引き分けを考慮したBradley-Terryモデルの検証

M2021SS003 北野雄也
指導教員：松田眞一

1　はじめに

私はスポーツの試合を観戦することに大変興味がある．スポーツの多くは 2 人や 2 チームが対戦し,「勝ち」,「負け」が存在する「勝負」であり，一般的には勝つ確率が高い者やチームが強いと評価される．しかし，実際は，勝つ確率の高い者が勝つ確率の低い者に必ず勝つとは限らない．勝つ確率の高い者が勝つ確率の低い者に負けることもある．これは勝負の醍醐味でもある．Bradley-Terry モデルとはそういった勝負における対象の「強さ」を決めることができる．私は Bradley-Terry モデルに興味を持ち，Bradley-Terry モデルに関する研究をすることに決めた．

本研究では引き分けを考慮したモデルにおいて，対象のデータに対してモデルが成立しているかどうかの検証を行い，その検証の流れを確立することを目的とする．

2　先行研究

まず，検証の流れの作成に関わる 2 つの先行研究について説明する．松田 [3] では,「勝ち」と「負け」のみから対象の「強さ」を推定していた Bradley-Terry モデルに「引き分け」も考慮するモデルへと改良した．今井・松田 [2] では，その引き分けを考慮したモデルの R のプログラムを作成し，性能評価を行った．本研究においてもそのプログラムを用いて，対象の強さやパラメータの値を求める．

また，Bradley-Terry モデルを用いた研究としては平手 [1] と坂巻 [5] が挙げられる．これらの研究は対象に対して区分でまとめることを用いた研究である．平手 [1] は改良前のモデル，坂巻 [5] は改良後のモデルを用いて分析をしている．

引き分けを考慮していない元の Bradley-Terry モデルにおいては対象のデータに対してモデルが成立しているかどうかの検証が行われている.（竹内・藤野 [6] 参照）

しかし，前述した検証の流れの作成に関わる 2 つの先行研究においてはその検証が行われていない．そこで，本研究においては「引き分けを考慮した Bradley-Terry モデル」について，対象のデータに対してモデルが成立しているかどうかの検証を行う．その検証には勝ちと負けのみの元のモデルにおける検証を尤度比検定で行っている竹内・藤野 [6] を参考にして，尤度比検定で行う．

また，先行研究ではサッカーのデータを用いていたが，本研究においては野球のデータを用いる．

3　Bradley-Terry モデル

本節では竹内・藤野 [6] に基づく Bradley-Terry モデルと松田 [3] に基づく引き分けを考慮した Bradley-Terry モデルがどのようなモデルであるかを説明する．

3.1　「勝ち」と「負け」のみの Bradley-Terry モデル

m チームの間で何度か試合を行うとする．そのとき，チーム i がチーム j に勝つ確率を以下のように表す．

$$p_{ij}\ (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \cdots, m)$$

引き分けはないものとする．このとき，以下の式が成り立つ．

$$p_{ij} + p_{ji} = 1\ (i \neq j)$$

そして，各チームに対して m 個の量 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_m$ が存在するとし，すべての i，j の組み合わせに対して，以下のように p_{ij} を想定する。

$$p_{ij} = \frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j}\ (i \neq j) \tag{1}$$

このとき，π_i はチーム i の「強さ」と解釈できる.（竹内・藤野 [6] 参照）

3.2　「引き分け」を考慮した Bradley-Terry モデル

m チームの間で何度か試合を行うとする．そのとき，チーム i がチーム j に勝つ確率，負ける確率，引き分ける確率をそれぞれ，p_{ij}，q_{ij}，r_{ij} とする．このとき，以下のような式が成り立つ．

$$p_{ij} + q_{ij} + r_{ij} = 1, p_{ij} = q_{ji}, r_{ij} = r_{ji}$$

「勝ち」と「負け」のみの Bradley-Terry モデルの場合と同様に，各チームの強さを π_i として，以下のように p_{ij} を表す．

$$p_{ij} = \frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j} \cdot (1 - r_{ij})$$

ここで,「引き分け」については次の式のように 2 つのパラメータに依存するモデルと考える．

$$r_{ij} = \alpha - \beta \left(\frac{\pi_i - \pi_j}{\pi_i + \pi_j}\right)^2$$

この式の解釈としては，対象の 2 つのチームが引き分ける確率は 2 つのチームの強さに依存して決まると考える.（松田 [3] 参照）

4　「三すくみ」とモデルの意味

ここでは，まず,「三すくみ」と呼ばれる状態を説明する.（竹内・藤野 [6] 参照）それを踏まえた上で，モデルの意味について，引き分けを考慮していない元のモデルの場合で深く説明する.（竹内・藤野 [6] 参照）

4.1 「三すくみ」とは

まず，p_{ij} の前提条件について説明する．対戦結果から「強さ」を求めることを考える前に，確率から「強さ」を一義的に定められることが必要であるが，これについて説明をする．例えば，チーム 1，チーム 2，チーム 3 について，それぞれの確率 p_{12}，p_{13}，p_{21}，p_{23}，p_{31}，p_{32} が以下のようなときを考える．

$$p_{12} < \frac{1}{2} < p_{21}, p_{23} < \frac{1}{2} < p_{32}, p_{31} < \frac{1}{2} < p_{13}$$

このとき，チーム 2 がチーム 1 より強く，チーム 3 がチーム 2 より強く，チーム 1 がチーム 3 より強い．この状況では 3 つのチームの強さの順序が簡単に決められない．この状況を「三すくみ」の状態と呼ぶ．

4.2 モデルの意味

まず，チーム i とチーム j の「勝負」を決めるのに，直接対決ではなく，別のチーム k との対戦結果で決めるとする．3 つのチーム i，チーム j，チーム k の間に「カモ・苦手」の関係がないとき，p_{ij} は以下のように表せる．

$$p_{ij} = \frac{p_{ik}p_{kj}}{p_{ik}p_{kj} + p_{ki}p_{jk}}$$

これは以下のように書き直せる．

$$\frac{p_{ij}}{p_{ji}} = \frac{p_{ik}p_{kj}}{p_{ki}p_{jk}} \tag{2}$$

式 (2) が成り立つとき，式 (1) を満たす $\boldsymbol{\pi}$ が存在することを示すことができる．そして，これは以下のように書き直せる．

$$p_{ij}p_{jk}p_{ki} = p_{ji}p_{ik}p_{kj}$$

この式は「三すくみ」の状態が存在しないことを意味する．

5 尤度比検定による検証の流れ

本研究における本題である「検証」の流れを説明する．ここで言う「検証」とは，対象のデータに対して Bradley-Terry モデルが成立しているかどうかを調べることを意味する．

まず，竹内・藤野 [6] において行われた，引き分けを考慮しない元の Bradley-Terry モデルにおける検証の流れを説明する．そこでは尤度比検定でその検証が行われている．その後で，本研究において新たに考案した，引き分けを考慮した Bradley-Terry モデルにおける検証の流れを説明する．その考案に際しては竹内・藤野 [6] の元のモデルの場合の検証を参考にした．引き分けを考慮したモデルの場合も尤度比検定を用いて検証を行う．

5.1 引き分けを考慮しない Bradley-Terry モデルにおける検証の流れ

竹内・藤野 [6] においては尤度比検定により検証が行われた．その検証の流れを説明する前に，まず，モデルに関する分布の設定から行い，尤度を求めて対数尤度を求めるという流れを説明する．その後で，対数尤度の最大値を，制約のある場合と制約のない場合のそれぞれで求め，尤度比検定を行う．ここで言う「制約のある場合」,「制約のない場合」は確率 p_{ij} に制約を付ける，つまり，式 (1) または式 (2) の成立の制約を付ける帰無仮説の場合と，確率 p_{ij} に何も制約を付けない場合を意味する．

m チームの間で何度か試合を行うとする．チーム i とチーム j の対戦の試合数を n_{ij}（$= n_{ji}$）として，チーム i のチーム j に対する勝数を以下のような確率変数で表す．

$$X_{ij}\ (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \cdots, m)$$

このとき，引き分けがないことから以下の式が成り立つ．

$$X_{ij} + X_{ji} = n_{ij}\ (i \neq j)$$

ここで，X_{ij} が 2 項分布 $B(n_{ij}, p_{ij})$ に従うものとすると以下のようになる．

$$Pr\{X_{ij} = x_{ij}\} = \frac{n_{ij}!}{x_{ij}!x_{ji}!} p_{ij}^{x_{ij}} p_{ji}^{x_{ji}}\ (x_{ij} = 0, 1, \cdots, n_{ij})$$

ここで $x_{ji} = n_{ij} - x_{ij}$ である．よって，それらの同時確率は以下のようになる．

$$Pr\{X_{ij} = x_{ij};\ i \neq j;\ i, j = 1, 2, \cdots, m\} = \prod\prod_{i<j} \left(\frac{n_{ij}!}{x_{ij}!x_{ji}!} p_{ij}^{x_{ij}} p_{ji}^{x_{ji}} \right)$$

制約のある場合の対数尤度の最大値を l_1 とすると，最尤推定量 $\hat{\pi}_i$ を用いて以下のように表せる．

$$l_1 = \sum_{i=1}^{m} T_i \log \hat{\pi}_i - \sum\sum_{i<j} n_{ij} \log(\hat{\pi}_i + \hat{\pi}_j) + const.$$

制約のない場合の対数尤度の最大値を l_0 とすると，最尤推定量 $\hat{p}_{ij} = \frac{X_{ij}}{n_{ij}}\ (i \neq j)$ を用いて以下のように表せる．

$$l_0 = \sum\sum_{i \neq j} X_{ij} \log X_{ij} - \sum\sum_{i<j} n_{ij} \log n_{ij} + const.$$

したがって，対数尤度比検定統計量が以下のように表せる．

$$-2 \log \lambda = 2(l_0 - l_1)$$

これは n_{ij} がすべて大きい場合に仮説が正しいとき，尤度比検定の一般論から近似的に以下の自由度 ν の χ^2 乗分布に従う．

$$\nu = \frac{m(m-1)}{2} - (m-1) = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

この検定の流れによって，対象のデータに対して Bradley-Terry モデルが成立しているかどうかを調べることができる.（竹内・藤野 [6] 参照）

5.2 引き分けを考慮した Bradley-Terry モデルにおける検証の流れ

元のモデルの場合と同様に，まず初めに，モデルの分布の設定から行い，尤度を求めて対数尤度を求めるとい

う流れを説明する．そして，対数尤度の最大値を，制約のある帰無仮説の場合と制約のない場合のそれぞれで求め，尤度比検定を行う．

チーム i とチーム j の対戦が n_{ij} 回行われたとする．そして，チーム i が勝つ回数の確率変数を X_{ij}，負ける回数の確率変数を Y_{ij}，引き分ける回数の確率変数を Z_{ij} とする．このとき，それらは多項分布に従っていると考えられ，次のような確率分布が定まる．

$$
\begin{aligned}
&Pr\{X_{ij}=x_{ij}, Y_{ij}=y_{ij}, Z_{ij}=z_{ij};\ 1\leq i<j\leq m\}\\
&\qquad=\prod\prod_{i<j}\frac{n_{ij}!}{x_{ij}!y_{ij}!z_{ij}!}p_{ij}^{x_{ij}}q_{ij}^{y_{ij}}r_{ij}^{z_{ij}}
\end{aligned}
$$

（今井・松田 [2] 参照）

この確率を L_d とすると，引き分けを考慮した Bradley-Terry モデルの下では以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
L_d=\prod\prod_{i<j}&\frac{n_{ij}!}{X_{ij}!Y_{ij}!Z_{ij}!}\left(\frac{\pi_i}{\pi_i+\pi_j}\right)^{X_{ij}}\left(\frac{\pi_j}{\pi_i+\pi_j}\right)^{X_{ji}}\\
&\cdot\left(1+\beta\left(\frac{\pi_i-\pi_j}{\pi_i+\pi_j}\right)^2-\alpha\right)^{X_{ij}+X_{ji}}\\
&\cdot\left(\alpha-\beta\left(\frac{\pi_i-\pi_j}{\pi_i+\pi_j}\right)^2\right)^{Z_{ij}}
\end{aligned}
$$

これに対して，両辺の対数を取り l_d とおくと，以下のようになる．計算で変化しない定数項を $const.$ とおく．

$$
\begin{aligned}
l_d&=\log L_d\\
&=const.+\sum_{i=1}^{m}T_i\log\pi_i\\
&\quad-\sum\sum_{i<j}(n_{ij}-Z_{ij})\log(\pi_i+\pi_j)\\
&\quad+\sum\sum_{i<j}(n_{ij}-Z_{ij})\log\left(1+\beta\left(\frac{\pi_i-\pi_j}{\pi_i+\pi_j}\right)^2-\alpha\right)\\
&\quad+\sum\sum_{i<j}Z_{ij}\log\left(\alpha-\beta\left(\frac{\pi_i-\pi_j}{\pi_i+\pi_j}\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

ただし，T_i はチーム i の勝数の合計であり，以下で表わされる．

$$
T_i=\sum_{j\neq i}X_{ij}
$$

（松田 [3] 参照）

制約のある場合の対数尤度の最大値を l_{d1} とすると，最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{\pi}}$，$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ を用いて以下のように表せる．

$$
\begin{aligned}
l_{d1}&=const+\sum_{i=1}^{m}T_i\log\hat{\pi}_i\\
&\quad-\sum\sum_{i<j}(n_{ij}-Z_{ij})\log(\hat{\pi}_i+\hat{\pi}_j)\\
&\quad+\sum\sum_{i<j}(n_{ij}-Z_{ij})\log\left(1+\hat{\beta}\left(\frac{\hat{\pi}_i-\hat{\pi}_j}{\hat{\pi}_i+\hat{\pi}_j}\right)^2-\hat{\alpha}\right)\\
&\quad+\sum\sum_{i<j}Z_{ij}\log\left(\hat{\alpha}-\hat{\beta}\left(\frac{\hat{\pi}_i-\hat{\pi}_j}{\hat{\pi}_i+\hat{\pi}_j}\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

表 1 解析結果 3

球団名	強さ
オリックス	55.83
千葉ロッテ	58.97
楽天	51.68
ソフトバンク	51.33
日本ハム	42.72
西武	39.44

制約のない場合の対数尤度の最大値 l_{d0} とすると，最尤推定量 $\hat{p}_{ij}=\frac{X_{ij}}{n_{ij}}\ (i\neq j)$,$\hat{q}_{ij}=\frac{Y_{ij}}{n_{ij}}\ (i\neq j)$,$\hat{r}_{ij}=\frac{Z_{ij}}{n_{ij}}\ (i\neq j)$ を用いて以下のように表せる．

$$
\begin{aligned}
l_{d0}=const.&+\sum\sum_{i<j}X_{ij}\log X_{ij}+\sum\sum_{i<j}Y_{ij}\log Y_{ij}\\
&+\sum\sum_{i<j}Z_{ij}\log Z_{ij}-\sum\sum_{i<j}n_{ij}\log n_{ij}
\end{aligned}
$$

したがって，対数尤度比検定統計量が以下のように表せる．

$$
-2\log\lambda=2(l_{d0}-l_{d1})
$$

これは n_{ij} がすべて大きい場合に仮説が正しいとき，尤度比検定の一般論から近似的に以下の自由度 ν の χ^2 乗分布に従う．

$$
\nu=m(m-1)-\{(m-1)+2\}=(m-1)^2-2
$$

この検定の流れによって，対象のデータに対して引き分けを考慮した Bradley-Terry モデルが成立しているかどうかを調べることができる．

6 データ解析

作成した引き分けを考慮した Bradley-Terry モデルの検証の流れに，実際のデータを用いる．まず，検証の流れについて各数値を求められるプログラムを作成し，実際のデータを用いて検証を行う．ただし，Bradley-Terry モデルによる強さや α，β の値を出すのには今井・松田 [2] で作成されたプログラムを利用する．データには一般社団法人日本野球機構 [4] から 2021 年度のパ・リーグの勝敗記録のデータを使用する．ただし，交流戦のデータを含まない．

7 解析の結果

まず，データに対して今井・松田 [2] で作成された Bradley-Terry モデルのプログラムを用いると，表 1，2 に示すような結果となった．表 1 は各球団の強さをその年度の順位の順番に示したものであり，表 2 は α と β の値を示したものである．

表 1 を見ると，各球団の強さはおおよそ順位の順番の通りに並んだことが分かる．ただし，順位の順番とは異なる結果となる箇所もあった．それは，1 位のオリックス・バッファローズと 2 位の千葉ロッテマリーンズであ

表 2 解析結果 4

α	β
0.133	-0.004

る．強さの値が順位の順番とは異なり逆転している．α と β の値は α の値が正，β の値が負となった．

これらの値も用いて本研究で作成した検証の流れにデータを適用していく．プログラムを用いた結果は式で表すと以下のように求まった.（小数点以下第 2 位までを表示.）

$$
\begin{aligned}
-2\log\lambda &= 2(l_{d0} - l_{d1}) \\
&= 2\{(-360.22) - (-370.57)\} \\
&= 20.70
\end{aligned}
$$

また，これはモデルが正しいならば以下の自由度 ν の χ^2 乗分布に従う．

$$\nu = (6-1)^2 - 2 = 23$$

ここで，自由度 23 の χ^2 乗分布の上側 5 %点は 35.17 である．よって，検定の結果としては「帰無仮説は棄却されない」となる．この検証の検定における帰無仮説は「対象のデータに対して，モデルが成立していること」であるから，検証結果としては，データに対してモデルが成立しているとなる．よって，今回の検証では対象データに対してモデルが成立していることが得られた．

8 まとめ

まず，Bradley-Terry モデルについて，引き分けを考慮したモデルの場合における検証の流れを作成することができた．これを利用することで，対象のデータに対して，モデルが成立しているかどうかを調べることができる．

そして，本研究で作成した，引き分けを考慮した Bradley-Terry モデルの検証の流れに実際のデータを適用することができた．検証の流れの作成に加えて，その検証の流れに実際のデータを適用したとき，どのように検証されて検証結果が得られるかを実際の数値を使って確認することができた．本研究で作成されたプログラムを用いることで対数尤度比検定量を求めることができ，容易に，対象のデータに対してモデルが成立しているかどうかを調べることができる．

9 考察

考察することが 2 つある．

1 つ目は，作成した検証の流れへの実際のデータの適用において使用したデータについてである．作成した検証の流れへのデータの適用には 2021 年度のパ・リーグの勝敗記録のデータを用いて分析した．

セ・パ両リーグのデータではなく，パ・リーグのみのデータを用いたのには理由がある．セ・リーグの勝敗記録のデータには引き分けに 0 を含んでいたからである．勝敗記録のデータに 0 が含まれると，検証の流れの尤度比検定を行う際に検定量を算出することができない．つまり，この検証の流れを行うには勝敗記録のデータに 0 が含まれないことが必要である．この問題については解決する必要があるが，本研究では課題として残す形となった．

2 つ目は，本研究で作成した検証の流れにおける，考えられる問題点についてである．

今回の検証においては棄却されないという結果になったが，もし，棄却された場合，どのような要因で棄却されたのかが 1 つに決まらないという点である．引き分けを考慮しない元の Bradley-Terry モデルの場合は棄却されないとき,「三すくみ」の状態が存在することが要因として挙げられる．しかし，引き分けを考慮したモデルの場合はその要因で棄却されることに加えて，引き分けに関することで棄却されていることが考えられる．

これは今回の実際のデータを用いた解析においては問題とはならなかったが，他のデータを用いて棄却された場合に考えられる問題点として挙げられる．この問題については「三すくみ」の状態の存在の確認や，対象のデータから引き分けを除いて，引き分けを考慮しないモデルで考えて，検証を行い，その検証結果から「三すくみ」の存在から棄却されたかどうかを確かめるといった方法が考えられる．

10 おわりに

本研究により，引き分けを考慮した Bradley-Terry モデルを用いて分析するときに，対象データに対してモデルが成立しているかどうかを調べることができるようになった．

そして，多くのスポーツにおいて「引き分け」が存在することから今井・松田 [2] で改良された引き分けを考慮したモデルは汎用性を広げたと考えられる．

この引き分けを考慮したモデルを利用する際には是非，本研究で作成された検証の流れを用いて，対象データに対してモデルが成立しているかどうかを調べて欲しい．

参考文献

[1] 平手良典：サッカーにおける Bradley-Terry モデルの適用法の研究．南山大学大学院数理情報研究科修士論文，2013.

[2] 今井寛・松田眞一：引き分けを考慮した BT モデルの性能評価．南山大学紀要『アカデミア』理工学編，**3**，35-45，2003.

[3] 松田眞一：Bradley-Terry モデルの改良．南山大学紀要『アカデミア』理工学編，**2**，1-7，2002.

[4] （一般社団法人）日本野球機構：NPB.jp 日本野球機構，https://npb.jp/ ，2022 年 9 月閲覧.

[5] 坂巻翔太：引き分けを考慮した Bradley-Terry モデルの適用法の研究．南山大学大学院数理情報研究科修士論文，2014.

[6] 竹内啓・藤野和建：応用統計数学シリーズ『スポーツの数理科学　もっと楽しむための数字の読み方』．共立出版，1988.