オブザーバを用いたPenduBotシステムの制御

M2021SC002 磯村真也
指導教員：坂本登

1　はじめに

多くの制御理論において，対象となるシステムの状態量はすべて観測できると仮定しているが，実システムにおいて状態量がすべて観測できないことが多い．そのため，制御器を実システムに実装するには，観測できない状態量を適切に推定する必要がある．最も基本的な推定器として，1964年Luenbergerによって提案された線形システムに対する推定理論[1]がある．この推定器は線形システムには非常に有効である．しかしながら，実システムの多くは非線形システムである場合が多く，これらのシステムには十分な効果を発揮しない．そのため，現在まで多くの非線形システムに対する推定理論の研究がなされてきた．

そのなかで近年，上野らによってシステム変数依存シルベスタ方程式 (System Variables Dependent Sylvester Equation:VDSE) オブザーバが提案された [2]．以後，VDSEオブザーバとする．VDSEオブザーバは，Luenbergerオブザーバを非線形に拡張したものである．Luenbergerオブザーバがシルベスタ方程式の解を用いるのと同様に，システム変数依存シルベスタ方程式の解を用いる手法となっている．システム変数依存シルベスタ方程式の解は，Wuらが提案したシルベスタ方程式の解法[3]を用いることで，代数演算のみで算出することが可能である．したがって，実装に関して適用は容易であり，計算量も少なくいため，処理能力の低い計算機にも適用することができる．

PenduBotは，劣駆動系システムである倒立振子の一種である．劣駆動系の制御はロボットや航空宇宙分野と応用範囲が広く，制御手法の検証において倒立振子はベンチマークとして用いられる．二つのリンクから構成され，モータに接続されたリンク（アーム）の先端に自由応答するリンク（振子）が接続されている．二つのリンクは同一平面上を回転する．このシステムは振子を不安定平衡点で安定化することを目的とする．

第65回自動制御連合講演会では，PenduBotの不安定平衡点における安定化制御に関するVDSEオブザーバの性能評価をまでを行った[4]．本稿では，PenduBotの振り上げ安定化問題を用いてVDSEオブザーバの性能評価を行う．振り上げ制御を実現するには非線形が支配的になる領域に関しても制御する必要がある．本研究において非線形制御器には，坂本氏らによって提案された安定多様体法[5]を用いた非線形最適制御器を用いる．

2　VDSEオブザーバ [2]

本章では，VDSEオブザーバに関して述べる．システム変数依存シルベスタ方程式は解法[3]により，解析的に説くことが可能であり，その解を用いることでオブザーバゲインを定めている．

2.1　対象のシステム

本節では，本章似て扱う連続時間非線形システムに関して述べる．

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = h(x) \end{cases} \tag{1}$$

ここでは，$x \in \mathbb{R}^n$ は状態，$u \in \mathbb{R}^l$ は入力，$y \in \mathbb{R}^m$ は観測出力を表している．$f(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$，$h(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は十分滑らかな関数とする．さらに，$x = 0$ をシステムの平衡点とし，$f(0,0) = 0$，$h(0) = 0$ とする．

[仮定1] システム (1) は，線形表現システムに変形できる．

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x,u)x + v(u) \\ y = H(x)x \end{cases} \tag{2}$$

ここでは，$F(x,u) \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$H(x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$v(\cdot) : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$ である．そのうえ，$F(x,u)$ と $H(x)$ は全ての $x \in \Omega$ について局所リプシッツ連続である．Ω は，原点近傍の空でない集合である．$n \geq 2$ の時，$F(x,u)$ と $H(x)$ は一意に定まらないが，次の関係を持つ [6]．

$$F(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), H(0) = \frac{\partial h}{\partial x}(0)$$

すなわち，$F(x,u)$ と $H(x)$ が一意に定まらずとも，$F(0,0)$ と $H(0)$ はそれぞれ，$f(x,u)$ と $h(x)$ の原点における線形化行列と一致する．

2.2　VDSEオブザーバの設計手法

本節では，VDSEオブザーバの設計法に関して述べる．前述したように，VDSEオブザーバはLuenbergerオブザーバを非線形に拡張したものである．Luenbergerのオブザーバ理論では，オブザーバ設計にはシルベスタ方程式が重要な役割を担っているのと同様に，VDSEオブザーバ理論においてもシステム変数依存シルベスタ方程式が重要な役割を担っている．そのため，Luenbergerオブザーバに非常に近い形で非線形に拡張することが可能である．システム変数依存シルベスタ方程式は解析的解法[3]により，代数計算にて容易に解を導出可能である．そのため，設計と実装が容易であるという特徴を持っている．

システム (2) について以下のようなVDSEを導入する．

$$X(x,u)F(x,u) = V(x)X(x,u) + W(x)H(x) \tag{3}$$

ここでは，$V(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$W(x) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ は設計パラメータである．任意の x，u に関して $V(x)$ が安定行列，$(V(x), W(x))$ が可制御となるように定める．文献 [3] のシルベスタ方程式の解析的解法により，VDSE(3) の解は代数演算にて算出できる．具体的な計算方法については

付録を参照されたい．VDSE の解を用いると，VDSE オブザーバは次のように定められる．

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}, u) + L(\hat{x}, u)(y - h(\hat{x})) \\
L(\hat{x}, u) &= X(\hat{x}, u)^{-1} W(\hat{x})
\end{aligned} \tag{4}
$$

システム (1) とオブザーバ (4) の誤差系は，仮定 1 の下で Ω において局所漸近安定であることが証明できる．詳細は文献 [7] を参照されたい．

3 PenduBot

本章では PenduBot に関してモデリングから状態方程式の導出まで述べる．本研究でシミュレーションで模擬する PenduBot は，歯車を介して DC モータに繋がれたアームとアームの先に繋がれた自由応答する振子から構成される．エンコーダは，DC モータに内蔵されているものと振子接続部に取り付けている．しかし，二つのエンコーダは角度しか観測できないため，状態量を使った制御を行うときには角速度を推定する必要がある．

3.1 モデリング

本節では，PenduBot のモデリングに関して述べる．PenduBot の概略図を図 1 に示す．ここで，PenduBot システムの各物理パラメータを表 1 に示す．運動方程式の導出過程は省く．

表 1 Parameter Set

記号	名称
m_1	アーム (actuated) の質量
m_2	振子 (unactuated) の質量
l_1	アーム (actuated) の長さ
l_2	振子 (unactuated) の長さ
l_{c1}	アームの回転中心から重心までの距離
l_{c2}	振子の回転中心から重心までの距離
J_1	アーム (actuated) の慣性モーメント
J_2	振子 (unactuated) の慣性モーメント
n	ギア比
R_a	電気子抵抗
K_e	逆起電力定数
K_t	トルク定数
b_1	アーム (actuated) の粘性摩擦
b_2	振子 (unactuated) の粘性摩擦
g	重力加速度
θ_1	アーム (actuated) の角度
θ_2	振子 (unactuated) の角度

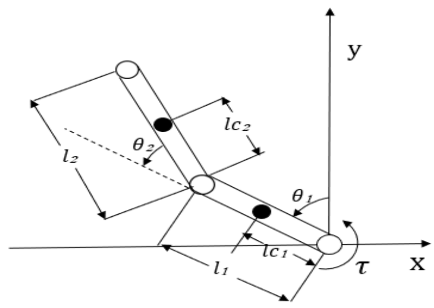

図 1 Model of PenduBot

運動方程式は以下の形式で表すことができる．

$$
\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \tag{5}
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
f_{11} &= r_1 + r_2 + 2r_3 \cos\theta_2 \\
f_{12} &= f_{21} = r_2 + r_3 \cos\theta_2, f_{22} = r_2 \\
M_1 &= (r_3\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 - t_a - b_1)\dot{\theta}_1 + (r_3\dot{\theta}_1 \sin\theta_2 + r_3\dot{\theta}_2 \\
&\quad + r_3\dot{\theta}_2 \sin\theta_2)\dot{\theta}_2 + r_4 \sin\theta_1 + r_5 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\
&\quad + t_b u \\
M_2 &= r_3\dot{\theta}_1^{\,2} \sin\theta_2 - b_2\dot{\theta}_2 + r_5 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\
r_1 &= m_1 l_{c1}^2 + J_1 + m_2 l_1^2, r_2 = m_2 l_{c2}^2 + J_2, \\
r_3 &= m_2 l_1 l_{c2}, r_4 = m_1 g l_{c1} + m_2 g l_1, r_5 = m_2 g l_{c2} \\
t_a &= \frac{n^2 K_e K_t}{R_a}, t_b = \frac{n K_t}{R_a}
\end{aligned} \tag{6}
$$

と置いた．

3.2 状態方程式

本節では，非線形状態方程式を導出する．システムの状態変数 $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^{\mathrm{T}} = [\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^{\mathrm{T}}$ とすると，PenduBot のシステムは以下のように表せる．

$$
\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \tag{7}
$$

ここでは，

$$
f(x, u) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{f_{22}M_1 - f_{12}M_2}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2} \\ \frac{f_{12}M_2 - f_{12}M_1}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2} \end{bmatrix}, h(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
$$

4 制御器・オブザーバ設計

本章では，振り上げ安定化制御器の設計と VDSE オブザーバの設計について述べる．

4.1 非線形最適制御器設計

本研究では，PenduBot の振り上げ安定化制御を想定している．そのため，安定多様体法理論に基づいて非線形最

適制御器を設計する手法を用い，非線形最適制御器を設計する．非線形最適制御器を設計するためには Hamilton-Jacobi 方程式を解く必要があるが，非線形方程式であるため解を得るのは困難である．そのため近似的な解を得る方法が研究されてきた．そのなかで，安定多様体法は安定多様体理論に基づいて Hamilton-Jacobi 方程式の近似解を得る手法であり，精度よく近似することができる．本稿では，VDSE オブザーバに焦点の当てているため，安定多様体法に関する詳細は文献 [8] を参照されたい．ただし，制御器設計に用いる重み行列 Q，R は以下の値とした．

$$Q = diag(5, 5, 0, 0),\ R = 1$$

4.2　VDSE オブザーバの設計

本節では，VDSE オブザーバの設計について述べる．モデリングにて導出した式 (7) を線形表現システム (2) に変形すると，

$$F(x,u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix}, v(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ここでは，

$$\begin{aligned}
D_1 &= r_1 + r_2 + 2r_2r_3\cos(x_2) - (r_2 + r_3\cos(x_2))^2 \\
f_{31} &= (r_2r_4\sin(x_1) - r_3r_5\cos(x_2)^2\sin(x_1))/(x_1D_1) \\
f_{32} &= (-r_3r_5\cos(x_2)\cos(x_1)\sin(x_2))/(x_2D_1) \\
f_{33} &= (2r_2r_3\dot{x_1}\dot{x_2}\sin(x_2) - r_2t_a\dot{x_1} \\
&\quad - r_2r_3\dot{x_1}^2\sin(x_2) \\
&\quad - r_3^2\dot{x_1}^2\cos(x_2)\sin(x_2))/(x_3D_1) \\
f_{34} &= (r_2r_3\dot{x_2}^2\sin(x_2) + r_2b_2\dot{x_2} \\
&\quad + r_3b_2\dot{x_2}\cos(x_2))/(x_4D_1) \\
f_{41} &= (r_1r_5\sin(x_1)\cos(x_2) \\
&\quad + r_3r_5\sin(x_1)\cos(x_2)^2 \\
&\quad - r_3r_4\sin(x_1)\cos(x_2) - r_2r_4\sin(x_1))/(x_1D_1) \\
f_{42} &= (r_1r_5\cos(x_1)\sin(x_2) \\
&\quad + r_3r_5\cos(x_1)\sin(x_2))/(x_2D_1) \\
f_{43} &= (r_1r_3\dot{x_1}^2\sin(x_2) + r_2r_3\dot{x_1}^2\sin(x_2) \\
&\quad - 2r_2r_3\dot{x_1}\dot{x_2}\sin(x_2)r_3^2\dot{x_1}\dot{x_2}\cos(x_2)\sin(x_1) \\
&\quad + r_3b_1\dot{x_1}\cos(x_2) - r_3^2\dot{x_1}\dot{x_2}\cos(x_2)\sin(x_2) \\
&\quad + 2r_3^2\dot{x_1}^2\sin(x_2) + r_3t_a\dot{x_1}\cos(x_2) \\
&\quad + r_2t_a\dot{x_1} + r_2b_1\dot{x_1})/(x_3D_1) \\
f_{44} &= (-r_1b_2\dot{x_2} - r_2b_2\dot{x_2} - 2r_3b_2\dot{x_2}\cos(x_2) \\
&\quad - r_2r_3\dot{x_2}^2\sin(x_2) - r_3^2\dot{x_2}^2\cos(x_2)\sin(x_2))/(x_4D_1) \\
v_3 &= r_2t_bu/D_1 \\
v_4 &= -(r_2 + r_3\cos(x_2))t_bu/D_1
\end{aligned}$$

としている．VDSE オブザーバの設計パラメータは次のように定めた．

$$V = \begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

これらを用いて表現されるシステム変数依存シルベスター方程式 (3) の解 X は，シルベスタ方程式の解法 [3] によって代数演算で求められる．よって，オブザーバゲイン L は次のようになる．

$$L(x,u) = X(x,u)^{-1}W(x)$$

PenduBot のシステムのオブザーバゲインはかなり長く，要旨には入らないため，省略する．以上より，対象のシステムの VDSE オブザーバは次のように定まった．

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + L(\hat{x}, u)(y - h(\hat{x}))$$

5　シミュレーション結果

本章では，前章にて設計した非線形最適制御器と VDSE オブザーバの併合系のシミュレーションを行う．本シミュレーションでは，初期値を $[x, \hat{x}]^{\mathrm{T}} = [-\pi, 0, 0, 0, -\pi, 0, 0, 0]^{\mathrm{T}}$ とした．図 2，3 にすべての状態量が観測できた時の理想的なシミュレーション結果と併合系によるシミュレーション結果の推定値の比較を示す．図 4 に各オブザーバによる，4 つの状態量の真値と推定値の二乗誤差の比較を示す．

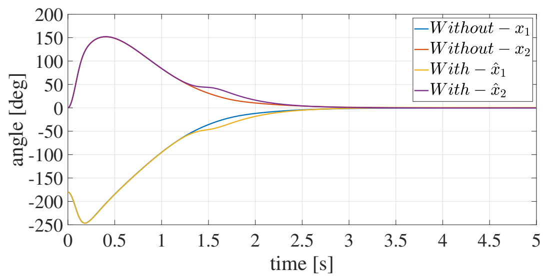

図 2　Simulation results with and without observer(angle)

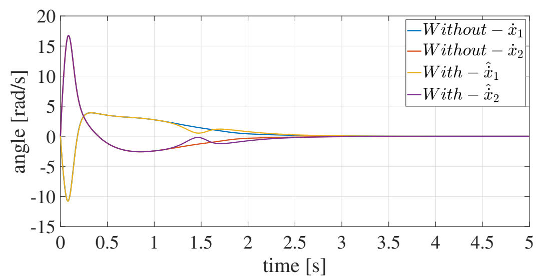

図 3　Simulation results with and without observer(angularvelocity)

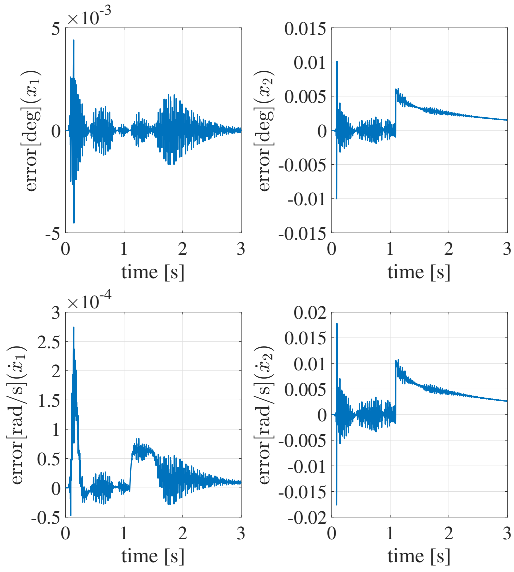

図 4 Error(True and Estimate) of Marged system

図 2，3 の推定値に注目すると，全ての状態量が 0 に収束しているため，振り上げ安定化制御を達成できている．1.5 秒あたりで理想的なシミュレーションと併合系のシミュレーションの乖離が確認できるが，そのほかの部分ではほぼ一致している．$\hat{\theta}_1$ に注目すると一度-方向に行ってから 0 に収束している．ここから，設計した制御則が二回振り上げ (一回助走をつけた振り上げ) 制御器であることがわかる．また図 4 より，併合系の真値と推定値の誤差は非常に小さい値をとっており，推定値の精度の高さが確認できる．以上より，非線形が支配的な領域に関して VDSE オブザーバは非常に有用であることが確認できた．

6 おわりに

本報告では，PenduBot システムに対して，VDSE オブザーバを導入した．そして，非線形最適制御と VDSE オブザーバの併合系にて振り上げ安定化制御にてシミュレーションを行った．結果，真値と推定値の誤差が非常に小さく，非線形性の強い領域での VDSE オブザーバの有効性が確認された．今後は，実機実験にて，VDSE オブザーバの性能評価をすることが挙げられる．

付録：シルベスタ方程式の解法 [3]

ここでは，シルベスタ方程式の解法について述べる．以下のシルベスタ方程式を考える．

$$XF = AX + BH$$

ここでは，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$B \in \mathbb{R}^{n\times r}$，$F \in \mathbb{R}^{p\times p}$ である．この時のシルベスタ方程式の解 X と H は次のような式で与えられる．

$$X = \sum_{i=0}^{n-1} R_i BZF^i, H = \sum_{i=0}^{n} q_i ZF^i = Zq(F)$$

ここでは，

$$R_i = \begin{cases} I & (i = n-1) \\ AR_{i+1} + q_{i+1}I & (i = 0, 1, \cdots, n-2) \end{cases}$$

$$q_i = \begin{cases} 1 & (i = n) \\ -\frac{tr(AR_i)}{i} & (i = 0, 1, \cdots, n-1) \end{cases}$$

であり，$Z \in \mathbb{R}^{r\times p}$ はフリーパラメータである．$\sigma(A) \cap \sigma(F) = \emptyset$ であれば，$q(F)^{-1}$ が存在することになり，$H \in \mathbb{R}^{r\times p}$ を与えることによって，$Z = Hq(F)^{-1}$ を導出できる．したがって，X は一意に定まる．

参考文献

[1] D.G.Luenberger. Observing the State of a Linear System. *IEEE Trans. Military Electronics*, 8(2), 74–80, (1964).

[2] K. Ueno and N. Sakamoto. A Nonlinear Observer via System Variables Dependent Sylvester Equation Approach with Applications. 21*st Mathematical Theory of Network and Systems*, 2014.

[3] A.G.Wu, R.Duan, and B.Zhou. Solution to generalized Sylvester matrix equations. *IEEE Trans. Automat. Control*, 53(3), 811–815, (2008).

[4] 磯村 真也，坂本 登，中島 明. メカニカルシステムにおける VDSE オブザーバの評価ー PenduBot を用いたケーススタディー. 第 65 回自動制御連合講演会論文集 (2022).

[5] N.Sakamoto and A.J.van der Schaft. Analytical Approximation Methods for the Stabilizing Solution of the Hamilton-Jacobi Equation. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 53(10), 2335–2350, (2008).

[6] H.T.Banks, B.M.Lewis, and H.T.Tran. Nonlinear feedback controllers and compensators:a state dependent Riccati equation approach. *Computational Optimization and Applications*, 37(2), 177–218, (2007).

[7] 上野 晃司, 坂本 登, 鈴木 雅康, 小口 俊樹. 状態依存シルベスタ方程式を用いた非線形オブザーバの提案. 計測自動制御学会論文集, 50(3):219–226, (2014).

[8] 坂本 登. 非線形最適制御とその実用化への取り組み. 計測と制御, 61(2), 139–145, (2022).