問題解答

演習問題 1

問 1.1 から問 1.6　1.7 節のソフトを使って解答を調べること.

問 1.7　$n = 2m$, $n = 2m+1$ の偶数奇数に分けて証明できる.

問 1.8

$$\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) \\
&= \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i + \bar{x}^2\sum_{i=1}^{n}1) \\
&= \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\bar{x}n\bar{x} + n\bar{x}^2) \\
&= \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2).
\end{aligned}$$

問 1.9

$$\begin{aligned}
s_{xy} &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i - x_i\bar{y} - \bar{x}y_i + \bar{x}\bar{y}) \\
&= \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \bar{y}\sum_{i=1}^{n}x_i - \bar{x}\sum_{i=1}^{n}y_i + \bar{x}\bar{y}\sum_{i=1}^{n}1) \\
&= \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - n\bar{y}\bar{x} - n\bar{x}\bar{y} + n\bar{x}\bar{y}) \\
&= \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - n\bar{x}\bar{y}).
\end{aligned}$$

問 1.10　$a_i \equiv x_i - \bar{x}$, $b_i \equiv y_i - \bar{y}$ とおく.
$(a_it - b_i)^2 \geq 0$ 両辺 i について 1 から n まで加えると, $(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)t^2 - 2(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)t + (\sum_{i=1}^{n}b_i^2) \geq 0$. これが任意の t で成り立つためには，判別式 $D \leq 0$.

$$\frac{D}{4} = (\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2 - (\sum_{i=1}^{n}a_i^2)(\sum_{i=1}^{n}b_i^2) \leq 0. \tag{1}$$

故に $-1 \leq r_{xy} \leq 1$ が成り立つ. (1) で等号が成り立つならば,

$2(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{j=1}^n b_j^2) - 2(\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2 = 0$
$2(\sum\sum_{i\neq j} a_i^2 b_j^2) - 2(\sum\sum_{i\neq j} a_i b_i a_j b_j) = 0$
$\sum\sum_{i\neq j}(a_i b_j - a_j b_i)^2 = 0$ により $b_i : a_i = b_j : a_j$. すなわち, $b_i = ca_i$. $d = -c\bar{x} + \bar{y}$ とおけば, $y_i = cx_i + d$ となる.

問 1.11

$$\begin{aligned} RSS &= \sum_{i=1}^n \{y_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i)\}^2 = \sum_{i=1}^n \{(y_i - \bar{y}) - r_{xy} \cdot (\frac{s_y}{s_x})(x_i - \bar{x})\}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 - 2r_{xy} \cdot (\frac{s_y}{s_x})(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + \{r_{xy} \cdot (\frac{s_y}{s_x})\}^2 (x_i - \bar{x})^2 \\ &= (n-1)s_y^2 - 2(n-1)(r_{xy}s_y)^2 + (n-1)(r_{xy}s_y)^2 \\ &= (n-1)s_y^2(1 - r_{xy}^2) \end{aligned}$$

$CD \equiv 1 - \frac{RSS}{(n-1)s_y^2} = 1 - (1 - r_{xy}^2) = r_{xy}^2$

演習問題 2

問 2.1　省略

問 2.2　(1) $\frac{1}{10}$　(2) $\frac{1}{2}$
(3) $E(X) = 55$,　$V(X) = 825$

問 2.3　(1) 3 点 $(a-b, 0)$, $(a, \frac{1}{b})$, $(a+b, 0)$ を結んだグラフ.
(2) $\frac{1}{2}$　(3) $E(X) = a$,　$V(X) = \frac{b^2}{6}$

問 2.4　$1 = P(A) \leq P(A \cup B) \leq 1$ により, $P(A \cup B) = 1$.
$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 1 + P(B) - 1 = P(B)$.

問 2.5　(1) 定理 2.1(4) から示せる.
(2) (1) より　$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \leq P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) \leq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$.
このように数学的帰納法により示せる.
(3) $B_1 \equiv A_1$, $B_n \equiv A_n - (\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k)$ $(n = 2, \cdots)$ とおく.
各 B_i は排反. $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$. $P(B_n) \leq P(A_n)$.
$P(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = P(\bigcup_{n=1}^\infty B_n) = \sum_{n=1}^\infty P(B_n) \leq \sum_{n=1}^\infty P(A_n)$.

問 2.6　(1) A_n を A_n^c に置き換えて, 問 2.5(2) を適用すると,
$$P(\bigcup_{n=1}^m A_n^c) \leq \sum_{n=1}^m P(A_n^c).$$
$1 - P(\bigcap_{n=1}^m A_n^c) = P(\bigcup_{n=1}^m A_n^c) \leq \sum_{n=1}^m P(A_n^c)$.
(2) A_n を A_n^c に置き換えて, 問 2.5(3) を適用すると,
$$P(\bigcup_{n=1}^\infty A_n^c) \leq \sum_{n=1}^\infty P(A_n^c).$$
$1 - P(\bigcap_{n=1}^\infty A_n^c) = P(\bigcup_{n=1}^\infty A_n^c) \leq \sum_{n=1}^\infty P(A_n^c)$.

問 2.7　(1) 問 2.5(2) を適用して

$$0 \le P(\bigcup_{n=1}^{m} A_n) \le \sum_{n=1}^{m} P(A_n) = 0.$$

(2) 問 2.5(3) を適用して

$$0 \le P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = 0.$$

問 2.8　(1) 問 2.6(1) を適用して

$$1 \ge P(\bigcap_{n=1}^{m} A_n) \ge 1 - \sum_{n=1}^{m} P(A_n^c) = 1 - \sum_{n=1}^{m}(1 - P(A_n)) = 1.$$

(2) 問 2.6(2) を適用して

$$1 \ge P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \ge 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}(1 - P(A_n)) = 1.$$

問 2.9　(5) の証明 $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \cap A_1^c, B_i = A_i \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_{i-1})^c$ $(i \ge 3)$ とおくと $\cup_{n=1}^k B_n = \cup_{n=1}^k A_n$ より, $\cup_{n=1}^\infty B_n = \cup_{n=1}^\infty A_n$ また $B_1, B_2, \cdots$ は互いに排反である． ここで (E3) と (2) を使うと, $P(\cup_{n=1}^\infty A_n) = P(\cup_{n=1}^\infty B_n) = \sum_{n=1}^\infty P(B_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^k P(B_n) = \lim_{k\to\infty} P(\cup_{n=1}^k B_n)$. また, $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n$ より $\cup_{n=1}^k B_n = \cup_{n=1}^k A_n = A_k$. 故に 上式の最右辺は, $\lim_{k\to\infty} P(A_k)$.　(6) の証明 $B_i = A_i^c$ とおくと $B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_k \subset \cdots$. よって (5) より $P(\cup_{n=1}^\infty B_n) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$. また, $\cup_{n=1}^\infty B_n = \cup_{n=1}^\infty A_n^c = (\bigcap_{n=1}^\infty A_n)^c$. ここで (1) を使うと, $P(\cup_{n=1}^\infty B_n) = 1 - P(\bigcap_{n=1}^\infty A_n)$ 上式の左辺は $\lim_{n\to\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

問 2.10　(1) $F(x-a)$, $f(x-a)$, a, 1 (2) $F(\frac{x}{b})$, $\frac{1}{b}f(\frac{x}{b})$, 0, b^2. (3) $F(\frac{x-a}{b})$, $\frac{1}{b}f(\frac{x-a}{b})$, a, b^2.

問 2.11　$y = (x-\mu)/\sigma$ とおく変数変換を考えることにより,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma} f(\frac{x-\mu}{\sigma}) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y + \mu) f(y) dy = \mu,$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma} f(\frac{x-\mu}{\sigma}) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y)^2 f(y) dy = \sigma^2.$$

$$F_Y(x) = P(Y \le x) = P(X \le \sigma x + \mu) = F(\frac{z-\mu}{\sigma})|_{z=\sigma x+\mu} = F(x).$$

問 2.12　シュワルツの不等式より,

$$E(|X|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x) \le \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x)} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} 1 dF(x)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x)} < \infty$$

問 2.13　分布関数 $\{F(x)-F(-x-0)\}I_{[0,\infty)}(x)$. 密度関数 $\{f(x)+f(-x)\}I_{[0,\infty)}(x)$.

問 2.14　$F(e^x)I_{[0,\infty)}(x)$. 密度関数 $\{f(e^x)\}e^x I_{[0,\infty)}(x)$.

問 2.15　$A \equiv \{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$, $B \equiv \{\omega : Y(\omega) \leq y\} \in \mathcal{A}$. 命題 2.1(1) より, $\{\omega : X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\} = A \cap B \in \mathcal{A}$.

問 2.16　(1) $\frac{1}{100}$ (2) $P(X=i)P(Y=j) = \frac{1}{10}\frac{1}{10} = \frac{1}{100} = P(X=i, Y=j)$
(3) $\frac{i \cdot j}{100}$ (4) $\frac{1}{10}$.

問 2.17　(1) $\frac{1-\delta_{ij}}{90}$ ただし, $\delta_{ij} = 1\ (i=j)\ ;= 0\ (i \neq j)$ (2) $P(X=i)P(Y=j) = \frac{1}{10}\frac{1}{10} \neq P(X=i, Y=j)$
(3) $\frac{2}{45}$, $i \leq j$ のとき $\frac{(j-1)i}{90}$, $i > j$ のとき $\frac{(i-1)j}{90}$. (4) $i \neq j$ のとき $P(X=i|Y=j) = f_{ij}/f_{\cdot j} = \frac{1}{9}$.

問 2.18

$$
\begin{aligned}
P(g(X) \leq x,\ h(Y) \leq y) &= P(X \leq g^{-1}(x),\ Y \leq h^{-1}(y)) \\
&= P(X \leq g^{-1}(x))P(Y \leq h^{-1}(y)) \\
&= P(g(X) \leq x)P(h(Y) \leq y)
\end{aligned}
$$

問 2.19　(1) $E(c) = \int_{-\infty}^{\infty} c dF(x) = c \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = c$. 他も同様.

問 2.20　微分と積分の関係より,
X, Y は互いに独立 $\iff$ $F_{XY}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$ $\iff$ $f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

問 2.21　$V \equiv Y$ とおき変数変換の定理 2.11 を使い, (U, V) の同時密度は $f_X(uv)f_Y(v)|v|$ が示せる.

問 2.22　$A_n \equiv \{x : \frac{1}{n+1} < F(x) - F(x-0) \leq \frac{1}{n}\}$ とおく. $F(x)$ の不連続点の集合 $= \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.
A_n の元は高々 n 個であることを示す. $\# A_n \geq n+1$ とすると, $\{x_1, \cdots, x_{n+1}\} \subset A_n$ となる $x_1 < \cdots < x_{n+1}$ が存在する.

$$
1 = F(\infty) - F(-\infty) \geq \sum_{i=1}^{n+1} \{F(x_i) - F(x_i - 0)\} > \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} = 1
$$

矛盾がおこる.

問 2.23　(1)

$$\begin{aligned}E\{\sum_{i=1}^{k} c_i g_i(X_1,\cdots,X_n)\} &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{k} c_i g_i(x_1,\cdots,x_n)dF(x_1,\cdots,x_n)\\ &= \sum_{i=1}^{k} c_i \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} g_i(x_1,\cdots,x_n)dF(x_1,\cdots,x_n)\end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^{k} c_i E\{g_i(X_1,\cdots,X_n)\}$.

(2) $\mu_i \equiv E(X_i)$ とおく.

$$\begin{aligned}V(\sum_{i=1}^{n} X_i) &= E[\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)\}^2]\\ &= \sum_{i=1}^{n} E\{(X_i-\mu_i)^2\} + 2\sum_{i<i'}^{n} E\{(X_i-\mu_i)(X_{i'}-\mu_{i'})\}\\ &= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{i<i'}^{n} \mathrm{Cov}(X_i,X_{i'}).\end{aligned}$$

$X_1,\cdots,X_n$ が互いに独立ならば,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_i,X_{i'}) &= E\{(X_i-\mu_i)(X_{i'}-\mu_{i'})\}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_i)(y-\mu_{i'})dF_i(x)dF_{i'}(y)\}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_i)dF_i(x)\int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu_{i'})dF_{i'}(y)\}\\ &= (\mu_i-\mu_i)(\mu_{i'}-\mu_{i'})\\ &= 0\end{aligned}$$

より, $V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$.

問 2.24　命題 2.2 と同じ証明.

問 2.25　連続型のとき証明を行う.

$$\begin{aligned}E\{g_1(\boldsymbol{X})g_2(\boldsymbol{Y})|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}\} &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\boldsymbol{x})g_2(\boldsymbol{y})f_{\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})dx_1\cdots dx_m\\ &= g_2(\boldsymbol{y})E\{g_1(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}\}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ が独立ならば, $f_{\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$ より結果を得る.

演習問題 3

問 3.1　独立な n 回のベルヌーイ試行の和 $X \equiv \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n$.

$$E(\epsilon_i) = E(\epsilon_i^2) = 1\times p + 0\times(1-p) = p,\ V(\epsilon_i) = p - p^2$$

定理 2.13 より

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(\epsilon_i)=nE(\epsilon_1)=np$$

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}V(\epsilon_i)=nV(\epsilon_1)=np(1-p)$$

問 3.2

$$\begin{aligned}E\{X(X-1)\}+E(X)-\{E(X)\}^2 &= E(X^2)-E(X)+E(X)-\{E(X)\}^2\\ &= E(X^2)-\{E(X)\}^2=V(X)\end{aligned}$$

問 3.3 　$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}=e^{\lambda}$ を使う.

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}=\lambda e^{\lambda}e^{-\lambda}=\lambda.$$

$$E\{X(X-1)\}=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda}=\lambda^2e^{\lambda}e^{-\lambda}=\lambda^2.$$

問 3.2 より, $V(X)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda.$

問 3.4 　$(1+x)^{n_1+n_2}$ の x^k の係数は $\binom{n_1+n_2}{k}$. $(1+x)^{n_1}$ の x^i の係数は $\binom{n_1}{i}$, $(1+x)^{n_2}$ の x^{n_2-i} の係数は $\binom{n_2}{k-i}$. これにより, $(1+x)^{n_1}\cdot(1+x)^{n_2}$ の x^k の係数は,

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i}.$$

問 3.5

$$\begin{aligned}P(X+Y=z) &= \sum_{x+y=z}\binom{n_1}{x}p^x(1-p)^{n_1-x}\binom{n_2}{y}p^y(1-p)^{n_2-y}\\ &= \sum_{x=0}^{z}\binom{n_1}{x}p^x(1-p)^{n_1-x}\binom{n_2}{z-x}p^{z-x}(1-p)^{n_2-z+x}\\ &= \sum_{x=0}^{z}\binom{n_1}{x}\binom{n_2}{z-x}p^z(1-p)^{n_1+n_2-z}\\ &= \binom{n_1+n_2}{k}p^z(1-p)^{n_1+n_2-z}.\end{aligned}$$

問 3.6

$$
\begin{aligned}
P(X+Y=n) &= \sum_{x=0}^{n} \frac{\lambda_1^x}{x!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{n-x}}{(n-x)!} e^{-\lambda_2} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \lambda_1^x \lambda_2^{n-x} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} (\lambda_1+\lambda_2)^n.
\end{aligned}
$$

問 3.7　$t \equiv \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$ と変数変換し, 定理 A.5 を使うと,

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t^2} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

問 3.8　$t \equiv \frac{x-\mu}{\sigma}$ と変数変換し, 部分積分, ロピタルの定理を使うと,

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx \\
&= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \varphi(t) dt \\
&= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} t\{-\varphi(t)\}' dt \\
&= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt \\
&= \sigma^2.
\end{aligned}
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
\ell_2 &= \frac{1}{\sigma^4} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^4 \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx - 3 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} t^4 \varphi(t) dt - 3 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} t^3 \{-\varphi(t)\}' dt - 3 \\
&= 3 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \varphi(t) dt - 3 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

問 3.9　系 B.1.1(付録) より $\boldsymbol{Y}$ の密度関数は,

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\{\det(\boldsymbol{\Sigma})\}^{\frac{1}{2}}}\{\det(\boldsymbol{A})\}^{-1}\exp\{-\frac{1}{2}{}^t(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\{\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}{}^t\boldsymbol{A})\}^{\frac{1}{2}}}\exp\{-\frac{1}{2}{}^t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu})({}^t\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu})\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\{\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}{}^t\boldsymbol{A})\}^{\frac{1}{2}}}\exp\{-\frac{1}{2}{}^t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}{}^t\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu})\}
\end{aligned}$$

問 3.10

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2\rho & \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2\rho & \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix},$$

$$f_{Z_1Z_2}(z_1,z_2) \equiv \varphi(z_1)\varphi(z_2)$$

とおき, 系 2.11.1 を使うと,

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2) = f_{Z_1Z_2}((x_1-b_1, x_2-b_2)({}^t\boldsymbol{A})^{-1})|\det(\boldsymbol{A})|^{-1}.$$

後は計算すれば, (3.2) 式が得られる.

問 3.11　$t \equiv \beta x$ と変数変換し, 部分積分, ロピタルの定理を使うと,

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^\infty x\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty (\beta x)^\alpha e^{-\beta x}dx \\
&= \frac{1}{\beta}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^\alpha e^{-t}dt \\
&= \frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt \\
&= \frac{\alpha}{\beta}
\end{aligned}$$

同様に, $E(X^2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$, $E(X^3) = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta^3}$, $E(X^4) = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{\beta^4}$. これらにより, 結果を得る.

問 3.12　変換 $T \equiv \dfrac{X+\delta}{\sqrt{Y/n}}, U \equiv Y$ により, (T,U) の同時密度は　$g(t,u) = \varphi(t\sqrt{u/n}-\delta)f_\chi(u,n)\sqrt{u/n}$. $e^{t\delta\sqrt{u/n}} = \displaystyle\sum_{j=0}^\infty \frac{t^j\delta^j u^{j/2}}{j!n^{j/2}}$ と無限級数に展開し, $g(t,u)$ を u について項別積分, $v \equiv$

$\frac{u(t^2/n+1)}{2}$ で変数変換して積分.

$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_0^\infty g(t,u)du \\
&= \frac{e^{-\delta^2/2}}{\sqrt{2\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty u^{(n+1)/2-1}\exp\{-\frac{u(t^2/n+1)}{2}\}\exp(t\delta\sqrt{u/n})du \\
&= \frac{e^{-\delta^2/2}}{\sqrt{2\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty u^{(n+1)/2-1}\exp\{-\frac{u(t^2/n+1)}{2}\}\sum_{j=0}^\infty \frac{t^j\delta^j u^{j/2}}{j!n^{j/2}}du \\
&= \frac{e^{-\delta^2/2}}{\sqrt{2\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}}\sum_{j=0}^\infty \frac{t^j\delta^j}{j!n^{j/2}}\int_0^\infty u^{(n+1+j)/2-1}\exp\{-\frac{u(t^2/n+1)}{2}\}du \\
&= \frac{e^{-\delta^2/2}}{\sqrt{\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})}\sum_{j=0}^\infty \frac{\Gamma(\frac{n+1+j}{2})2^{j/2}\delta^j t^j}{(1+\frac{t^2}{n})^{(n+1+j)/2}j!n^{j/2}}
\end{aligned}$$

問 3.13

$$E(R_i) = \sum_{k=1}^n kP(R_i = k) = \sum_{k=1}^n k(\frac{1}{n}) = \frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}$$

$$E(R_i^2) = \sum_{k=1}^n k^2P(R_i = k) = \sum_{k=1}^n k^2(\frac{1}{n}) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot\frac{1}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$V(R_i) = E(R_i^2) - \{E(R_i)\}^2 = \frac{(n+1)(n-1)}{12}$$

問 3.14　定理 A.2 (1) より, $\boldsymbol{A} = {}^t\boldsymbol{U}\mathrm{diag}(1,\cdots,1,0,\cdots,0)\boldsymbol{U}$ を満たす直交行列 $\boldsymbol{U}$ が存在する. $\boldsymbol{Y} \equiv \boldsymbol{U}\boldsymbol{X}$ とおく. 定理 3.2 より $\boldsymbol{Y} \sim N_n(\boldsymbol{U}\boldsymbol{0}, \boldsymbol{U}\boldsymbol{I}_n{}^t\boldsymbol{U}) = N_n(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_n)$ である. 定理 3.5 を使って, ${}^t\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = {}^t\boldsymbol{Y}\mathrm{diag}(1,\cdots,1,0,\cdots,0)\boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^k Y_i^2 \sim \chi_k^2$.

問 3.15　$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n - \frac{1}{n}\boldsymbol{1}_n{}^t\boldsymbol{1}_n$. 定理 A.2 (2) より, 階数は $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = n-1$ である. 問 3.14 より結果を得る.

問 3.16　$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_k - {}^t(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_k})(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_k})$. 定理 A.2 (2) より, 階数は $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = k - \sum_{i=1}^k \lambda_i = k-1$ である. 問 3.14 より結果を得る.

問 3.17　$P(A_n) \le P(A_n \cup B) \le 1$ により,

$$1 = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \le \lim_{n\to\infty} P(A_n \cup B) \le 1.$$

故に, $\lim_{n\to\infty} P(A_n \cup B) = 1$. このことと定理 2.1 (4) より,

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n \cap B) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) + P(B) - \lim_{n\to\infty} P(A_n \cup B) = 1 + P(B) - 1 = P(B).$$

問 3.18　任意の連続点 x に対して，$x \pm \varepsilon$ が $F_Y(x)$ の連続点になるように $\varepsilon > 0$ をとる．

$$\begin{aligned} P(Y_n \le x) &= P(Y_n \le x,\, |Y_n - Y| < \varepsilon) + P(Y_n \le x,\, |Y_n - Y| \ge \varepsilon) \\ &\le F_Y(x+\varepsilon) + P(|Y_n - Y| \ge \varepsilon) \end{aligned}$$

同様に，

$$F_Y(x-\varepsilon) \le P(Y_n < x) + P(|Y_n - Y| \le \varepsilon)$$

これらにより，

$$F_Y(x-\varepsilon) - P(|Y_n - Y| \ge \varepsilon) \le P(Y_n < x) \le P(Y_n \le x) \le F_Y(x+\varepsilon) + P(|Y_n - Y| \ge \varepsilon)$$

ここで $n \to \infty$ とすれば，

$$F_Y(x-\varepsilon) \le \lim_{n\to\infty} P(Y_n \le x) \le F_Y(x+\varepsilon).$$

$\varepsilon > 0$ を $+0$ に近づけることにより，$\lim_{n\to\infty} P(Y_n \le x) = F_Y(x)$

問 3.19

$$\begin{aligned} P(|Y_n - c| \ge \varepsilon) &= P(Y_n - c \le -\varepsilon \text{ または } Y_n - c \ge \varepsilon) \\ &= P(Y_n - c \le -\varepsilon) + P(Y_n - c \ge \varepsilon) \\ &= P(Y_n \le c - \varepsilon) + 1 - P(Y_n < c + \varepsilon) \end{aligned}$$

極限をとると

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - c| \ge \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P(Y_n \le c - \varepsilon) + 1 - \lim_{n\to\infty} P(Y_n < c + \varepsilon) = 0.$$

問 3.20　平均値の定理を使うと $a_n\{g(Y_n) - g(c)\} = g'(Z_n)a_n(Y_n - c)$ と書ける．Z_n は c に確率収束する．定理 3.11(3) より結果を得る．

問 3.21　$X = \frac{\frac{\chi_m^2}{m}}{\frac{\chi_n^2}{n}}$ と書き表せる．$\frac{\chi_n^2}{n} = (Z_1^2 + \cdots + Z_n^2)/n$ と書き直せる，ただし $Z_1, \cdots, Z_n$ は標準正規分布に従う独立な確率変数．ここで大数の法則を適用すると $\frac{\chi_n^2}{n} \xrightarrow{P} E(Z_1^2) = 1$ となる．定理 3.13 (3) より $X \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\chi_m^2}{m}$.

問 3.22　定理 3.7 より，

$$X = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}}$$

と書き表せる．$\frac{\chi_n^2}{n} = (Z_1^2 + \cdots + Z_n^2)/n$ と書き直せる，ただし $Z_1, \cdots, Z_n$ は標準正規分布に従う独立な確率変数．ここで大数の法則を適用すると $\frac{\chi_n^2}{n} \xrightarrow{P} E(Z_1^2) = 1$ となる．定理 3.13 (3) より $X \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$.

問 3.23-3.26　略

演習問題 4

問 4.1

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & (T(\boldsymbol{x}) > 2.326 \text{ のとき}) \\ 0 & (T(\boldsymbol{x}) < 2.326 \text{ のとき}) \end{cases}$$

問 4.2　例 4.3 と同様に (4.4) の検定方式が水準 α の一様最強力検定

問 4.3　$2^{-8} = 0.0039$, $8 \times 2^{-8} = 0.03125$ より, $(0.01 - 0.0039)/0.03125 = 0.1952$

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & (T(\boldsymbol{x}) = 8 \text{ のとき}) \\ 0.1952 & (T(\boldsymbol{x}) = 7 \text{ のとき}) \\ 0 & (T(\boldsymbol{x}) < 7 \text{ のとき}) \end{cases}$$

問 4.4　$(\bar{X}_n - \frac{2.576}{\sqrt{n}},\ \bar{X}_n + \frac{2.576}{\sqrt{n}})$

問 4.5　例 4.3 と同様に $\phi(\boldsymbol{x})$ が水準 α の一様最強力検定であることを示せる．検出力関数は

$$b(\mu) = P_\mu(\sqrt{n}\bar{X}_n/\sigma > z_\alpha) = P_\mu(\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma > z_\alpha - \sqrt{n}\mu/\sigma) = 1 - \Phi(z_\alpha - \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma})$$

問 4.6　『 帰無仮説 $H_0 : \theta = \theta_0$ v.s. 対立仮説 $H_1' : \theta_1 > \theta_0$ 』に対する最強力検定は

$$\frac{f_n(\boldsymbol{X};\theta_1)}{f_n(\boldsymbol{X};\theta_0)} = \exp[\{c(\theta_1) - c(\theta_0)\}T(\boldsymbol{X}) + d(\theta_1) - d(\theta_0)]$$

が大きいとき H_0 を棄却することである．これは, $T(\boldsymbol{X})$ が大きいとき H_0 を棄却することと同値. 一様最強力検定であることは例 4.3 と同様に示せる.

問 4.7　$E(c\bar{X}_n) = cE(\bar{X}_n) = c\mu$,

$$R(\boldsymbol{\theta}, c\bar{X}_n) = E[\{(c\bar{X}_n - c\mu) + (c\mu - \mu)\}^2] = V(c\bar{X}_n) + (c\mu - \mu)^2 = \frac{c^2\sigma^2}{n} + (c-1)^2\mu^2$$

問 4.8　仮定より, $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2$. $E(d(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n c_i E(X_i) = \mu \sum_{i=1}^n c_i$. $E(d(\boldsymbol{X}) = \mu$ が成り立つための c_i の条件は, $\sum_{i=1}^n c_i = 0$. $R(\boldsymbol{\theta}, d(\boldsymbol{X})) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n c_i^2$. $\sum_{i=1}^n c_i = 0$ の下で, $\sum_{i=1}^n c_i^2$ を最小にする c_i はラグランジュ乗法より, $c_i = \frac{1}{n}$ である.

$$R(\boldsymbol{\theta}, \bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \leq \sigma^2 \sum_{i=1}^n c_i^2 = R(\boldsymbol{\theta}, d(\boldsymbol{X}))$$

問 4.9　仮定より, $E(X_i)=\mu$, $V(X_i)=\sigma^2$. $\tilde{\sigma}_n^2 \equiv \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{n}{n-1}\bar{X}_n^2$. 大数の法則より, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{P} E(X_1^2)$, $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$. 系 3.11.2 より,

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{n}{n-1}\bar{X}_n^2 \xrightarrow{P} E(X_1^2)-\mu^2=\sigma^2$$

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2 - \frac{n}{n-1}(\bar{X}_n-\mu)^2$$

中心極限定理より,

$$\sqrt{n}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2-\sigma^2) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \ \sim\ N(0, V\{(X_1-\mu)^2\}),$$

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} V \ \sim\ N(0,\sigma^2).$$

大数の法則より, $\bar{X}_n-\mu \xrightarrow{P} 0$. 定理 3.11 より結果を得る.

問 4.10

$$E(\tilde{\sigma}_n^2) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n E\{(X_i-\mu)^2\} - \frac{n}{n-1}E\{(\bar{X}_n-\mu)^2\} = \frac{n}{n-1}V(X_1) - \frac{n}{n-1}V(\bar{X}_n) = \sigma^2$$

問 4.11 $Y_i \equiv X_i - \bar{X}_n$ とおく. $V(Y_i)=(1-\frac{1}{n})\sigma^2$ より,

$$E|Y_i| = \sqrt{1-\frac{1}{n}}\sigma\int_{-\infty}^{\infty}|t|\varphi(t)dt = \sqrt{1-\frac{1}{n}}\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$E(\hat{\sigma}_n) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}n}nE|Y_1| = \sqrt{1-\frac{1}{n}}\sigma$.

問 4.12　$\frac{(n-1)\tilde{\sigma}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$, $\lim_{n\to\infty}E\{|X_i-\bar{X}_n||X_j-\bar{X}_n|\} = \sigma^2(\int_{-\infty}^{\infty}|t|\varphi(t)dt)^2$

演習問題 5

問 5.1

$$P(\frac{X-\mu}{\sigma} \le x) = P(X \le x\sigma+\mu) = F(\frac{(x\sigma+\mu)-\mu}{\sigma}) = F(x)$$

問 5.2　$E(x^{2m+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m+1}f(x)dx$. $x^{2m+1}f(x)$ は奇関数より結果を得る.

問 5.3　$X-\mu$ と $-(X-\mu)$ が同じ分布に従うことより,
$E(X-\mu)=E\{-(X-\mu)\}$. これにより, $2E(X)=2\mu$. $E(X-\mu)^3 = E\{-(X-\mu)\}^3 = -E(X-\mu)^3$. よって, $E(X-\mu)^3=0$. ゆえに結果を得る.

問 5.4　$\ell_1=0$ は問 5.3 より解る. 他は単純な計算による.

問 5.5

$$n\hat{G}_n(x) = \sum_{1}^{n} I_{(-\infty,x]}(X_i) \tag{2}$$

と書ける.

$$nE\{\hat{G}_n(x)\} = \sum_{1}^{n} E\{I_{(-\infty,x]}(X_i)\} = nG(x)$$

$E\{\hat{G}_n(x)\} = G(x)$. (2) と大数の法則より, 一致推定量は示せる.

問 5.6　$I_{(-\infty,x]}(X_i)$ は $G(x)$ の確率で 1, $1 - G(x)$ の確率で 0 である. さらに, $I_{(-\infty,x]}(X_i)$ $(i = 1, \cdots, n)$ は互いに独立. (2) より結果を得る.

問 5.7　$x \in R$ ならば, (i) $x < X_{(1)}$, (ii) ある i が存在して $X_{(i-1)} \leq x < X_{(i)}$, (iii) $x \geq X_{(n)}$ のいずれかが成り立つ,

(i) のとき $|\hat{G}_n(x) - F(\frac{x - \bar{X}_\beta}{\breve{\sigma}_n})| \leq |F(\frac{X_{(1)} - \bar{X}_\beta}{\breve{\sigma}_n}) - \frac{1-1}{n}|$,

(ii) のとき $|\hat{G}_n(x) - F(\frac{x - \bar{X}_\beta}{\breve{\sigma}_n})| \leq \max\{|\frac{i}{n} - F(\frac{X_{(i)} - \bar{X}_\beta}{\breve{\sigma}_n})|, |F(\frac{X_{(i)} - \bar{X}_\beta}{\breve{\sigma}_n}) - \frac{i-1}{n}|\}$,

(iii) のとき $|\hat{G}_n(x) - F(\frac{x - \bar{X}_\beta}{\breve{\sigma}_n})| \leq |\frac{n}{n} - F(\frac{X_{(n)} - \bar{X}_\beta}{\breve{\sigma}_n})|$.

問 5.8　一般性を失うことなく $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ と仮定できる. 定理 5.2 の証明と同じ.

問 5.9　問 5.8 より, $(n-1)\frac{\tilde{\sigma}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$. $\tilde{\sigma}_n T_S/\sigma$ は $N(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}, 1)$ に従う. 定理 5.2 の証明と同じく, $(n-1)\frac{\tilde{\sigma}_n^2}{\sigma^2}$ と $\tilde{\sigma}_n T_S/\sigma$ は互いに独立. 定理 3.7 の注より結果を得る.

問 5.10　仮定より, $E(X_i) = \mu_0$, $V(X_i) = \sigma^2$. これにより, 一般性を失うことなく $\mu_0 = 0$, $\sigma^2 = 1$ と仮定できる. 問 4.9 より, $\tilde{\sigma}_n^2 \xrightarrow{P} 1$. 中心極限定理より, $\sqrt{n}\bar{X}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim N(0,1)$. 定理 3.11 より結果を得る.

問 5.11　T_R は $(X_1, \cdots, X_n)$ の関数であるので $T_R(X_1, \cdots, X_n)$ と書くことにする. このとき, $T_R(-X_1, \cdots, -X_n) = -T_R(X_1, \cdots, X_n)$. $(-X_1, \cdots, -X_n)$ と $(X_1, \cdots, X_n)$ は同じ分布に従う. 故に,　T_R と $-T_R$ は同じ分布に従う.

問 5.12　$V(X_i) = \sigma^2$, $G(\frac{x}{\sigma}) - G(-\frac{x}{\sigma}) = P(|X_1| \leq x) = 0.5$
$2G(\frac{x}{\sigma}) - 1 = 0.5$, $G(\frac{x}{\sigma}) = 0.75$, $x = \sigma G^{-1}(0.75)$. ここで, $\hat{S}_n \xrightarrow{P} \sigma G^{-1}(0.75)$. 故に

$$\frac{\hat{S}_n}{G^{-1}(0.75)} \xrightarrow{P} \sigma$$

問 5.13　問 5.11 と同様.

問 5.14　$\psi(x) \equiv x$ とすれば, $Z_M = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n Y_i^2}}$

$$T_S = (\frac{n-1}{\sqrt{n}})\frac{Z_M}{1-\frac{Z_M^2}{n}}$$

T_S を Z_M で微分することにより, T_S は Z_M の狭義増加関数であることが解る. 故に Z_M は T_S の狭義増加関数である.

問 5.15　$\psi(x) \equiv x$ とすれば, $T_M = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\hat{\sigma}_n}$.

$$\begin{aligned} P_0(T_M \le t \| \boldsymbol{Y}| = |\boldsymbol{y}|) &= P_0(\sum_{i=1}^n \mathrm{sign}(Y_i) \cdot \frac{|y_i|}{\hat{\sigma}_{0n}} \le t) \\ &= \frac{1}{2^n}\#\{\boldsymbol{s} : \sum_{i=1}^n s_i \cdot |y_i| \le \hat{\sigma}_{0n}t, \boldsymbol{s} \in \mathcal{S}_n\} \\ &= P_0(T_S' \ge \hat{\sigma}_{0n}t \| \boldsymbol{Y}| = |\boldsymbol{y}|) \\ &= P_0(T_S \ge \hat{\sigma}_{0n}t \| \boldsymbol{Y}| = |\boldsymbol{y}|) \end{aligned}$$

ただし, $T_S' = \sum_{i=1}^n \mathrm{sign}(Y_i) \cdot |Y_i|$.

問 5.16　$\psi(x) \equiv x$ とすれば, $\sum_{i=1}^n \frac{X_i-\mu}{\breve{\sigma}_n} = 0$ の μ の解は, $\tilde{\mu}$

問 5.17　$\tilde{\mu}(cX_1+d, \cdots, cX_n+d) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (cX_i+d) = c\tilde{\mu}(X_1, \cdots, X_n) + d$. 他も同様.

演習問題 6

問 6.1　$E(X_i) = E(Y_j) = \mu$, $V(X_i) = V(Y_j) = \sigma^2$. 一般性を失うことなく $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ と仮定できる. $\frac{\sqrt{n_1 n_2}\bar{X}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\lambda_1}Z_1$, $\frac{\sqrt{n_1 n_2}\bar{Y}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\lambda_2}Z_2$. 定理 B.8 より, Z_1 と Z_2 は互いに独立な $N(0,1)$ に従い, $\tilde{\sigma}_n T_S \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\lambda_1}Z_1 - \sqrt{\lambda_2}Z_2 \sim N(0,1)$. 大数の法則より, $\tilde{\sigma}_n \xrightarrow{P} 1$. 系 3.11.1 より,

$$T_S \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \ \sim \ N(0,1).$$

問 6.2　一般性を失うことなく $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\sigma^2 = 1$ と仮定できる. 定理 6.4 より結果を得る.

問 6.3　問 5.9 の証明と同じ.

問 6.4　$E(X_i) = \mu_1$, $E(Y_j) = \mu_2$, $V(X_i) = \sigma_1^2$, $V(Y_j) = \sigma_2^2$. 大数の法則より, $\bar{X} \xrightarrow{P} \mu_1$, $\bar{Y} \xrightarrow{P} \mu_2$. 系 3.11.2 より結果を得る.

問 6.5　一般性を失うことなく $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\sigma^2 = 1$ と仮定できる. 問 6.1 の証明と同じ.

問 6.6　H_0 の下で, $P_0(R_1 = r_1, \cdots, R_{n_1} = r_{n_1}) = \frac{1}{n_1!} = P_0(R_1 = n+1-r_1, \cdots, R_{n_1} = n+1-r_{n_1}) = P_0(n+1-R_1 = r_1, \cdots, n+1-R_{n_1} = r_{n_1})$ より,

$(R_1,\cdots,R_{n_1})$ と $(n+1-R_1,\cdots,n+1-R_{n_1})$ は同じ分布に従う. R_i を $n+1-R_i$ に替えて T_R に代入すると, $-\sum_{i=1}^{n_1}\frac{1}{n_1}\{R_i-(n+1)\}-\frac{n+1}{2}=-T_R$ これにより, $P_0(T_R=t)=P_0(-T_R=t)=P_0(T_R=-t)$.

問 6.7　$R_1=r_1,\cdots,R_{n_1}=r_{n_1},R_{n_1+1}=r_{n_1+1},\cdots,R_n=r_n$ のとき, $T_R=t$ と仮定する. $\boldsymbol{q}_1\equiv(r_1,\cdots,r_{n_1})$, $\boldsymbol{q}_2\equiv(r_{n_1+1},\cdots,r_n)$ とおき, $\boldsymbol{q}_1$ の成分の順列からなる集合を $\mathcal{C}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ の成分の順列からなる集合を $\mathcal{C}_2$ とすると, $\#\{\mathcal{C}_1\}=n_1!$, $\#\{\mathcal{C}_2\}=n_2!$. $(R_1,\cdots,R_n)=(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2)$ ($\boldsymbol{q}_1\in\mathcal{C}_1$, $\boldsymbol{q}_2\in\mathcal{C}_2$) に対して, $T_R=t$. $P_0((R_1,\cdots,R_n)=(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2))=\frac{1}{n!}$. これらにより

$$P_0(T_R=t)\geq\frac{n_1!n_2!}{n!}=\frac{1}{{}_nC_{n_1}}$$

問 6.8　$\frac{X_1-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ より,

$$E|X_1-\mu|=\sigma\int_{-\infty}^{\infty}|x|\varphi(x)dx=2\sigma\int_0^{\infty}x\varphi(x)dx=2\sigma\int_0^{\infty}\{-\varphi(x)\}'dx=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

問 6.9　$P_0(T_M=t|\boldsymbol{X}_{(\cdot)}=\boldsymbol{x}_{(\cdot)})\geq\dfrac{1}{{}_nC_{n_1}}$ であることは, 問 6.7 の証明と同じ.

後半の証明. $m\equiv n_1=n_2$ とおく. $X_1=x_1,\cdots,X_m=x_m,Y_1=y_1,\cdots,Y_m=y_m$ のとき, $T_M=t$ とする. $X_1=y_1,\cdots,X_m=y_m,Y_1=x_1,\cdots,Y_m=x_m$ のとき, $T_M=-t$. $P_0(X_1=x_1,\cdots,X_m=x_m,Y_1=y_1,\cdots,Y_m=y_m|\boldsymbol{X}_{(\cdot)}=\boldsymbol{x}_{(\cdot)})=P_0(X_1=y_1,\cdots,X_m=y_m,Y_1=x_1,\cdots,Y_m=x_m|\boldsymbol{X}_{(\cdot)}=\boldsymbol{x}_{(\cdot)})$. 故に, $P_0(T_M=t|\boldsymbol{X}_{(\cdot)}=\boldsymbol{x}_{(\cdot)})>0$ ならば, $P_0(T_M=t|\boldsymbol{X}_{(\cdot)}=\boldsymbol{x}_{(\cdot)})\geq\dfrac{1}{{}_nC_{n_1}}$ である.

問 6.10　$\psi(x)\equiv x$ とすれば,

$$Z_M=\frac{\sqrt{n_1n_2(n-1)}(\bar{X}-\bar{Y})}{\sqrt{n[\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\tilde{\mu})^2+\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\tilde{\mu})^2]}}$$

さらに,

$$\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\tilde{\mu})^2+\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\tilde{\mu})^2=\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\bar{Y})^2+\frac{n_1n_2}{n}(\bar{X}-\bar{Y})^2$$

を使うと Z_M が T_S の狭義増加関数であることが解る.

問 6.11　6.6 節の議論より並べ替え t 検定は, $T_S'=\bar{X}-\bar{Y}$ を基に検定方式を定めることができる. $\psi(x)\equiv x$ とすれば, $T_M=\frac{\bar{X}}{\hat{\sigma}_n}-\frac{\bar{Y}}{\hat{\sigma}_n}$. $P_0(T_M\leq t|\boldsymbol{X}_{(\cdot)}=\boldsymbol{x}_{(\cdot)})$

$$=\frac{1}{n!}\#\{\boldsymbol{v}:\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\frac{v_i}{\hat{\sigma}_{0n}}-\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}\frac{v_{n_1+j}}{\hat{\sigma}_{0n}}\leq t,\ \boldsymbol{v}\in\mathcal{V}_n\}$$

$$= \frac{1}{n!}\#\{\boldsymbol{v} : \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} v_i - \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} v_{n_1+j} \le t\hat{\sigma}_{0n},\ \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}_n\}$$

によって有意確率を計算する.

問 6.12　$\psi(x) \equiv x$ とすれば,

$$\sum_{i=1}^{n_1}(\frac{X_i - \tilde{\mu} - \breve{\theta}}{\breve{\sigma}_n}) - \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}(\frac{Y_j - \tilde{\mu} + (\frac{n_1}{n_2})\cdot\breve{\theta}}{\breve{\sigma}_n}) = 0$$

これにより,

$$\bar{X} - \bar{Y} = (1 + \frac{n_1}{n_2})\cdot\breve{\theta} = \breve{\delta}$$

問 6.13
$\tilde{\delta}(cX_1 + d_1, \cdots, cX_{n_1} + d_1, cY_1 + d_2, \cdots, cY_{n_2} + d_2)$
$= c(\bar{X} - \bar{Y}) + d_1 - d_2$
$= c\tilde{\delta}(X_1, \cdots, X_{n_1}, Y_1, \cdots, Y_{n_2}) + d_1 - d_2$
同様に, 関係式

$$\hat{\delta}(cX_1 + d_1, \cdots, cX_{n_1} + d_1, cY_1 + d_2, \cdots, cY_{n_2} + d_2)$$
$$= c\hat{\delta}(X_1, \cdots, X_{n_1}, Y_1, \cdots, Y_{n_2}) + d_1 - d_2,$$
$$\breve{\delta}(cX_1 + d_1, \cdots, cX_{n_1} + d_1, cY_1 + d_2, \cdots, cY_{n_2} + d_2)$$
$$= c\breve{\delta}(X_1, \cdots, X_{n_1}, Y_1, \cdots, Y_{n_2}) + d_1 - d_2,$$

の成立することが示せる. $Z_i \equiv \frac{X_i - \mu_1}{\sigma} \sim F(x)$, $Z_{n_1+j} \equiv \frac{Y_j - \mu_2}{\sigma} \sim F(x)$
$\tilde{\delta}$ に対する $\hat{\delta}$ の相対効率は,

$$\begin{aligned}\frac{E[\{\hat{\delta} - \delta\}^2]}{E[\{\tilde{\delta} - \delta\}^2]} &= \frac{E[\{\hat{\delta}(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma}, \cdots, \frac{X_{n_1}-\mu_1}{\sigma}, \frac{Y_1-\mu_2}{\sigma}, \cdots, \frac{Y_{n_2}-\mu_2}{\sigma})\}^2]}{E[\{\tilde{\delta}(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma}, \cdots, \frac{X_{n_1}-\mu_1}{\sigma}, \frac{Y_1-\mu_2}{\sigma}, \cdots, \frac{Y_{n_2}-\mu_2}{\sigma})\}^2]} \\ &= \frac{E[\{\hat{\delta}(Z_1, \cdots, Z_n)\}^2]}{E[\{\tilde{\delta}(Z_1, \cdots, Z_n)\}^2]}\end{aligned}$$

これは, (μ_1, μ_2, σ) に依存しない. 他も同様の証明.

問 6.14　一般性を失うことなく $\mu = 0$ とする. 中心極限定理より, $\sqrt{n_1}\frac{\bar{X}}{\sigma_1} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z_1 \sim N(0,1)$. $\sqrt{n_2}\frac{\bar{Y}}{\sigma_2} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z_2 \sim N(0,1)$. 定理 B.8 より, Z_1, Z_2 は互いに独立. これにより,

$$\sqrt{n}\bar{X} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\sigma_1}{\sqrt{\lambda_1}}Z_1,\ \ \sqrt{n}\bar{Y} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\sigma_2}{\sqrt{\lambda_2}}Z_2.$$

大数の法則と系 3.11.2(1) より,

$$\sqrt{\frac{n\tilde{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{n\tilde{\sigma}_2^2}{n_2}} \xrightarrow{\mathcal{P}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\lambda_1} + \frac{\sigma_2^2}{\lambda_2}}$$

定理 3.11(1),(3) より, 結果を得る.

問 6.15　$a(z) \equiv \psi(\frac{z-\tilde{\mu}}{\hat{\sigma}_n}) - \bar{\psi}.(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, $b(z) \equiv \psi(\frac{z-\tilde{\mu}_0}{\hat{\sigma}_{0n}}) - \bar{\psi}.(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ とおく. (3.9) より,

$$E_0\{T_M | \boldsymbol{X}_{(\cdot)} = \boldsymbol{x}_{(\cdot)}\} = E_0\{a(X_1) - a(Y_1) | \boldsymbol{X}_{(\cdot)} = \boldsymbol{x}_{(\cdot)}\} = 0$$

(3.9), (3.10), $\sum_{i=1} b(x_{(i)}) = 0$ を使うと,

$$\begin{aligned}
V_0\{T_M | \boldsymbol{X}_{(\cdot)} = \boldsymbol{x}_{(\cdot)}\} &= E[\{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} a(X_i) - \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} a(Y_j)\}^2] \\
&= \frac{1}{n_1}E\{a^2(X_1)\} + \frac{1}{n_2}E\{a^2(Y_1)\} + \frac{n_1-1}{n_1}E\{a(X_1)a(X_2)\} \\
&\quad + \frac{n_2-1}{n_2}E\{a(Y_1)a(Y_2)\} - 2E\{a(X_1)a(Y_1)\} \\
&= (\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})E\{a^2(X_1)\} - (\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})E\{a(X_1)a(X_2)\} \\
&= (\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b^2(x_{(i)}) - (\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})\{\frac{1}{n(n-1)}\}\sum_{i \neq j} b(x_{(i)})b(x_{(j)}) \\
&= \frac{1}{n_1 n_2}\sum_{i=1}^{n} b^2(x_{(i)}) + \frac{1}{n_1 n_2 (n-1)}\sum_{i=1}^{n} b^2(x_{(i)}) \\
&= \frac{n}{n_1 n_2 (n-1)}\sum_{i=1}^{n} b^2(x_{(i)})
\end{aligned}$$

が示される.

問 6.16　省略

演習問題 7

問 7.1　一般性を失うことなく $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$ として議論してよい. $\boldsymbol{X} \equiv {}^t(X_1, \cdots, X_n)$ とおき,

$$T_S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y}) \equiv \frac{\sqrt{n-2}T_1}{\sqrt{T_2}},$$

$$T_1 \equiv \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(Y_i - \bar{Y}_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}}, \;\; T_2 \equiv \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2 - T_1^2$$

とおく. $T_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)Y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}}$, $V(T_1) = 1$. 系 3.1 より, $T_1 \sim N(0,1)$. $c_i \equiv \frac{x_i - \bar{x}_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}}$ とおき, シュミットの正規直交化法より,

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ c_1 & \cdots & c_n \\ & * & \end{pmatrix}, \qquad {}^t\boldsymbol{U}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}_n$$

を満たす直交行列 $\boldsymbol{U}$ が存在する．変換 $\boldsymbol{UY}$ を考え, 定理 3.8 の証明と同様な方法により $T_2 \sim \chi^2_{n-2}$ と T_1, T_2 の独立性が示せる．これにより, $T_S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y}) \sim t_{n-2}$. $T_S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y})$ と $\boldsymbol{X}$ は互いに独立.

$$\begin{aligned}
P(T_S \le t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} P(T_S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y}) \le t | \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} P(T_S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y}) \le t) f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} P(t_{n-2} \le t) f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) dx_1 \cdots dx_n \\
&= P(t_{n-2} \le t)
\end{aligned}$$

問 7.2

$$\tilde{\rho}_{XY} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \bar{X}_n \bar{Y}_n}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2}}$$

大数の法則と例 3.2 より,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i Y_i \xrightarrow{\mathcal{P}} E(X_1 Y_1), \;\; \bar{X}_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \mu_1, \;\; \bar{Y}_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \mu_2,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \xrightarrow{\mathcal{P}} \sigma_1^2, \;\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2 \xrightarrow{\mathcal{P}} \sigma_2^2.$$

ここで, 定理 3.11(1) と系 3.11.2 を使うと,

$$\tilde{\rho}_{XY} \xrightarrow{\mathcal{P}} \frac{E(X_1 Y_1) - \mu_1 \mu_2}{\sigma_1 \sigma_2} = \rho$$

問 7.3　H_0 の下で,

$$\begin{aligned}
P_0(R_1 = r_1, \cdots, R_n = r_n) &= \frac{1}{n!} \\
&= P_0(R_1 = n+1-r_1, \cdots, R_n = n+1-r_n) \\
&= P_0(n+1-R_1 = r_1, \cdots, n+1-R_n = r_n)
\end{aligned}$$

より, $(R_1, \cdots, R_n)$ と $(n+1-R_1, \cdots, n+1-R_n)$ は同じ分布に従う．R_i を $n+1-R_i$ に替えて T_R に代入すると，$-\sum_{i=1}^n \{R_i - (n+1)\}(Q_i - \frac{n+1}{2}) = -T_R$ これにより, $P_0(T_R = t) = P_0(-T_R = t) = P_0(T_R = -t)$.

問 7.4　$E_0(T_R) = \sum_{i=1}^n E_0(R_i) \cdot E_0(Q_i - \frac{n+1}{2}) = nE_0(R_1) \cdot \{E_0(Q_1) - \frac{n+1}{2}\} = 0$

(7.2) より,

$$\begin{aligned}
V_0(T_R) &= V_0\{\sum_{i=1}^{n}(i-\frac{n+1}{2})R_i\} \\
&= E_0\{\sum_{i=1}^{n}(i-\frac{n+1}{2})R_i\}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(i-\frac{n+1}{2})^2E(R_i^2)+\sum_{i\neq j}(i-\frac{n+1}{2})(j-\frac{n+1}{2})E(R_iR_j) \\
&= \frac{n(n+1)(n-1)}{12}\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\sum_{i=1}^{n}(i-\frac{n+1}{2})^2\frac{(n+1)(3n+2)}{12} \\
&= \frac{n(n+1)(n-1)}{12}\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)(n-1)}{12}\frac{(n+1)(3n+2)}{12} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2(n-1)}{144}
\end{aligned}$$

問 7.5　シュワルツの不等式より, 実数 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$ に対して, $|\sum_{i=1}^n a_ib_i| \leq \sqrt{(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2)}$. $a_i=\Phi^{-1}(\frac{R_i}{n+1})$, $b_i=\Phi^{-1}(\frac{Q_i}{n+1})$ を上の不等式にあてはめる.

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\sum_{i=1}^{n}\{\Phi^{-1}(\frac{i}{n+1})\}^2,\ \sum_{i=1}^{n}b_i^2=\sum_{i=1}^{n}\{\Phi^{-1}(\frac{i}{n+1})\}^2.$$

問 7.6　$E_0(T_M|\boldsymbol{X}_{(\cdot)}=\boldsymbol{x}_{(\cdot)},\boldsymbol{Y}_{(\cdot)}=\boldsymbol{y}_{(\cdot)})=\sum_{i=1}^n E_0\{\psi(\frac{X_i-\bar{X}_n}{\hat{\sigma}_X})|\boldsymbol{X}_{(\cdot)}=\boldsymbol{x}_{(\cdot)},\boldsymbol{Y}_{(\cdot)}=\boldsymbol{y}_{(\cdot)})\}\cdot E_0\{\psi(\frac{Y_i-\bar{Y}_n}{\hat{\sigma}_Y})-\bar{\psi}_Y|\boldsymbol{X}_{(\cdot)}=\boldsymbol{x}_{(\cdot)},\boldsymbol{Y}_{(\cdot)}=\boldsymbol{y}_{(\cdot)}\}=nE_0\{\psi(\frac{X_1-\bar{X}_n}{\hat{\sigma}_X})|\boldsymbol{X}_{(\cdot)}=\boldsymbol{x}_{(\cdot)}\}\cdot E_0\{\psi(\frac{Y_i-\bar{Y}_n}{\hat{\sigma}_Y})-\bar{\psi}_Y|\boldsymbol{Y}_{(\cdot)}=\boldsymbol{y}_{(\cdot)}\}=0$
(7.3) より,

$$\begin{aligned}
&V_0(T_M|\boldsymbol{X}_{(\cdot)}=\boldsymbol{x}_{(\cdot)},\boldsymbol{Y}_{(\cdot)}=\boldsymbol{y}_{(\cdot)}) \\
&=V_0[\sum_{i=1}^{n}\psi(\frac{X_i-\bar{X}_n}{\hat{\sigma}_X})\cdot\{\psi(\frac{y_i-\bar{y}_n}{\hat{\sigma}_y})-\bar{\psi}_y\}|\boldsymbol{X}_{(\cdot)}=\boldsymbol{x}_{(\cdot)}] \\
&=E_0[\{\sum_{i=1}^{n}(\psi(\frac{X_i-\bar{X}_n}{\hat{\sigma}_X})-\bar{\psi}_x)\cdot(\psi(\frac{y_i-\bar{y}_n}{\hat{\sigma}_y})-\bar{\psi}_y)\}^2|\boldsymbol{X}_{(\cdot)}=\boldsymbol{x}_{(\cdot)}] \\
&=\sum_{i=1}^{n}(\psi(\frac{y_i-\bar{y}_n}{\hat{\sigma}_y})-\bar{\psi}_y)^2E[\{\psi(\frac{X_i-\bar{X}_n}{\hat{\sigma}_X})-\bar{\psi}_x\}^2|\boldsymbol{X}_{(\cdot)}=\boldsymbol{x}_{(\cdot)}] \\
&\quad+\sum_{i\neq j}(\psi(\frac{y_i-\bar{y}_n}{\hat{\sigma}_y})-\bar{\psi}_y)(\psi(\frac{y_j-\bar{y}_n}{\hat{\sigma}_y})-\bar{\psi}_y) \\
&\quad\times E[\{\psi(\frac{X_i-\bar{X}_n}{\hat{\sigma}_X})-\bar{\psi}_x\}\{\psi(\frac{X_j-\bar{X}_n}{\hat{\sigma}_X})-\bar{\psi}_x\}|\boldsymbol{X}_{(\cdot)}=\boldsymbol{x}_{(\cdot)}] \\
&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{\psi(\frac{y_i-\bar{y}_n}{\hat{\sigma}_y})-\bar{\psi}_y\}^2\sum_{i=1}^{n}\{\psi(\frac{x_i-\bar{x}_n}{\hat{\sigma}_x})-\bar{\psi}_x\}^2
\end{aligned}$$

$$
+\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\{\psi(\frac{y_i-\bar{y}_n}{\hat{\sigma}_y})-\bar{\psi}_y\}^2\sum_{i=1}^{n}\{\psi(\frac{x_i-\bar{x}_n}{\hat{\sigma}_x})-\bar{\psi}_x\}^2
$$

$$
=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\{\psi(\frac{x_i-\bar{x}_n}{\hat{\sigma}_x})-\bar{\psi}_x\}^2\sum_{i=1}^{n}\{\psi(\frac{y_i-\bar{y}_n}{\hat{\sigma}_y})-\bar{\psi}_y\}^2
$$

問7.7　シュワルツの不等式より, 実数 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$ に対して, $|\sum_{i=1}^n a_ib_i|\le\sqrt{(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2)}$. $a_i=\psi(\frac{X_i-\bar{X}_n}{\hat{\sigma}_X})-\bar{\psi}_X$, $b_i=\psi(\frac{Y_i-\bar{Y}_n}{\hat{\sigma}_Y})-\bar{\psi}_Y$ を上の不等式にあてはめる.

演習問題 8

問8.1　(1) $E(Y_{ij})=P(A_i)=p_i$

(2) $Y_{ij}Y_{i'j}=\begin{cases} Y_i & (i=i') \\ 0 & (i\ne i')\end{cases}$

(3) $\mathrm{Cov}(Y_{ij},Y_{i'j})=E(Y_{ij}Y_{i'j})-E(Y_{ij})E(Y_{i'j})=\begin{cases} E(Y_{ij})-p_i^2=p_i(1-p_i) & (i=i') \\ E(0)-p_ip_{i'} & (i\ne i')\end{cases}$

問8.2　(1) $E(N_i)=\sum_{j=1}^n E(Y_{ij})=np_i$

(2) $V(N_i)=\sum_{j=1}^n V(Y_{ij})=np_i(1-p_i)$

(3)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(N_i,N_{i'}) &= E(\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}\sum_{j'=1}^{n}Y_{i'j'})-n^2p_ip_{i'} \\
&= \sum_{j=1}^{n}E(Y_{ij}Y_{i'j})+n(n-1)p_ip_{i'}-n^2p_ip_{i'} \\
&= -np_ip_{i'}
\end{aligned}
$$

問8.3　問8.1で定義した Y_{ij} を使って $\boldsymbol{Y}_j\equiv {}^t(Y_{1j},\cdots,Y_{kj})$ とおくと, ${}^t(N_1,\cdots,N_k)=\sum_{j=1}^n\boldsymbol{Y}_j$ が成り立つ. 定理B.10と問8.1(3) により,

$$
\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{Y}_j-\boldsymbol{\pi}) \xrightarrow{\mathcal{L}} N_k(\boldsymbol{0},\boldsymbol{\Sigma}),
$$

ただし, $\boldsymbol{\pi}\equiv {}^t(\pi_1,\cdots,\pi_k)$, $\boldsymbol{\Sigma}\equiv\mathrm{diag}(\pi_1,\cdots,\pi_k)-\boldsymbol{\pi}{}^t\boldsymbol{\pi}$.

定理B.9 により,

$$
\sqrt{n}\cdot{}^t(\frac{N_1/n-\pi_1}{\pi_1},\cdots,\frac{N_k/n-\pi_k}{\pi_k}) \xrightarrow{\mathcal{L}} {}^t(V_1-\sum_{i=1}^{k}\pi_iV_i,\cdots,V_k-\sum_{i=1}^{k}\pi_iV_i),
$$

ただし, $V_i\sim N(0,\frac{1}{\pi_i})$ で, $V_1,\cdots,V_k$ は互いに独立. 定理3.8 より,

$$
T_i \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum_{i=1}^{k}\pi_i(V_i-\sum_{j=1}^{k}\pi_jV_j)^2\sim\chi^2_{k-1}
$$

問 8.4

$$\begin{aligned}&\sqrt{n}(\frac{N_{ij}}{n}-\frac{N_{i\cdot}N_{\cdot j}}{n^2})\\&\quad-\{\sqrt{n}(\frac{N_{ij}}{n}-p_{i\cdot}p_{\cdot j})-p_{i\cdot}\sqrt{n}(\frac{N_{\cdot j}}{n}-p_{\cdot j})-p_{\cdot j}\sqrt{n}(\frac{N_{i\cdot}}{n}-p_{i\cdot})\}\\&=-\sqrt{n}(\frac{N_{\cdot j}}{n}-p_{\cdot j})(\frac{N_{i\cdot}}{n}-p_{i\cdot})\end{aligned}$$

中心極限定理より, $\sqrt{n}(\frac{N_{\cdot j}}{n}-p_{\cdot j})$ は 正規分布に従い, 大数の法則より, $\frac{N_{i\cdot}}{n}-p_{i\cdot}\xrightarrow{P}0$. 定理 3.11(3) より結果が解る.

問 8.5 Y_{ijk} $(k=1,\cdots,n;i=1,\cdots,r;j=1,\cdots,c)$ を

$$Y_{ijk}=\begin{cases}1 & (X_k\in A_i\cap B_j)\\ 0 & (\text{ その他})\end{cases}$$

によって定義し, 問 8.1, 8.2 8.4 を使って, 問 8.3 と同様に示すことができる.

演習問題 9

問 9.1 系 3.8 より，$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X}_n)^2\sim\chi^2_{n-1}$. $E(\chi^2_{n-1})=n-1$. 故に, $E(\tilde{\sigma}_0^2)=\sigma^2\frac{E(\chi^2_{n-1})}{n}=\frac{n-1}{n}\sigma^2$.

問 9.2 系 3.8 より，$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2_{n_1-1}$，$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2\sim\chi^2_{n_2-1}$. 系 3.5 より，$\chi^2_{n_1-1}+\chi^2_{n_2-1}\sim\chi^2_{n-2}$.

問 9.3

$$\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X}_n+\bar{X}_n-\mu_0)^2=\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X}_n)^2+2(\bar{X}_n-\mu_0)\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X}_n)+n(\bar{X}_n-\mu_0)^2$$

$\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X}_n)=0$ より結果を得る.

問 9.4

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\tilde{\mu}^*)^2 &= \sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\tilde{\mu}_1+\tilde{\mu}_1-\tilde{\mu}^*)^2\\&= \sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\tilde{\mu}_1)^2+2(\bar{X}_n-\tilde{\mu}^*)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\tilde{\mu}_1)+\frac{n_1n_2^2}{n^2}(\bar{X}-\bar{Y})^2\\&= \sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\tilde{\mu}_1)^2+\frac{n_1n_2^2}{n^2}(\bar{X}-\bar{Y})^2\end{aligned}$$

同様に,

$$\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\tilde{\mu}^*)^2=\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\tilde{\mu}_2)^2+\frac{n_1^2n_2}{n^2}(\bar{X}-\bar{Y})^2$$

以上より結果を得る.

問 9.5　　$c_n = \frac{n_2(n+1)(n-1)}{12n_1}$, $d_n = \sqrt{n_2 n(n-2)}$.

問 9.6　　$c'_n = \sum_{i=1}^n \{\psi(\frac{x_{(i)}-\tilde{\mu}_0}{\hat{\sigma}_{0n}}) - \bar{\psi}.(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}^2$, $d'_n = \sqrt{n(n-1)}$.

問 9.7　　$\frac{\partial \ell_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu_1} = 0, \quad \frac{\partial \ell_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu_2} = 0,$
$\frac{\partial \ell_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_1} = 0, \quad \frac{\partial \ell_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_2} = 0, \quad \frac{\partial \ell_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \rho} = 0$ の連立方程式を解くことによって得られる.

問 9.8　　問 9.7 の結果と定義によって得られる.

問 9.9　　T_S は $\tilde{\rho}_{XY}$ の狭義増加関数. $\tilde{\rho}_{XY}$ で, X_i, Y_i のかわりにそれぞれ R_i, Q_i を代入すると,

$$\frac{T_R}{\sum_{i=1}^n (i - \frac{n+1}{2})^2}$$

これらにより, T_S で, X_i, Y_i のかわりにそれぞれ R_i, Q_i を代入したものは, T_R の狭義増加関数.

問 9.10　　$\ell_n(p_1, \cdots, p_{k-1}) \equiv \log\{\frac{n!}{N_1!N_2!\cdots N_k!} p_1^{N_1} p_2^{N_2} \cdots p_{k-1}^{N_{k-1}} (1 - p_1 - p_{k-1})^{N_k}\}$ とおき, 連立方程式 $\frac{\partial \ell_n(p_1,\cdots,p_{k-1})}{\partial p_i}$ 　$(i = 1, \cdots, k-1)$ を解くことによって得られる.