．

（証明）$r \geqq 1$ に関する帰納法による．$r = 1$ のとき，系 P.2 式 (P.9) より，

$$|H_1(\tau, \xi)| = \left|\Phi(\sqrt{2}\tau + \xi)\right| \leqq \Phi(\sqrt{2}t + x)e^{(\sqrt{2}t' + x')^2/2} \leqq e^{(\sqrt{2}t' + x')^2/2}$$

で，式 (P.24) は成立する．いま，ある $r \geqq 2$ について，

$$|H_{r-1}(\tau, \xi)| \leqq A' e^{(r-1)(\sqrt{2}t' + x')^2/2 + (r-2)x'^2/2}$$

を仮定する．式 (P.22) の被積分関数を $f(\tau, \xi, \eta) = H_{r-1}(\tau, \eta)\varphi(\eta)$ と置くと，

$$\begin{aligned} |f(\tau, \xi, \eta)| &= |H_{r-1}(\tau, \eta)\varphi(\eta)| \\ &\leqq A' e^{(r-1)(\sqrt{2}t' + y')^2/2 + (r-2)y'^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2 + y'^2/2} \\ &\leqq \frac{A'}{\sqrt{2\pi}} e^{(r-1)(\sqrt{2}t' + y')^2/2 + (r-1)y'^2/2} e^{-y^2/2} \end{aligned}$$

ゆえ $f \in \mathbf{G}^3$ である．また，$\omega(\tau, \xi) = \xi$ は $(\tau, \xi) \in \mathbb{C}$ の整関数であるから，命題 P.3 より，$H_r(\tau, \xi)$ は $(\tau, \xi) \in \mathbb{C}$ の整関数であり，式 (P.25) が成り立つ．

式 (P.25) と系 P.2(P.8)，(P.9) より，

$$
\begin{aligned}
|H_r(\tau,\xi)| &\leqq \int_{-\infty}^{x} |H_{r-1}(\tau, y+ix')\varphi(y+ix')|\,dy + |H_{r-1}(\tau,\xi)| \left\{ \left|\Phi(\sqrt{2}\,\tau+\xi)\right| + |\Phi(\xi)| \right\} \\
&\leqq \int_{-\infty}^{x} A' e^{(r-1)(\sqrt{2}t'+x')^2/2+(r-2)x'^2/2} e^{x'^2/2} \varphi(y)dy \\
&\quad + A' e^{(r-1)(\sqrt{2}t'+x')^2/2+(r-2)x'^2/2} \left\{ e^{(\sqrt{2}t'+x')^2/2} + e^{x'^2/2} \right\} \\
&\leqq A' e^{(r-1)(\sqrt{2}t'+x')^2/2+(r-1)x'^2/2} \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy + 2A' e^{r(\sqrt{2}t'+x')^2/2+(r-1)x'^2/2} \\
&\leqq 3A' e^{r(\sqrt{2}t'+x')^2/2+(r-1)x'^2/2}
\end{aligned}
$$

ここで，$A = 3A'$ とすると，不等式 (P.24) が成立する． □

（定理 7.12(7.38) の証明） $r \geqq 1$ に関する数学的帰納法により，

$$
|H_r(t,\xi)| \leqq e^{rx'^2/2} \quad (t \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{C}) \tag{P.26}
$$

を示す．$r = 1$ のとき，式 (P.21) と系 P.2 式 (P.9) より，

$$
|H_1(t,\xi)| = \left|\Phi(\sqrt{2}t+\xi)\right| \leqq \Phi(\sqrt{2}t+x)e^{x'^2/2} \leqq e^{x'^2/2}
$$

である．ある $r \geqq 2$ で $|H_{r-1}(t,\xi| \leqq e^{(r-1)x'^2/2}$ を帰納法の仮定とする．式 (P.25) より，

$$
\begin{aligned}
|H_r(t,\xi)| &\leqq \int_{-\infty}^{x} |H_{r-1}(t, y+ix')|\,|\varphi(y+ix')|\,dy + |H_{r-1}(t,\xi)| \left|\Phi(\sqrt{2}\,t+\xi) - \Phi(\xi)\right| \\
&\leqq \int_{-\infty}^{x} e^{(r-1)x'^2/2} |\varphi(y+ix')|\,dy + e^{(r-1)x'^2/2} \left| \int_{x}^{x+\sqrt{2}\,t} \varphi(y+ix')dy \right| \\
&\leqq \int_{-\infty}^{x} e^{(r-1)x'^2/2} |\varphi(y+ix')|\,dy + e^{(r-1)x'^2/2} \int_{x}^{x+\sqrt{2}\,t} |\varphi(y+ix')|\,dy \\
&\leqq e^{(r-1)x'^2/2} \int_{-\infty}^{x+\sqrt{2}\,t} |\varphi(y+ix')|\,dy \\
&\leqq e^{(r-1)x'^2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)e^{x'^2/2}dy \\
&\leqq e^{rx'^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)dy = e^{rx'^2/2}
\end{aligned}
$$

で不等式 (P.26) が成立する．不等式 (P.26) より，

$$
|H_r(t,\xi)\varphi(\xi)| = |H_r(t,\xi)|\,|\varphi(\xi)| \leqq e^{rx'^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2+x'^2/2} \leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2+(r+1)x'^2/2}
$$

ゆえ，(7.38) が成立する． □

（定理 7.13(7.39) の証明） $x \in \mathbb{R}$ を固定し，$\tau \in \mathbb{C}$ について，

$$
g_r(\tau,x) = \frac{\partial}{\partial\tau} H_r(\tau,x)
$$

とする．式 (P.21) と漸化式 (P.25) を形式的に微分して，$g_r(\tau,x)$ に関する漸化式

$$\begin{aligned} g_1(\tau,x) &= \sqrt{2}\varphi(\sqrt{2}\,\tau+x), \\ g_r(\tau,x) &= \int_{-\infty}^{x} g_{r-1}(\tau,y)\varphi(y)dy \\ &\quad + g_{r-1}(\tau,x)\left\{\Phi(\sqrt{2}\,\tau+x)-\Phi(x)\right\} + \sqrt{2}H_{r-1}(\tau,x)\varphi(\sqrt{2}\,\tau+x) \quad (r \geqq 2) \end{aligned}$$

を得る．これが，$\tau \in \mathbb{C}$ の整関数 $g_r(\tau,x)$ を定義することと，

$$|g_r(\tau,x)| \leqq \left(A_r e^{-(\sqrt{2}t+x)^2/2} + B_r e^{-t^2/2}\right) e^{rt'^2} \tag{P.27}$$

を $r \geqq 1$ に関する数学的帰納法で示す．

$r=1$ のとき，

$$|g_1(\tau,x)| = \left|\sqrt{2}\varphi\left(\sqrt{2}(t+it')+x\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(\sqrt{2}t+x)^2/2+t'^2}$$

ゆえ，$A_1 = 1/\sqrt{\pi},\ B_1 = 0$ で (P.27) が成立．

ある $r \geq 2$ で，

$$|g_{r-1}(\tau,x)| \leq \left(A_{r-1}e^{-(\sqrt{2}t+x)^2/2} + B_{r-1}e^{-t^2/2}\right)e^{(r-1)t'^2}$$

が成立することを帰納法の仮定する．このとき，

$$\begin{aligned} \left|\int_{-\infty}^{x} g_{r-1}(\tau,y)\varphi(y)dy\right| &\leqq \int_{-\infty}^{\infty} (A_{r-1}e^{-(\sqrt{2}t+y)^2/2} + B_{r-1}e^{-t^2/2})e^{(r-1)t'^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy \\ &= \frac{A_{r-1}}{\sqrt{2\pi}}e^{(r-1)t'^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{2}t+y)^2/2-y^2/2}dy \\ &\qquad + \frac{B_{r-1}}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2+(r-1)t'^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}dy \\ &= \frac{A_{r-1}}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2+(r-1)t'^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y+t/\sqrt{2})^2}dy \\ &\qquad + \frac{B_{r-1}}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2+(r-1)t'^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}dy \\ &= \frac{A_{r-1}}{\sqrt{2}}e^{-t^2/2+(r-1)t'^2} + B_{r-1}e^{-t^2/2+(r-1)t'^2} \\ &= \left(\frac{A_{r-1}}{\sqrt{2}} + B_{r-1}\right)e^{-t^2/2+t'^2}. \end{aligned}$$

第 2 の等号で，$(\sqrt{2}t+y)^2/2 + y^2/2 = (y+t/\sqrt{2})^2 + t^2/2$ を用いた．また，

$$\begin{aligned} \left|g_r(\tau,x)\left(\Phi(\sqrt{2}\tau+x)-\Phi(x)\right)\right| &\leqq \left(A_{r-1}e^{-(\sqrt{2}t+x)^2/2+(r-1)t'^2} + B_{r-1}e^{-t^2/2+(r-1)t'^2}\right)\left(e^{t'^2}+1\right) \\ &= 2\left(A_{r-1}e^{-(\sqrt{2}t+x)^2/2} + B_{r-1}e^{-t^2/2}\right)e^{rt'^2} \end{aligned}$$

であり，命題 P.5 より，

$$H_r(\tau,x) \leq C_r e^{rt'^2}$$

と置くと，

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{2}H_{r-1}(\tau,x)\varphi(\sqrt{2}\tau+x)\right| &\leqq \sqrt{2}C_{r-1}e^{(r-1)t'^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\sqrt{2}t+x)^2/2+rt'^2} \\ &\leqq \frac{C_{r-1}}{\sqrt{\pi}}e^{-(\sqrt{2}t+x)^2/2}e^{rt'^2}. \end{aligned}$$

ゆえに，

$$
\begin{aligned}
|g_r(\tau,x)| &\leq \left\{\left(\frac{A_{r-1}}{\sqrt{2}}+B_{r-1}\right)e^{-t^2/2}+2\left(A_{r-1}e^{-(\sqrt{2}t+x)^2/2}+B_{r-1}e^{-t^2/2}\right)+\frac{C_{r-1}}{\sqrt{\pi}}e^{-(\sqrt{2}t+x)^2/2}\right\}e^{rt'^2} \\
&= \left\{\left(2A_{r-1}+\frac{C_{r-1}}{\sqrt{\pi}}\right)e^{-(\sqrt{2}t+x)^2/2}+\left(\frac{A_{r-1}}{\sqrt{2}}+3B_{r-1}\right)e^{-t^2/2}\right\}e^{rt'^2}.
\end{aligned}
$$

よって，$A_r = 2A_{r-1}+C_{r-1}/\sqrt{\pi}$，$B_r = A_{r-1}/\sqrt{2}+3B_{r-1}$ で (12) が成立する．

最後に，不等式 (P.27) により，

$$
\begin{aligned}
|d_1(\tau|k)| &= \int_{-\infty}^{\infty}|g_{k-1}(\tau,x)|\,\varphi(x)dx \\
&\leqq \int_{-\infty}^{\infty}\left(A_{k-1}e^{-(\sqrt{2}t+x)^2/2}+B_{k-1}e^{-t^2/2}\right)e^{(k-1)t'^2}\varphi(x)dx \\
&= A_{k-1}e^{(k-1)t'^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\sqrt{2}t+x)^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx+B_{k-1}e^{-t^2/2+(k-1)t'^2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx. \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}A_{k-1}e^{(k-1)t'^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\sqrt{2}t+x)^2/2-x^2/2}dx+B_{k-1}e^{-t^2/2+(k-1)t'^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}A_{k-1}e^{-t^2/2+(k-1)t'^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x+t/\sqrt{2})^2}dx+B_{k-1}e^{-t^2/2+(k-1)t'^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}A_{k-1}e^{-t^2/2+(k-1)t'^2}+B_{k-1}e^{-t^2/2+(k-1)t'^2} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}A_{k-1}+B_{k-1}\right)e^{-t^2/2+(k-1)t'^2}.
\end{aligned}
$$

ゆえに，$d_1(\,\cdot\,|k)\in \mathbf{G}(1/2,k-1)$ である． □

P.2.2　リー・スプーリエル型統計量の分布関数とその性質

＜定理の誤りについて＞

定理 7.14 と定理 7.15 の式 (7.47)，式 (7.48) に誤りがあった．不注意の段お詫びの上訂正する．

$$H_r(t,\ \cdot)\varphi(\ \cdot\ )\in\mathbf{G}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{2},\ \frac{r}{2}\right) \tag{7.47}$$

$$D_2'(\cdot|k)\in\mathbf{G}\left(\frac{k-1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{2},\frac{k(k-1)(2k-1)}{6}\right) \tag{7.48}$$

以下，訂正された定理を証明をする．

7.2.2 節で定義した関数の解析接続を考える．複素数 $\tau,\ \xi\in\mathbb{C}$ に対し，$H_r(\tau,\xi)$ $(r\geqq 2)$ を

$$H_2(\tau,\xi)=1-\Phi(\xi-\sqrt{2}\,\tau), \tag{P.28}$$

$$H_r(\tau,\xi)=\int_{\xi-\sqrt{2}\tau}^{\infty}H_{r-1}(\tau,\eta)\varphi(\eta)d\eta(r\geqq 3) \tag{P.29}$$

で定義する．また，$D_2(\tau|k)$ を

$$D_2^*(\tau|k)=\int_{-\infty}^{\infty}H_k(\tau,y)\varphi(y)dy \tag{P.30}$$

で定義する．これらが，式 (7.41), (7.42) で定義した $H_r(t,x)$, $D_2^*(t|k)$ の複素正則関数への拡張になることを示す．そして，定理 7.14, 7.15 を証明する．

命題 P.6　式 (P.28), (P.29) で定義された $H_r(\tau,\xi)$ $(r\geqq 2)$ は $(\tau,\xi)\in\mathbb{C}^2$ の整関数であり，

$$|H_r(\tau,\xi)|\leqq e^{X_r(t',x')}, \tag{P.31}$$

$$X_r(t',x')=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r-1}(x'-j\sqrt{2}t')^2$$

を満たす．また，$r\geqq 3$ で

$$H_r(\tau,\xi)=\int_{x-\sqrt{2}t}^{\infty}H_{r-1}(\tau,y+i(x'-\sqrt{2}t'))\varphi(y+i(x'-\sqrt{2}t'))dy \tag{P.32}$$

である．

（証明）$r\geqq 2$ に関する帰納法による．$r=2$ のとき，系 P.2 の式 (P.9) より，

$$|H_2(\tau,\xi)|=\left|1-\Phi(\xi-\sqrt{2}\tau)\right|\leqq\left\{1-\Phi(x-\sqrt{2}t)\right\}e^{(x'-\sqrt{2}t')^2/2}\leqq e^{(x'-\sqrt{2}t')^2/2}$$

であるから，不等式 (P.31) は成立する．いま，ある $r\geqq 3$ について，

$$|H_{r-1}(\tau,\xi)|\leqq e^{X_{r-1}(t',x')}$$

を帰納法の仮定とする．式 (P.29) の被積分関数を $f(\tau,\xi,\eta)=H_{r-1}(\tau,\eta)\varphi(\eta)$ と置くと，

$$\begin{aligned}|f(\tau,\xi,\eta)|&=|H_{r-1}(\tau,\eta)\varphi(\eta)|\\&\leqq e^{X_{r-1}(t',y')}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2+y'^2/2}\\&\leqq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{X_{r-1}(t',y')+y'^2/2}e^{-y^2/2}\end{aligned}$$

であるから $f \in G^3$．また，$\omega(\tau,\xi) = \xi - \sqrt{2}\tau$ は $(\tau,\xi) \in \mathbb{C}^2$ の整関数であるから，命題 P.3 より $H_r(\tau,\xi)$ は $(\tau,\xi) \in \mathbb{C}^2$ の整関数である．また，式 (P.32) が成立する．

次に，不等式 (P.31) と

$$\begin{aligned} X_r(x',t') &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r-1}\left(x' - j\sqrt{2}t'\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}(x' - \sqrt{2}t')^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r-2}\left(x' - (j+1)\sqrt{2}t'\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}(x' - \sqrt{2}t')^2 + X_{r-1}(t', x' - \sqrt{2}t') \end{aligned} \tag{P.33}$$

より

$$\begin{aligned} |H_r(\tau,\xi)| &\leqq \int_{x-\sqrt{2}t}^{\infty}\left|H_{r-1}(\tau, y + i(x' - \sqrt{2}t'))\right|\left|\varphi(y + i(x' - \sqrt{2}t'))\right|dy \\ &\leqq \int_{-\infty}^{\infty} e^{X_{r-1}(t',x'-\sqrt{2}t')}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2+(x'-\sqrt{2}t')^2/2}dy \\ &\leqq e^{X_{r-1}(t',x'-\sqrt{2}t')+(x'-\sqrt{2}t')^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)dy \\ &= e^{X_r(t',x')} \end{aligned}$$

であり，不等式 (P.31) が成立する． □

命題 P.7

$$H_r(\tau,\xi)\ (r \geqq 2)$$

について，

$$g_r(\tau,\xi) = \frac{\partial}{\partial\tau}H_r(\tau,\xi)$$

と置くと，

$$|g_r(\tau,\xi)| \leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{(r-2)e^{-t^2/2} + \sqrt{2}e^{-(x-\sqrt{2}t)^2/2}\right\}e^{X_r(t',x')} \tag{P.34}$$

が成立する．ここで，$X_r(t',x')$ は式 (P.31) で定義した多項式である．

（証明）式 (P.28), (P.29) より，

$$g_2(\tau,\xi) = \sqrt{2}\varphi(\xi - \sqrt{2}\ \tau), \tag{P.35}$$

$$g_r(\tau,\xi) = \sqrt{2}H_{r-1}(\tau, \xi - \sqrt{2}\tau)\varphi(\xi - \sqrt{2}\tau) + \int_{\xi-\sqrt{2}\tau}^{\infty} g_{r-1}(\tau,\eta)\varphi(\eta)d\eta \quad (r \geqq 3) \tag{P.36}$$

である．

$r = 2$ のとき，

$$\begin{aligned} |g_2(\tau,\xi)| &= \left|\sqrt{2}\varphi(\xi - \sqrt{2}\ \tau)\right| \\ &= \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\sqrt{2}t)^2/2}e^{(x'-\sqrt{2}t')^2/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{0 \cdot e^{-t^2/2}\sqrt{2}e^{-(x-\sqrt{2}t)^2/2}\right\}e^{(x'-\sqrt{2}t')^2/2} \end{aligned}$$

となり，不等式 (P.34) が成立する．

ある $r \geqq 3$ において，不等式 (P.34) の r を $r-1$ で置き換えた

$$|g_{r-1}(\tau,\xi)| \leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{(r-3)e^{-t^2/2}+\sqrt{2}e^{-(x-\sqrt{2}t)^2/2}\right\}e^{X_{r-1}(t',x')}$$

が成立したと仮定する．漸化式 (P.36) の右辺第 1 項は，式 (P.31) より，

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{2}H_{r-1}(\tau,\xi-\sqrt{2}\tau)\varphi(\xi-\sqrt{2}\tau)\right| &\leqq \sqrt{2}e^{X_{r-1}(t',x'-\sqrt{2}t')}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\sqrt{2}t)^2/2+(x'-\sqrt{2}t')^2/2}\\ &\leqq \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{X_r(t',x')}e^{-(x-\sqrt{2}t)^2/2}.\end{aligned}$$

ここで，式 (P.33) を用いた．漸化式 (P.36) の右辺第 2 項の被積分関数を $f(\tau,\xi,\eta)=g_{r-1}(\tau,\eta)\varphi(\eta)$ と置くと，

$$\begin{aligned}|f(\tau,\xi,\eta)| &= |g_{r-1}(\tau,\eta)\varphi(\eta)|\\ &\leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{(r-3)e^{-t^2/2}+\sqrt{2}e^{-(y-\sqrt{2}t)^2/2}\right\}e^{X_{r-1}(t',y')}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2+y'^2/y}\\ &\leqq \frac{(r-3)+\sqrt{2}}{2\pi}e^{X_{r-1}(t',y')+y'^2/2}e^{-y^2/2}.\end{aligned}$$

ゆえに，$f\in\mathbf{G}^3$．また，$\omega(\tau,\xi)=\xi-\sqrt{2}\tau$ は $(\tau,\xi)\in\mathbb{C}^2$ の整関数であるから，命題 P.3 より漸化式 (P.36) の右辺第 2 項は $(\tau,\xi)\in\mathbb{C}^2$ の整関数であり，

$$\int_{\xi-\sqrt{2}\tau}^{\infty}g_{r-1}(\tau,\eta)\varphi(\eta)d\eta=\int_{x-\sqrt{2}t}^{\infty}g_{r-1}\left(\tau,y+i(x'-\sqrt{2}t)\right)\varphi(y+i(x'-\sqrt{2}t'))dy$$

である．よって，

$$\begin{aligned}\left|\int_{\xi-\sqrt{2}\tau}^{\infty}g_{r-1}(\tau,\eta)\varphi(\eta)d\eta\right| &= \left|\int_{x-\sqrt{2}t}^{\infty}g_{r-1}\left(\tau,y+i(x'-\sqrt{2}t)\right)\varphi(y+i(x'-\sqrt{2}t'))dy\right|\\ &\leqq \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{(r-3)e^{-t^2/2}+\sqrt{2}e^{-(y-\sqrt{2}t)^2/2}\right\}\\ &\qquad\times e^{X_{r-1}(t',x'-\sqrt{2}t')}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2+(x'-\sqrt{2}t')^2/2}dy\\ &\leqq \int_{-\infty}^{\infty}\left\{(r-3)\varphi(t)+\sqrt{2}\varphi\left(y-\sqrt{2}t\right)\right\}e^{X_{r-1}(t',x'-\sqrt{2}t')+(x'-\sqrt{2}t')^2/2}\varphi(y)dy\\ &\leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(r-2)e^{-t^2/2}e^{X_r(t',x')}.\end{aligned}$$

ここで，式 (P.33) と

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)dy&=1,\\ \int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(y-\sqrt{2}t\right)\varphi(y)dy&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(y-\sqrt{2}t)^2/2-y^2/2}dy\\ &=\frac{1}{2\pi}e^{-t^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(y-t/\sqrt{2})^2}dy=\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(t)\end{aligned}\tag{P.37}$$

を用いた．以上より，

$$\begin{aligned}|g_r(\tau,\xi)| &= \left|\sqrt{2}H_{r-1}(\tau,\xi-\sqrt{2}\tau)\varphi(\xi-\sqrt{2}\tau)\right|+\left|\int_{\Gamma(\xi-\sqrt{2}\tau)}g_{r-1}(\tau,\eta)\varphi(\eta)d\eta\right|\\ &\leqq \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x+\sqrt{2}t)^2/2}e^{X_r(t',x')}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}(r-2)\varphi(t)e^{X_r(t',x')}\\ &\leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{(r-2)e^{-t^2/2}+\sqrt{2}e^{-(x+\sqrt{2}t)^2/2}\right\}e^{X_r(t',x')}\end{aligned}$$

を得る． □

（定理 7.14(7.47)(訂正後) の証明） 式 (P.31) で $\tau = t,\ t' = 0$ として，

$$X_r(0, x') = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r-1} x'^2 = \frac{r-1}{2}x'^2$$

ゆえ，[image.pdf] を用いて，

$$|H_r(t,\xi)| \leqq \left\{1 - \Phi(x - \sqrt{2}t)\right\} e^{X_r(0,x')} \leqq e^{X_r(0,x')} \leqq e^{(r-1)x'^2/2}.$$

よって，

$$|H_r(t,\xi)\varphi(\xi)| \leqq e^{(r-1)x'^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2+x'^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2+rx'^2/2}$$

ゆえに，

$$H_r(t,\ \cdot)\varphi(\ \cdot\ ) \in \mathbf{G}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{2}, \frac{r}{2}\right)$$

である． □

（定理 7.15(7.48)(訂正後) の証明） まず，$D_2^*(\tau|k)$ が整関数であることを示す．式 (P.30) の被積分関数を $f(\tau,\xi,y) = H_i(\tau,y)\varphi(y)$ と置く．式 (P.31) により，

$$|H_k(\tau,y)| \leqq e^{X_k(t',0)}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
|f(\tau,\xi,y)| &\leqq |H_k(\tau,y)\varphi(y)| \\
&\leqq e^{X_k(t',0)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2} \\
&\leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{X_k(t',0)}e^{-y^2/2}.
\end{aligned}$$

ゆえに $f \in \mathbf{G}^3$．よって命題 P.2 より，$D_2^*(\tau|k)$ は整関数である．

式 (P.30) を微分して，

$$\frac{d}{d\tau}D_2^*(\tau|k) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\tau}H_k(\tau,y)\varphi(y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g_k(\tau,y)\varphi(y)dx.$$

不等式 (P.34) と式 (P.37) を用いて，

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{d\tau}D_2^*(\tau|k)\right| &\leqq \int_{-\infty}^{\infty}|g_k(\tau,x)|\,\varphi(x)dx \\
&\leqq \int_{-\infty}^{\infty}\left\{(k-2)\varphi(t) + \sqrt{2}\varphi\left(x - \sqrt{2}t\right)\right\}e^{X_k(0,t')}\varphi(x)dx \\
&\leqq \{(k-2)\varphi(t) + \varphi(t)\}\,e^{X_r(0,t')} = (k-1)\varphi(t)e^{X_k(0,t')} \\
&= \frac{k-1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2+X_k(0,t')}.
\end{aligned}$$

ここで，

$$X_k(0,t') = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1}(-j\sqrt{2}t')^2 = t'^2\sum_{j=1}^{k-1}j^2 = \frac{k(k-1)(2k-1)}{6}t'^2$$

であるから,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} D_2^*(\tau|k) \in \mathbf{G}\left(\frac{k-1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{2}, \frac{k(k-1)(2k-1)}{6}\right)$$

である. □

P.2.3　ウィリアムズ型統計量の分布関数とその性質

＜定理の誤りについて＞

定理 7.16 の 3 番目の式に誤りがあった．不注意の段お詫びの上訂正する．

$$H_{k-1}(\,\cdot\,+\sqrt{2}t,\,\cdot\,+\sqrt{2}t)\varphi(\,\cdot\,) \in \mathbf{G}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{2}, \frac{k}{2}\right)$$

以下，訂正された定理を証明をする．

7.2.3 節で定義した関数が整関数に解析接続可能であることを示し，その性質を調べる．複素数 $\tau,\ \xi \in \mathbb{C}$ に対し，$h_r(\tau,\xi)$ $(r \geqq 1)$ を

$$h_1(\tau,\xi) = \varphi(\xi), \tag{P.38}$$

$$h_r(\tau,\xi) = r\int_{-\infty}^{\tau} h_{r-1}(\tau,\eta)\varphi(r\xi-(r-1)\eta)d\eta \qquad (r \geqq 2) \tag{P.39}$$

で定義する．また，$D_2(\tau|k,1)$ を

$$D_3(\tau|k,1) = \int_{-\infty}^{\infty} H_{k-1}(y+\sqrt{2}\tau, y+\sqrt{2}\tau)\varphi(y)dy \tag{P.40}$$

で定義する．ここで，

$$H_r(\tau,\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} h_r(\tau,\eta)d\eta. \tag{P.41}$$

これらは，式 (7.50), (7.51), (7.52) で定義した $h_r(t,x)$，$H_r(t,x)$，$D_3(t|k,1)$ の複素関数への拡張になることは明らかである．これらの正則性について調べる．

命題 P.8　式 (P.38), (P.39) で定義された $h_r(\tau,\xi)$ $(r \geqq 1)$ は $(\tau,\xi) \in \mathbb{C}^2$ の整関数であり，

$$|h_r(\tau,\xi)| \leqq \sqrt{\frac{r}{2\pi}}e^{-rx^2/2+Y_r(t',x')}, \tag{P.42}$$

$$Y_r(t',x') = \frac{r-1}{2}t'^2 + \frac{1}{2}(rx'-(r-1)t')^2 \tag{P.43}$$

を満たす．また，$r \geqq 2$ で

$$h_r(\tau,\xi) = r\int_{-\infty}^{t} h_{r-1}(\tau, y+it')\varphi\left(r\xi-(r-1)(y+it')\right)dy \tag{P.44}$$

である．

（証明）$r \geqq 1$ に関する帰納法による．$r=1$ のとき，式 (P.38) より

$$|h_1(\tau,\xi)| = |\varphi(\xi)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-rx^2/2+x'^2/2}$$

であるから，不等式 (P.42) は成立する．いま，ある $r \geqq 2$ について

$$|h_{r-1}(\tau,\xi)| \leqq \sqrt{\frac{r-1}{2\pi}}e^{-(r-1)x^2/2+Y_{r-1}(t',x')} \tag{P.45}$$

を仮定し，不等式 (P.42) を示す．式 (P.39) の被積分関数 $f(\tau,\xi,\eta)=h_{r-1}(\tau,\eta)\varphi(r\xi-(r-1)\eta)$ について，

$$\begin{aligned}
|f(\tau,\xi,\eta)| &= |h_{r-1}(\tau,\eta)\varphi(r\xi-(r-1)\eta)| \\
&\leqq \sqrt{\frac{r-1}{2\pi}}e^{-(r-1)y^2/2+Y_{r-1}(t',y')}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(rx-(r-1)y)^2/2+(rx'-(r-1)y')^2/2} \\
&= \frac{\sqrt{r-1}}{2\pi}e^{Y_{r-1}(t',y')+(rx'-(r-1)y')^2/2}e^{-(rx-(r-1)y)^2/2-(r-1)y^2/2}
\end{aligned}$$

である．ゆえに，$f\in\mathbf{G}^3$ である．また定積分の上限 $\omega(\tau,\xi)=\tau$ は整関数ゆえ，命題 P.3 より $h(\tau,\xi)$ は [image.pdf] の整関数であり，式 (P.44) が成立する．また，不等式 (P.45) より，

$$\begin{aligned}
|h_{r-1}(\tau,y+it')\varphi\left(r\xi-(r-1)(y+it')\right)| &\leqq \sqrt{\frac{r-1}{2\pi}}e^{-(r-1)y^2/2+Y_{r-1}(t',t')} \\
&\quad\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(rx-(r-1)y)^2/2+(rx'-(r-1)t')^2/2} \\
&\leqq \frac{\sqrt{r-1}}{2\pi}e^{-(rx-(r-1)y)^2/2-(r-1)y^2/2}e^{Y_{r-1}(t',t')+(rx'-(r-1)t')^2/2} \\
&= \frac{\sqrt{r-1}}{2\pi}e^{-r(r-1)(y-x)^2/2-rx^2/2}e^{Y_r(t',x')}
\end{aligned}$$

である．ここで，

$$\begin{gathered}
(rx-(r-1)y)^2+(r-1)y^2=r(r-1)(y-x)^2+rx^2, \\
Y_{r-1}(t',t')+(rx'-(r-1)t')^2/2=\frac{r-1}{2}t'^2+\frac{1}{2}(rx'-(r-1)t')^2=Y_r(t',x')
\end{gathered}$$

を用いた．ゆえに，

$$\begin{aligned}
|h_r(\tau,\xi)| &= \left|r\int_{-\infty}^{t}h_{r-1}(\tau,y+it')\varphi\left(r\xi-(r-1)(y+it')\right)dy\right| \\
&\leqq r\int_{-\infty}^{\infty}|h_{r-1}(\tau,y+it')\varphi\left(r\xi-(r-1)(y+it')\right)|\,dy \\
&\leqq \frac{\sqrt{r^2(r-1)}}{2\pi}e^{-rx^2/2+Y_r(t',x')}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-r(r-1)(y-x)^2/2}dyl \\
&= \frac{\sqrt{r^2(r-1)}}{2\pi}e^{-rx^2/2+Y_r(t',x')}\sqrt{\frac{2\pi}{r(r-1)}}=\sqrt{\frac{r}{2\pi}}e^{-rx^2/2+Y_r(t',x')}
\end{aligned}$$

であり，不等式 (P.42) が成立する． □

(定理 7.16(訂正後) の証明) 不等式 (P.42) で $\tau=t\in\mathbb{R}$, $t'=0$ とすると，$Y_r(0,x')=r^2x'^2/2$ ゆえ

$$|h_r(t,\xi)|\leqq\sqrt{\frac{r}{2\pi}}e^{-rx^2/2+Y_r(0,x')}=\sqrt{\frac{r}{2\pi}}e^{-rx^2/2+r^2x'^2/2} \tag{P.46}$$

ゆえに，

$$h_r(t,\ \cdot)\in\mathbf{G}\left(\sqrt{\frac{r}{2\pi}},\ \frac{r}{2},\ \frac{r^2}{2}\right)$$

である．また，式 (P.46) より

$$\begin{aligned}
|h_{r-1}(t,\eta)\varphi(rx-(r-1)\eta)| &\leqq \sqrt{\frac{r-1}{2\pi}}e^{-(r-1)y^2/2+(r-1)^2y'^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(rx-(r-1)y)^2/2+(r-1)^2y'^2/2} \\
&\leqq \frac{\sqrt{r-1}}{2\pi}e^{-(r-1)y^2/2+(r-1)^2y'^2}.
\end{aligned}$$

最後の不等式で，$e^{-(rx-(r-1)y)^2/2} \leqq 1$ を用いた．ゆえに，

$$h_{r-1}(t,\ \cdot)\varphi(rx-(r-1)\ \cdot) \in \mathbf{G}\left(\frac{\sqrt{r-1}}{2\pi},\ \frac{r-1}{2},\ (r-1)^2\right).$$

最後に，式 (P.42) より，

$$\begin{aligned}|H_{k-1}(\tau,\xi)| &= \left|\int_{-\infty}^{\xi} h_{k-1}(\tau,\eta)d\eta\right| = \left|\int_{-\infty}^{x} h_{k-1}(\tau,y+ix')dy\right| \\ &\leqq \int_{-\infty}^{x} |h_{k-1}(\tau,y+ix')|\,dy \\ &\leqq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi((k-1)y)e^{Y_{k-1}(t',x')}dy \leqq e^{Y_{k-1}(t',x')}.\end{aligned}$$

また，

$$Y_{k-1}(y',y') = \frac{k-2}{2}y'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = \frac{k-1}{2}y'^2$$

ゆえ

$$\left|H_{k-1}(\eta+\sqrt{2}t,\eta+\sqrt{2}t)\varphi(\eta)\right| \leqq e^{Y_{k-1}(y',y')}\varphi(y)e^{y'^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2+ky'^2/2}.$$

ゆえに，

$$H_{k-1}(\ \cdot+\sqrt{2}t,\ \cdot+\sqrt{2}t)\varphi(\ \cdot) \in G\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{2},\ \frac{k}{2}\right)$$

である． □

以下では，$D_3'(\tau|k,\ 1) = dD_3'(\tau|k,\ 1)/d\tau\ \ (k \geqq 2)$ について考察する．

命題 P.9 $k=2$ のとき，

$$D_3'(\tau|2,\ 1) = \varphi(\tau) \tag{P.47}$$

であり，

$$D_3'(\ \cdot|2,\ 1) \in \mathbf{G}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) \tag{P.48}$$

である．また，

$$\begin{aligned}h_1(\tau,\xi) &= \varphi(\xi), \\ H_1(\tau,\xi) &= \Phi(\xi), \\ D_3(\tau|2,1) &= \Phi(\tau)\end{aligned} \tag{P.49}$$

である．

（証明）定義より，$h_1(t,x) = \varphi(x)$．ゆえに，

$$H_1(t,x) = \int_0^x \varphi(y)dy = \Phi(x).$$

よって，

$$D_3(t|2,1) = \int_{-\infty}^{\infty} H_1(x,x)\varphi(\sqrt{2}t-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\varphi(\sqrt{2}t-x)dx.$$

これを t で微分して，

$$\frac{d}{dt}D_3(t|2,1) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2}\varphi(x)\varphi(\sqrt{2}t-x)dx = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = \varphi(t)$$

$h_1(\tau,\xi)$, $H_1(\tau,\xi)$, $D_3(\tau|2,1)$ はこれらの解析接続であるから，(P.49) を満たす．ゆえに, (P.47) である． □

まず，定義式 (42) を形式的に τ で微分して，

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}D_3(\tau|k,\ 1) &= \frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{\infty} H_{k-1}(\sqrt{2}\tau+y,\sqrt{2}\tau+y)\varphi(y)dy \\ &= \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}H_{k-1}(\sqrt{2}\tau+y,\sqrt{2}\tau+y)+\frac{\partial}{\partial\xi}H_{k-1}(\sqrt{2}\tau+y,\sqrt{2}\tau+y)\right)\varphi(y)dy \\ &= \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}H_{k-1}(\sqrt{2}\tau+y,\sqrt{2}\tau+y)+h_{k-1}(\sqrt{2}\tau+y,\sqrt{2}\tau+y)\right)\varphi(y)dy.\end{aligned}$$

右辺で，

$$\frac{\partial}{\partial\tau}H_{k-1}(\tau,\xi)=\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-\infty}^{\xi}h_{k-1}(\tau,\eta)d\eta=\int_{-\infty}^{\xi}\frac{\partial}{\partial\tau}h_{k-1}(\tau,\eta)d\eta.$$

ゆえに，

$$\frac{d}{d\tau}D_3(\tau|k,\ 1)=\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(h_{k-1}(\sqrt{2}\tau+y,\sqrt{2}\tau+y)+\int_{-\infty}^{\sqrt{2}\tau+y}\frac{\partial}{\partial\tau}h_{k-1}(\sqrt{2}\tau+y,\zeta)d\zeta\right)\varphi(y)dy.$$

ここで，

$$g_r(\tau)=\int_{-\infty}^{\tau}\frac{\partial}{\partial t}h_r(\tau,\eta)d\eta \tag{P.50}$$

と置く $\varphi(x)$ は偶関数であるから，

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}D_3(\tau/\sqrt{2}|r+1,\ 1) &= \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(h_r(\tau+y,\tau+y)+g_r(\tau+y)\right)\varphi(y)dx \\ &= \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(h_r(\tau-y,\tau-y)+g_r(\tau-y)\right)\varphi(y)dx \\ &= \sqrt{2}\left\{\left(h_r(\,\cdot\,,\,\cdot\,)*\varphi\right)(\tau)+g_r*\varphi(\tau)\right\}.\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\frac{d}{d\tau}D_3(\tau/\sqrt{2}|k,\ 1)=\sqrt{2}\left\{\left(h_{k-1}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)*\varphi\right)(\tau)+g_{k-1}*\varphi(\tau)\right\}$$

である．

以下，

$$\dot{h}_k(\tau,\xi)\equiv\frac{\partial}{\partial\tau}h_k(\tau,\xi)\quad(k\geqq 1) \tag{P.51}$$

について調べる．式 (P.38) より，

$$\dot{h}_1(\tau,\xi)=\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi(\xi)=0 \tag{P.52}$$

である．

$$\bar{h}_r(\tau)\equiv h_r(\tau,\tau),\quad \varphi_r(\tau,\xi)\equiv r\varphi(r\xi-(r-1)\tau) \tag{P.53}$$

とする．関数 $f(\tau,\xi)$ $\left((\tau,\xi)\in\mathbb{C}^2\right)$ の積分変換 Q_r $(r\geqq 2)$ を

$$Q_rf(\tau,\xi)\equiv r\int_{-\infty}^{\tau}f(\tau,\eta)\varphi_r(\xi,\eta)d\eta \tag{P.54}$$

で定義する．

漸化式 (P.39) を形式的に微分して,

$$\begin{aligned}\dot{h}_r(\tau,\xi) &= rh_{r-1}(\tau,\tau)\varphi(r\xi-(r-1)\tau) + r\int_{-\infty}^{\tau}\dot{h}_{r-1}(\tau,\eta)\varphi(r\xi-(r-1)\eta)d\eta \\ &= r\bar{h}_{r-1}(\tau)\varphi_r(\tau,\xi) + Q_r\dot{h}(\tau,\xi) \quad (r \geqq 2)\end{aligned} \tag{P.55}$$

である．この漸化式と (P.53) より,

$$\begin{aligned}\dot{h}_r &= \bar{h}_{r-1}\varphi_r + Q_r\dot{h}_{r-1} = \bar{h}_{r-1}\widehat{\varphi}_r + Q_r\left(\bar{h}_{r-2}\varphi_{r-1} + Q_{r-1}\dot{h}_{r-2}\right) \\ &= \bar{h}_{r-1}\widehat{\varphi}_r + \bar{h}_{r-2}Q_r\varphi_{r-1} + Q_rQ_{r-1}\dot{h}_{r-2} \\ &= \sum_{j=2}^{r}\bar{h}_{j-1}Q_rQ_{r-1}\cdots Q_{j+1}\varphi_j + Q_rQ_{r-1}\cdots Q_2\dot{h}_1 \\ &= \sum_{j=2}^{r}\bar{h}_{j-1}Q_rQ_{r-1}\cdots Q_{j+1}\varphi_j\end{aligned} \tag{P.56}$$

となる．ただし，$j=r$ のとき $Q_rQ_{r-2}\cdots Q_{r+1}$ は恒等作用素とする．すなわち最終項 $Q_rQ_{r-2}\cdots Q_{r+1}\varphi_r = \varphi_r$ である．

命題 P.10　2 変数整関数 $f(\tau,\xi)$ $(\tau = t+it',\ \xi = x+ix' \in \mathbb{C})$ が，非負定値 2 次形式 $\alpha(t,x)$, $\beta(t',x')$ と正数 $A>0$ に対し,

$$|f(\tau,\xi)| \leqq Ae^{-\alpha(t,x)+\beta(t',x')}$$

を満たすなら，自然数 $r \geqq 2$ に対し,

$$|Q_rf(\tau,\xi)| \leqq \frac{rA}{\sqrt{2a}}e^{-\alpha'(t,x)+\beta'(t',x')},$$
$$A' = \frac{rA}{\sqrt{2a}}, \quad \beta'(t',x') = \beta(t',t') + ((r-1)t'-rx')^2/2$$

である．ここで，a, $\alpha'(t,x)$ は 2 次形式 $\sigma(t,x,y) = \alpha(t,y) + ((r-1)y-rx)^2/2$ $(t,x,y \in \mathbb{R})$ の変数 y に関する平方完成

$$\sigma(t,x,y) = a(y-b(t,x))^2 + \alpha'(t,x)$$

の 2 次係数と剰余である．

$A'>0$ であり，$\alpha'(t,x)$, $\beta'(t',x')$ は非負定値．また，$\alpha(x,t)$ が正定値なら，$\alpha'(x,t)$ も正定値となる．

（証明）Q_r の定義式 (P.54) の被積分関数は

$$\begin{aligned}|f(\tau,\eta)\varphi_r(\xi,\eta)| &\leqq Ae^{-\alpha(t,y)+\beta(t',y')}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(rx-(r-1)y)^2/2+(rx'-(r-1)y')^2/2} \\ &\leqq \frac{rA}{\sqrt{2\pi}}e^{-a(t,x,y)+b(t',x')}, \\ a(t,x,y) &= \alpha(t,y) + (rx-(r-1)y)^2/2, \\ b(t',x',y') &= \beta(t',y') + (rx'-(r-1)y')^2/2\end{aligned}$$

である．$\alpha(t,y)$ は非負 2 次形式だから，y^2 の係数は非負．ゆえに $a(t,x,y)$ の y^2 の係数は正である．また，積分上限 $\omega(\tau,\xi)=\tau$ は $(\tau,\xi) \in \mathbb{C}$ の正則関数．ゆえに，命題 P.3 より,

$$Q_rf(\tau,\xi) = r\int_{-\infty}^{t} f(\tau,y+it')\varphi_r(\xi,y+it')dy$$

は整関数である．これより，

$$
\begin{aligned}
|Q_r f(\tau,\xi)| &\leqq r\int_{-\infty}^{t} |f(\tau, y+it')\varphi_r(x+ix', y+it')|\,dy \\
&\leqq r\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\alpha(t,y)+\beta(t',t')}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(rx-(r-1)y)^2/2+(rx'-(r-1)t')^2/2}dy \\
&= \frac{rA}{\sqrt{2\pi}}e^{\beta'(t',x')}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma(t,x,y)}dy \\
&= \frac{rA}{\sqrt{2\pi}}e^{\beta'(t',x')}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(y-b(t,x))^2-\alpha'(t,x)}dy \\
&= \frac{rA}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha'(t,x)+\beta'(t',x')}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(y-b(t,x))^2}dy \\
&= \frac{rA}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha'(t,x)+\beta'(t',x')}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
&= A'e^{-\alpha'(t,x)+\beta'(t',x')}
\end{aligned}
$$

である．

明らかに $A'>0$ であり，$\alpha'(t,x)$, $\beta'(t',x')$ は非負定値である．$\alpha(t,x)$ が正定値のときは，

$$\sigma(t,x,y)=\alpha(t,y)+((r-1)y-rx)^2/2=0$$

なら，$t=y=0,\ x=(r-1)y/r=0$ ゆえ，$\sigma(t,x,y)$ は正定値．その平方完成の剰余 $\alpha'(t,x)$ も正定値である． □

命題 P.11 $2\leqq j\leqq r$ について，

$$
\begin{aligned}
|Q_rQ_{r-1}\cdots Q_{j+1}\varphi_j(\tau,\xi)| &\leqq A_{rj}e^{-\alpha_{rj}(t,x)+\beta_{rj}(t',x')}, \\
A_{rj} &= \frac{r}{\sqrt{2\pi(r-j+1)}}, \\
\alpha_{rj}(t,x) &= \frac{((j-1)t-rx)^2}{2(r-j+1)}, \\
\beta_{rj}(t',x') &= \frac{(r-j){t'}^2+((r-1)t'-rx')^2}{2}
\end{aligned}
$$

である．

（証明）$j\geqq 1$ を固定して，$r\geqq j$ に関する帰納法による．

$r=j$ のとき，左辺は，

$$|\varphi_j|=|j\varphi((j-1)\tau-j\xi)|\leqq\frac{j}{\sqrt{2\pi}}e^{-((j-1)t-jx)^2/2+((j-1)t'-jx')^2/2}$$

であり，

$$A_{jj}=\frac{j}{\sqrt{2\pi}},\quad \alpha_{jj}(t,x)=\frac{((j-1)t-jx)^2}{2},\quad \beta_{jj}(t',x')=\frac{((j-1)t'-jx')^2}{2}$$

が成立している．

ある $r>j$ で，

$$
\begin{aligned}
A_{r-1,j} &= \frac{r-1}{\sqrt{2\pi(r-j)}}, \\
\alpha_{r-1,j}(t,x) &= \frac{((j-1)t-(r-1)x)^2}{2(r-j)}, \\
\beta_{r-1,j}(t',x') &= \frac{(r-j-1){t'}^2+((r-2)t'-(r-1)x')^2}{2}
\end{aligned}
$$

が成り立つことを帰納法の仮定とする．次に作用するのは Q_r だから，命題 P.10 より，

$$\beta_{r,j}(t',x') = \beta_{r-1,j}(t',t') + \frac{((r-1)t'-rx')^2}{2} = \frac{(r-j)t'^2 + ((r-1)t'-rx')^2}{2}$$

次に，2 次形式

$$\sigma(t,x,y) = \alpha_{r-1,j}(t,y) + \frac{((r-1)y-rx)^2}{2}$$

を平方完成して

$$\sigma(t,x,y) = \frac{(r-1)^2(r-j+1)}{2(r-j)}\left(y - \frac{(j-1)t + r(r-j)x}{(r-1)(r-j+1)}\right)^2 + \frac{((j-1)t-rx)^2}{2(r-j+1)}$$

これより，

$$\alpha_{r,j}(t,x) = \frac{((j-1)t-rx)^2}{2(r-j+1)},$$
$$A_{r,j} = rA_{r-1,j}\sqrt{\frac{r-j}{(r-1)^2(r-j+1)}} = \frac{r}{\sqrt{2\pi(r-j+1)}}$$

である． □

ここで，

$$\psi_j \equiv \bar{h}_{j-1}Q_rQ_{r-1}\cdots Q_{j+1}\varphi_j \quad (2 \leqq j \leqq r)$$

とする．

$$\dot{h}_r(\tau,\xi) = \sum_{j=2}^{r}\psi_j(\tau,\xi)$$

である．

命題 P.12　$2 \leqq j \leqq r$ について，

$$|\psi_j| \leqq A'_{rj}e^{-\alpha'_{r,j}(t,x)+\beta'_{r,j}(t',x')},$$
$$A'_{r,j} = \frac{r}{2\pi}\sqrt{\frac{j-1}{r-j+1}},$$
$$\alpha'_{r,j}(t,x) = \frac{(j-1)(r-j+1)t^2 + ((j-1)t-rx)^2}{2(r-j+1)},$$
$$\beta'_{r,j}(t',x') = \frac{(r+j^2-3j+1)t'^2 + ((r-1)t'-rx')^2}{2}.$$

また，$\alpha'_{r,j}(t,x)$, $\beta'_{r,j}(t',x')$ は正定値である．

（証明）(P.42) より，

$$|h_{j-1}| = |h_{j-1}(\tau,\tau)| \leqq \sqrt{\frac{j-1}{2\pi}}e^{-(j-1)t^2/2+(j-1)t'^2/2}$$

であるから，命題 P.11 より，

$$A'_{r,j} = \sqrt{\frac{j-1}{2\pi}}\frac{r}{\sqrt{2\pi(r-j+1)}} = \frac{r}{2\pi}\sqrt{\frac{j-1}{r-j+1}},$$
$$\alpha'_{r,j}(t,x) = \frac{(j-1)t^2}{2} + \frac{((j-1)t-rx)^2}{2(r-j+1)} = \frac{(j-1)(r-j+1)t^2 + ((j-1)t-rx)^2}{2(r-j+1)},$$
$$\beta'_{r,j}(t',x') = \frac{(j-1)t'^2}{2} + \frac{(r-j)t'^2 + ((r-1)t'-rx')^2}{2} = \frac{(r-1)t'^2 + ((r-1)t'-rx')^2}{2}$$

である．$r \geqq 2$ であるから，第 1 式，第 2 式の中辺より，

$$\begin{aligned} {\alpha'}_{r,j}(t,x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad t = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \\ {\beta'}_{r,j}(t',x') = 0 \quad &\Rightarrow \quad t = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \end{aligned}$$

が分かる．ゆえに，$\alpha'_{r,j}(t,x)$, $\beta'_{r,j}(t,x)$ は正定値である． □

ここで，

$$\Psi_j(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\tau} \psi_j(\tau,\eta) d\eta \tag{P.57}$$

とする．命題 P.12 より被積分関数 $\psi_j(\tau,\eta)$ は $\mathbf{G}^3$ に属し，積分上限は $\omega(\tau,\xi) = \tau$ は $(\tau,\xi) \in \mathbb{C}^2$ の整関数だから，命題 P.3 より $\Psi_j(\tau)$ $(\tau \in \mathbb{C})$ は整関数であり，

$$\Psi_j(\tau) = \int_{-\infty}^{t} \psi_j(\tau, y + it') dy \tag{P.58}$$

と書ける．

命題 P.13　$2 \leqq j \leqq r$ について，

$$|\Psi_j(\tau)| \leqq \sqrt{\frac{j-1}{2\pi}} \exp\left(-\frac{j-1}{2}t^2 + \frac{r}{2}{t'}^2\right)$$

である．

（証明）命題 P.12 の $A'_{r,j}$，$\alpha'_{r,j}(t,x)$，$\beta'_{r,j}(t',x')$ と式 (P.58) により，

$$\begin{aligned} |\Psi_j(\tau)| &\leqq \left| \int_{-\infty}^{t} \psi_j(\tau, s + it') ds \right| \\ &\leqq \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_j\left(t + it', s + it'\right)| ds \\ &\leqq {A'}_{rj} e^{{\beta'}_{rj}(t',t')} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-{\alpha'}_{rj}(t,s)} ds. \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} {\alpha'}_{rj}(t,s) &= \frac{(j-1)(r-j+1)t^2 + ((j-1)t - rs)^2}{2(r-j+1)} = \frac{(j-1)t^2}{2} + \frac{r^2}{2(r-j+1)}\left(s - \frac{(j-1)t}{r}\right)^2, \\ \beta'(t',t') &= \frac{(r-1){t'}^2 + {t'}^2}{2} = \frac{r{t'}^2}{2} \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} |\Psi_j(\tau)| &\leqq \sqrt{\frac{2\pi(r-j+1)}{r^2}} \frac{r}{2\pi} \sqrt{\frac{j-1}{r-j+1}} \exp\left(-\frac{j-1}{2}t^2 + \frac{r}{2}{t'}^2\right) \\ &= \sqrt{\frac{j-1}{2\pi}} \exp\left(-\frac{j-1}{2}t^2 + \frac{r}{2}{t'}^2\right) \end{aligned}$$

である． □

命題 P.14　$r \geqq 2$ について，

$$|g_r(\tau)| \leqq \frac{2(r^{3/2}-1)}{3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2 + \frac{r}{2}{t'}^2\right)$$

である．

（証明）式 (P.50), (P.57) より，

$$g_r(\tau) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial}{\partial t} h_{l-1}(\tau, y+t')dy = \int_{-\infty}^{t} \left(\sum_{j=2}^{r} \psi_j(\tau, y+t') \right) dy = \sum_{j=2}^{r} \Psi_j(\tau).$$

ゆえに，命題 P.13 より，

$$\begin{aligned}
|g_r(\tau)| &\leqq \sum_{j=2}^{r} |\Psi_j(\tau)| \\
&\leqq \sum_{j=2}^{r} \sqrt{\frac{j-1}{2\pi}} \exp\left(-\frac{j-1}{2}t^2 + \frac{r}{2}{t'}^2\right) \\
&\leqq \left\{ \max_{2\leqq j\leqq r} \exp\left(-\frac{j-1}{2}t^2 + \frac{r}{2}{t'}^2\right) \right\} \sum_{j=2}^{r} \sqrt{\frac{j-1}{2\pi}} \\
&\leqq \exp\left(-\frac{1}{2}t^2 + \frac{r}{2}{t'}^2\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^r \sqrt{s}\, ds \\
&\leqq \frac{2(r^{3/2}-1)}{3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2 + \frac{r}{2}{t'}^2\right)
\end{aligned}$$

となる． □

（定理 7.17 の証明） $k=2$ のとき，命題 P.9 式 (P.47) より

$$D_3'(\,\cdot\,|2,1) = \varphi \in G\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

一方，$r = k-1 = 1$ より

$$\frac{r}{\sqrt{\pi(1+r^2)}} + \frac{2(r^{3/2}-1)}{3\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{r}{r+1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{r^2}{r^2+1} = \frac{1}{2}$$

よって式 (7.56) は成立．

$k \geqq 3$ のとき，$r = k-1 \geqq 2$ である．ここで $\bar{h}_r(t) = h_r(t,t)$ $(r \geqq 1)$ に注意して，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} D_3(t/\sqrt{2}|r,1) &= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(h_r(t+x, t+x) + \int_{-\infty}^{t+x} \frac{\partial}{\partial t} h_r(t+x, s) ds \right) \varphi(x) dx \\
&= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\bar{h}_r(t+x) + g_r(t+x) \right) \varphi(x) dx \\
&= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\bar{h}_r(t-x) + g_r(t-x) \right) \varphi(x) dx \\
&= \sqrt{2} \left\{ \bar{h}_r * \varphi(t) + g_r * \varphi(t) \right\}.
\end{aligned}$$

そして，

$$|\varphi(\tau)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}{t'}^2\right) \tag{P.59}$$

と命題 P.13 式 (P.42) より，

$$\left|\bar{h}_r(\tau)\right| \leqq \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \exp\left(-\frac{r}{2}t^2 + \frac{r^2}{2}{t'}^2\right)$$

ゆえ，定理 7.8 より，

$$\left|\bar{h}_r * \varphi(\tau)\right| \leqq \frac{r}{\sqrt{2\pi(1+r^2)}} \exp\left(-\frac{r}{2(r+1)}t^2 + \frac{r^2}{2(r^2+1)}{t'}^2\right)$$

同じく，(P.59) と命題 P.14 より

$$|g_r * \varphi(\tau)| \leqq \frac{(r^{3/2}-1)}{3\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2r}{r+1}}\exp\left(-\frac{1}{4}t^2 + \frac{r}{2(r+1)}t'^2\right)$$

である．また，$r \geqq 1$ で

$$\frac{1}{4} \leqq \frac{r}{2(r+1)} \leqq \frac{r^2}{2(r^2+1)}$$

であるから，

$$A_r = \sqrt{2}\left(\frac{r}{\sqrt{2\pi(1+r^2)}} + \frac{r^{3/2}-1}{3\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2r}{r+1}}\right) = \frac{r}{\sqrt{\pi(1+r^2)}} + \frac{2(r^{3/2}-1)}{3\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{r}{r+1}}$$

と置くと，

$$\left|\frac{d}{d\tau}D_3(\tau/\sqrt{2}|r,\ 1)\right| \leqq A_r \exp\left(-\frac{1}{4}t^2 + \frac{r^2}{2(r^2+1)}t'^2\right)$$

よって，

$$\left|\frac{d}{d\tau}D_3(\tau|r,\ 1)\right| \leqq A_r \exp\left(-\frac{1}{2}t^2 + \frac{r^2}{r^2+1}t'^2\right)$$

である． □

次の命題で，$H_r(t,t)$ も定理 7.11 の条件を満たすことを示す．$F(t) = H_r(t,t)$ もまた，近似式 (7.27) で近似できる．

命題 P.15　$r \geqq 1$ で，

$$\left|\frac{d}{d\tau}H_r(\tau,\tau)\right| \leqq \left(\sqrt{\frac{r}{2\pi}} + \frac{2(r^{3/2}-1)}{3\sqrt{\pi}}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}t^2 + \frac{r}{2}t'^2\right)$$

が成立する．

（証明）

$$\frac{d}{dt}H_r(t,t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t} h_r(t,s)ds = h_r(t,t) + \int_{-\infty}^{t}\frac{\partial}{\partial t}h_r(t,s)ds = h_r(t,t) + g_r(t)$$

より，

$$\frac{d}{d\tau}H_r(\tau,\tau) = h_r(\tau,\tau) + g_r(\tau).$$

ゆえに，(P.44) と命題 P.14 より，

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{d\tau}H_r(\tau,\tau)\right| &= |h_r(\tau,\tau)| + |g_r(\tau)| \\ &\leqq \sqrt{\frac{r}{2\pi}}\exp\left(-\frac{rt^2}{2} + \frac{rt'^2}{2}\right) + \frac{2(r^{3/2}-1)}{3\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2} + \frac{rt'^2}{2}\right) \\ &\leqq \left(\sqrt{\frac{r}{2\pi}} + \frac{2(r^{3/2}-1)}{3\sqrt{\pi}}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}t^2 + \frac{r}{2}t'^2\right)\end{aligned}$$

である． □

単調性について述べる．

命題 P.16　$h_r(t,x),\ r \geqq 2$ は t について単調増加．

（証明）r に関する帰納法による．$r=2$ のとき，

$$h_2(t,x)=2\int_{-\infty}^{t}h_1(t,y)\varphi(2x-y)dy$$

の右辺の被積分関数は正だから，成立．ある $r\geqq 3$ について，$h_{r-1}(t,x)$ が t について単調増加であることを仮定する．このとき任意の $t_1<t_2$ について，$h_{r-1}(t_1,x)<h_{r-1}(t_2,x)$ と被積分関数の正値性より，

$$\begin{aligned}h_r(t_1,x)&=r\int_{-\infty}^{t_1}h_{r-1}(t_1,y)\varphi(rx-(r-1)y)dy<r\int_{-\infty}^{t_1}h_{r-1}(t_2,y)\varphi(rx-(r-1)y)dy\\&<r\int_{-\infty}^{t_2}h_{r-1}(t_2,y)\varphi(rx-(r-1)y)dy=h_r(t_2,x)\end{aligned}$$

ゆえ，$h_r(t,x)$ も単調増加である． □

P.4.4 積分計算

（定理 7.18 の証明） m に関する帰納法による．$m=1$ のとき，

$$f_{(s_1,s_2)}(x)=\varphi(u_1^{-1/2},x)=\sqrt{\frac{u_1}{2\pi}}\exp\left(-u_1x^2/2\right),\ \ u_1=u=\sum_{j=s_1}^{s_2-1}w_j$$

である．ゆえに，

$$f_{(s_1,s_2)}\in\mathbf{G}\left(\sqrt{\frac{u_1}{2\pi}},\frac{u_1}{2},\frac{u}{2}\right)$$

が成立している．　ある $m\geqq 1$ で，整数列 $1\leqq s_1<s_2<\cdots<s_{m+1}\leqq k+1$ について，部分列 $s_1<s_2<\cdots<s_m$ が

$$f_{(s_1,s_2,\cdots,s_m)}\in G\left(\sqrt{\frac{u_{m-1}}{2\pi}},\frac{u_{m-1}}{2},\frac{u'}{2}\right),\ \ u_{m-1}=\sum_{i=s_{m-1}}^{s_m-1}w_i,\ \ u'=\sum_{j=s_1}^{s_m-1}w_i$$

満たしていると仮定する．このとき，

$$F_{(s_1,s_2,\cdots,s_m)}(x)=\int_{-\infty}^{x}f_{(s_1,s_2,\cdots,s_m)}(t)dt$$

とおくと，

$$\varphi(u_m^{-1/2},\ \cdot\ )\in\mathbf{G}\left(\sqrt{\frac{u_m}{2\pi}},\frac{u_m}{2}\frac{u_m}{2}\right)$$

ゆえ，原著の漸化式 (7.84) に定理 7.5 を用いて，

$$\begin{aligned}f_{(s_1,s_2,\cdots,s_{m+1})}=F_{(s_1,s_2,\cdots,s_m)}\varphi(u_m^{-1/2},\ \cdot\ )&\in\mathbf{G}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{u_{m-1}}}\sqrt{\frac{u_{m-1}}{2\pi}}\sqrt{\frac{u_m}{2\pi}},\ \frac{u_m}{2},\ \frac{u'}{2}+\frac{u_m}{2}\right)\\&=\mathbf{G}\left(\sqrt{\frac{u_m}{2\pi}},\ \frac{u_m}{2},\ \frac{u}{2}\right)\end{aligned}$$

で，(7.57) が示された．

帰納法により，$F_{(s_1,s_2,\cdots,s_{m+1})}>0$ は明らかである．また，(7.57) より，

$$\begin{aligned}F_{(s_1,s_2,\cdots,s_{m+1})}(x)&=\int_{-\infty}^{x}f_{(s_1,s_2,\cdots,s_{m+1})}(t)dt\\&\leqq\int_{-\infty}^{x}\sqrt{\frac{u_m}{2\pi}}e^{-u_mt^2/2}dt=\Phi\left(u_m^{-1/2},x\right)\end{aligned}$$

で，(7.58) が示された． □

参考文献

[1] 白石高章, 杉浦洋 (2015). 多群モデルにおける閉検定手順に使用される分布の上側 $100\alpha^\star$ パーセント点. 日本統計学会和文誌, **44.** 271–314.

[2] 白石高章, 杉浦洋 (2018). 『多重比較法の理論と数値計算』 共立出版

[3] Abramowitz, M., Stegun, I. A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions.* Dover, New York.

[4] Lund, J. and Bowers, K. L. (1992). *Sinc Methods.* SIAM.

[5] Stenger, F. (1993). *Numerical Methods Based on Sinc and Anasytic Functions.* Springer-Verlag.