# 2 変数の非直接推論の標準形

M2020SS008 芳野美奈

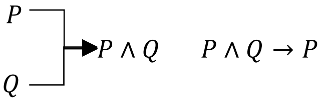
指導教員: 佐々木克巳

## 1　はじめに

Gentzen [1]が導入した古典命題論理の自然演繹体系には, 一時的な仮定をもつ推論規則が 3 つある. すなわち, (→導入規則), (∨除去規則), (背理法)である. これらの推論規則は, (∧導入規則)や(∧除去規則)などの一時的な仮定をもたない推論規則と比べ難しいと捉えられることがある. その 1 つの理由に, 一時的な仮定をもたない推論規則がその筋道を論理式の木で表現できるのに対し, 一時的な仮定をもつ推論規則はそれができないことが挙げられる. たとえば,

$$\frac{P \quad Q}{P \wedge Q}(\wedge\text{導入規則}) \qquad \frac{P \wedge Q}{P}(\wedge\text{除去規則})$$

は



のように, その筋道を論理式の木で表現できるのに対し,

$$\begin{array}{c}[\neg P]\\ \dfrac{\perp}{P}\end{array} \ (\text{背理法})$$

は表現できない.

佐々木[3]は, 一時的な仮定をもつ推論規則ともたない推論規則を区別するシークエント体系 $\vdash_S$を導入した. すなわち, $\vdash_S$では一時的な仮定をもたない推論規則は証明できるが, その仮定をもつ推論規則は証明できない. 本研究では, $\vdash_S$で証明可能な推論を直接推論, 証明不可能な推論を非直接推論と呼ぶことにする.

本研究の目的は, 非直接推論のうち, 2 変数で表現できるものの導出関係を明らかにすることである. 具体的には, 2 変数の基本シークエントを定義し, どのシークエントもどれかの基本シークエントの集合と体系 $\vdash_S$で同値になることを示す. そして, その結果を用いて, 2 変数の非直接推論の種類を標準形の形で明らかにする.

本稿では, 以下の 2 節で, $\vdash_S$を導入しその性質を紹介する. 3 節で 1 変数の非直接推論について, 4 節で 2 変数の非直接推論について述べる.

## 2　体系 $\vdash_S$

この節では, [3]にしたがって体系 $\vdash_S$を導入し, [3]で示された完全性定理を紹介する. 論理式は, 命題変数と⊥(矛盾)から論理記号∧(かつ), ∨(または), →(ならば), ¬(でない)を用いて, ふつうの方法で定義する. 命題変数を表すのに, $p, q, p_1, p_2, \cdots$などを, 論理式を表すのに, $P, Q, P_1, P_2, \cdots$などを, 論理式の有限集合を表すのに, $\Gamma$, $\Sigma$, $\Gamma_1$, $\Gamma_2, \cdots$などを用いる. 論理式全体の集合をWFFと表す. また, 論理記号の結合の強さを, ¬ が最も強く, →が最も弱く結合すると約束し, この約束からわかる結合の順序を示す括弧を省略できるものとする.

表現

$$\Gamma \Rightarrow P$$

をシークエントという, $\Gamma$をこのシークエントの左辺, Pを右辺という. シークエントを表すのに$\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots$などを, シークエントの集合を表すのに, $\mathrm{T}, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \ldots$などを用いる. また, シークエント

$$\{P_1, \cdots, P_m\} \cup \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_n \Rightarrow Q$$

を

$$P_1, \cdots, P_m, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_n \Rightarrow Q$$

と表現してもよいことにする.

体系 $\vdash_S$はこのシークエントを基本単位として定義するが, まずは, 自然演繹の体系をシークエントを基本単位として書き換えた体系 $\vdash_G$を導入する.

**定義 2.1.** $T$から$X$を導く$\vdash_G$の証明図を, 次の公理と推論規則により定義する.
公理: $P \Rightarrow P$および$T$の要素
推論規則: 図 2.1 に示す.

$$\frac{P, Q, \Gamma \Rightarrow R}{P \wedge Q, \Gamma \Rightarrow R}(\wedge\text{左}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow P \quad \Gamma \Rightarrow Q}{\Gamma \Rightarrow P \wedge Q}(\wedge\text{右})$$

$$\frac{P, \Gamma \Rightarrow R \quad Q, \Gamma \Rightarrow R}{P \vee Q, \Gamma \Rightarrow R}(\vee\text{左}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow P_i}{\Gamma \Rightarrow P_1 \vee P_2}(\vee\text{右}) \quad (i = 1, 2)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow P \quad Q, \Gamma \Rightarrow R}{P \to Q, \Gamma \Rightarrow R}(\to\text{左}) \qquad \frac{P, \Gamma \Rightarrow Q}{\Gamma \Rightarrow P \to Q}(\to\text{右})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow P}{\neg P, \Gamma \Rightarrow \perp}(\neg\text{左}) \qquad \frac{P, \Gamma \Rightarrow \perp}{\Gamma \Rightarrow \neg P}(\neg\text{右})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow Q}{P, \Gamma \Rightarrow Q}(\text{w 左}) \qquad \frac{\neg P, \Gamma \Rightarrow \perp}{\Gamma \Rightarrow P}(\text{RAA})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow P \quad P, \Gamma \Rightarrow Q}{\Gamma \Rightarrow Q}(\text{cut})$$

図 2.1: $\vdash_G$の推論規則

$T$から$X$を導く$\vdash_G$の証明図が存在するとき, $T \vdash X$は$\vdash_G$で証明可能であるといい, $T \vdash_G X$と表す. とくに, $T = \emptyset$のときは, $X$は$\vdash_G$で証明可能であるといい, $\vdash_G X$ と表す. 体系 $\vdash_S$は次のように定義する.

**定義 2.2.** $T$から$X$を導く$\vdash_S$の証明図を, 次の公理と推論規則により定義する.
公理: $\vdash_G$で証明可能なシークエントおよび$T$の要素
推論規則: (cut),(w 左)

$T$から$X$を導く$\vdash_S$の証明図が存在するとき，$T \vdash X$は$\vdash_S$で証明可能であるといい，$T \vdash_S X$と表す．とくに，$T = \emptyset$のときは，$X$は$\vdash_S$で証明可能であるといい，$\vdash_S X$と表す．

体系$\vdash_S$の完全性は，古典命題論理の意味づけに用いられるふつうの付値関数を拡張した付値関数を利用する．ふつうの付値関数は次のとおりである．

**定義 2.3.** 次の 5 条件を満たす関数$v$：WFF $\rightarrow$ $\{\mathrm{t}, \mathrm{f}\}$を付値関数という．

(1)$v(\perp) = \mathrm{f}$

(2)$v(P \wedge Q) = \mathrm{t} \Leftrightarrow v(P) = v(Q) = \mathrm{t}$

(3)$v(P \vee Q) = \mathrm{f} \Leftrightarrow v(P) = v(Q) = \mathrm{f}$

(4)$v(P \rightarrow Q) = \mathrm{f} \Leftrightarrow v(P) = \mathrm{t}$かつ$v(Q) = \mathrm{f}$

(5)$v(\neg P) = \mathrm{t} \Leftrightarrow v(P) = \mathrm{f}$

付値関数を表すのに，$v, v_1, v_2, \cdots$などを用いる．[3]は，この付値関数を次のように拡張した．

**定義 2.4.** 付値関数の集合$V$に対して，関数$V$：WFF $\rightarrow$ $\{\mathrm{t}, \mathrm{f}\}$を次のように定義する．

$V(P) = \mathrm{t} \Leftrightarrow$ すべての$v \in V$に対して，$v(P) = \mathrm{t}$

この関数（または付値関数の集合）を表すのに，$V, V_1, V_2, \cdots$などを用いる．この$V$は$\Gamma, X, T, T \vdash X$に対しても，次のように用いる．

(1)$V(\Gamma) = \mathrm{t} \Leftrightarrow$ すべての$P \in \Gamma$に対して，$V(P) = \mathrm{t}$

(2)$V(\Gamma \Rightarrow P) = \mathrm{t} \Leftrightarrow V(\Gamma) = \mathrm{t}$ならば$V(P) = \mathrm{t}$

(3)$V(T) = \mathrm{t} \Leftrightarrow$ すべての$X \in T$に対して，$V(X) = \mathrm{t}$

(4)$V(T \vdash X) = \mathrm{t} \Leftrightarrow V(T) = \mathrm{t}$ならば$V(X) = \mathrm{t}$

**補助定理 2.5**(完全性 [3]).

$T \vdash_S X \Leftrightarrow$すべての$V$に対して，$V(T \vdash X) = \mathrm{t}$

1節の最初に述べた(→導入規則)，(∨除去規則)，(背理法)に対応する非直接推論が，$\vdash_S$で証明不可能であることは，次の補助定理から示される．

**補助定理 2.6**([3]).

(1)$\{p \Rightarrow q\} \nvdash_S \Rightarrow p \rightarrow q$

(2)$\{p \Rightarrow r, q \Rightarrow r\} \nvdash_S \Rightarrow p \vee q \Rightarrow r$

(3)$\{\neg p \Rightarrow \perp\} \nvdash_S \Rightarrow p$

**定義 2.7.**

(1)条件

任意の$V$に対して，$V(X) = V(Y)$

を満たすとき，$X$と$Y$は同値であるといい，$X \sim Y$と表す．

(2)条件

任意のVに対して，$V(T_1 \vdash X_1) = V(T_2 \vdash X_2)$

を満たすとき，$(T_1 \vdash X_1)$と$(T_2 \vdash X_2)$は同値であるという．

**系 2.8.**

(1)$X \sim Y$のとき，$\vdash_S X \Leftrightarrow \vdash_S Y$である．

(2)$T_1 \vdash X_1$と$T_2 \vdash X_2$が同値のとき，$T_1 \vdash_S X_1 \Leftrightarrow T_2 \vdash_S X_2$である．

## 3 1 変数の場合

この節では，1変数の非直接推論の導出関係を示す．まず，$p$以外の命題変数が表れない$T$と$X$に対して，$T \vdash X$は，7 つの推論

$\mathrm{I}_1: \vdash \Rightarrow \perp$

$\mathrm{I}_2: \vdash \Rightarrow p$

$\mathrm{I}_3: \vdash \Rightarrow \neg p$

$\mathrm{I}_4: \vdash p \Rightarrow \perp$

$\mathrm{I}_5: \vdash \neg p \Rightarrow \perp$

$\mathrm{I}_6: \vdash \perp \Rightarrow \perp$

$\mathrm{I}_7: \{p \Rightarrow \perp, \neg p \Rightarrow \perp\} \vdash \Rightarrow \perp$

のいずれかと同値である．そして，この 7 つの推論の導出関係は図 3.1 のとおりである．ただし，図 3.1 の$\mathrm{I_i}$から$\mathrm{I_j}$への矢印は，「任意の$V$に対して，$V(\mathrm{I_i})$=t ならば $V(\mathrm{I_j})$=t」を表す．

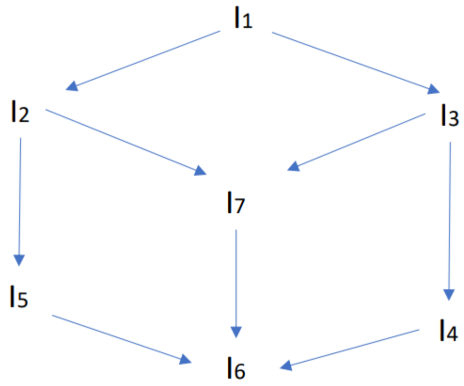



図 3.1:$\mathrm{I}_1$～$\mathrm{I}_7$の導出関係

これらの性質は，表 3.1 と補助定理 3.1 から導かれる．

表 3.1:7 つの推論の真理値

| | | V1 | V2 | {V1,V2} |
|---|---|---|---|---|
| | p | t | f | |
| I1 | ├⇒⊥ | f | f | f |
| I2 | ├⇒p | t | f | f |
| I3 | ├⇒¬p | f | t | f |
| I4 | ├p⇒⊥ | f | t | t |
| I5 | ├¬p⇒⊥ | t | f | t |
| I6 | ├⊥⇒⊥ | t | t | t |
| I7 | {p⇒⊥,¬p⇒⊥}├⇒⊥ | t | t | f |

**補助定理 3.1.**

$V_1(T \vdash X) = V_2(T \vdash X) = \mathrm{f}$ならば$(V_1 \cup V_2)(T \vdash X) = \mathrm{f}$

また，補助定理 2.6(3)の推論$\{\neg p \Rightarrow \perp\} \vdash \Rightarrow p$は表 3.1 と表 3.2 より，$\mathrm{I}_7$と同値である．このことは補助定理 2.6(3)の証明にもなる．

表 3.2:補助定理 2.6(3)の真理値表

| | v1 | v2 | {v1,v2} |
|---|---|---|---|
| p | t | f | |
| ⇒p | t | f | f |
| ¬p | f | t | f |
| ¬p⇒⊥ | t | f | t |
| {¬p⇒⊥}⊢⇒p | t | t | f |

## 4　2 変数の場合

この節では 2 変数の非直接推論の導出関係を明らかにする. より具体的には, 1-基本シークエントを定義し, 2 変数の非直接推論は 1-基本シークエントのある集合$T$を用いて, $T \vdash \Rightarrow \bot$で表現できること, および, その形の推論の導出関係は$T$の包含関係で表現できることを示す.

この節では$p, q$以外の命題変数の現れない推論のみ扱う.

**定義 4.1.**
(1) 表 4.1 の 32 個のシークエント$\mathrm{ES}_1, \cdots, \mathrm{ES}_{32}$を 1-基本シークエントという.
(2) すべての 1-基本シークエントの集合を **ES** とおく.

表 4.1.1-基本シークエント

| | | | |
|---|---|---|---|
| ES1 | p∧q ⇒ ¬p∨¬q | ES17 | p∨q ⇒ p∨¬q |
| ES2 | p∧¬q ⇒ ¬p∨q | ES18 | p∨q ⇒ ¬p∨q |
| ES3 | ¬p∧q ⇒ p∨¬q | ES19 | p∨q ⇒ ¬p∨¬q |
| ES4 | ¬p∧¬q ⇒ p∨q | ES20 | p∨¬q ⇒ p∨q |
| ES5 | p ⇒ ¬p∨q | ES21 | p∨¬q ⇒ ¬p∨q |
| ES6 | p ⇒ ¬p∨¬q | ES22 | p∨¬q ⇒ ¬p∨¬q |
| ES7 | ¬p ⇒ p∨q | ES23 | ¬p∨q ⇒ p∨q |
| ES8 | ¬p ⇒ p∨¬q | ES24 | ¬p∨q ⇒ p∨¬q |
| ES9 | q ⇒ p∨¬q | ES25 | ¬p∨q ⇒ ¬p∨¬q |
| ES10 | q ⇒ ¬p∨¬q | ES26 | ¬p∨¬q ⇒ p∨q |
| ES11 | ¬q ⇒ p∨q | ES27 | ¬p∨¬q ⇒ p∨¬q |
| ES12 | ¬q ⇒ ¬p∨q | ES28 | ¬p∨¬q ⇒ ¬p∨q |
| ES13 | p≡q ⇒ p∨q | ES29 | ⇒ p∨q |
| ES14 | p≡q ⇒ ¬p∨¬q | ES30 | ⇒ p∨¬q |
| ES15 | p≢q ⇒ p∨¬q | ES31 | ⇒ ¬p∨q |
| ES16 | p≢q ⇒ ¬p∨q | ES32 | ⇒ ¬p∨¬q |

**定義 4.2.** **ES**の部分集合$\mathrm{ES}(T, X)$を次の 32 条件を満たすように定義する.
(C1)$\mathrm{ES}_1 \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow v_1(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C2)$\mathrm{ES}_2 \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow v_2(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C3)$\mathrm{ES}_3 \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow v_3(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C4)$\mathrm{ES}_4 \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow v_4(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C5)$\mathrm{ES}_5 \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_1, v_2\}(T \vdash X) = v_2(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C6)$\mathrm{ES}_6 \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_1, v_2\}(T \vdash X) = v_1(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C7)$\mathrm{ES}_7 \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_3, v_4\}(T \vdash X) = v_4(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C8)$\mathrm{ES}_8 \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_3, v_4\}(T \vdash X) = v_3(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C9)$\mathrm{ES}_9 \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_1, v_3\}(T \vdash X) = v_3(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C10)$\mathrm{ES}_{10} \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_1, v_3\}(T \vdash X) = v_1(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C11)$\mathrm{ES}_{11} \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_2, v_4\}(T \vdash X) = v_4(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C12)$\mathrm{ES}_{12} \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_2, v_4\}(T \vdash X) = v_2(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C13)$\mathrm{ES}_{13} \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_1, v_4\}(T \vdash X) = v_4(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C14)$\mathrm{ES}_{14} \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_1, v_4\}(T \vdash X) = v_1(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C15)$\mathrm{ES}_{15} \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_2, v_3\}(T \vdash X) = v_3(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C16)$\mathrm{ES}_{16} \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_2, v_3\}(T \vdash X) = v_2(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C17)$\mathrm{ES}_{17} \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_1, v_2, v_3\}(T \vdash X)$
$= \{v_2, v_3\}(T \vdash X) = \{v_1, v_3\}(T \vdash X) = v_3(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C18)$\mathrm{ES}_{18} \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_1, v_2, v_3\}(T \vdash X)$
$= \{v_2, v_3\}(T \vdash X) = \{v_1, v_2\}(T \vdash X) = v_2(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C19)$\mathrm{ES}_{19} \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_1, v_2, v_3\}(T \vdash X)$
$= \{v_1, v_3\}(T \vdash X) = \{v_1, v_2\}(T \vdash X) = v_1(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C20)$\mathrm{ES}_{20} \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_1, v_2, v_4\}(T \vdash X)$
$= \{v_2, v_4\}(T \vdash X) = \{v_1, v_4\}(T \vdash X) = v_4(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C21)$\mathrm{ES}_{21} \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_1, v_2, v_4\}(T \vdash X)$
$= \{v_2, v_4\}(T \vdash X) = \{v_1, v_2\}(T \vdash X) = v_2(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C22)$\mathrm{ES}_{22} \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_1, v_2, v_4\}(T \vdash X)$
$= \{v_1, v_4\}(T \vdash X) = \{v_1, v_2\}(T \vdash X) = v_1(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C23)$\mathrm{ES}_{23} \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_1, v_3, v_4\}(T \vdash X)$
$= \{v_3, v_4\}(T \vdash X) = \{v_1, v_4\}(T \vdash X) = v_4(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C24)$\mathrm{ES}_{24} \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_1, v_3, v_4\}(T \vdash X)$
$= \{v_3, v_4\}(T \vdash X) = \{v_1, v_3\}(T \vdash X) = v_3(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C25)$\mathrm{ES}_{25} \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_1, v_3, v_4\}(T \vdash X)$
$= \{v_1, v_4\}(T \vdash X) = \{v_1, v_3\}(T \vdash X) = v_1(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C26)$\mathrm{ES}_{26} \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_2, v_3, v_4\}(T \vdash X)$
$= \{v_3, v_4\}(T \vdash X) = \{v_2, v_4\}(T \vdash X) = v_4(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C27)$\mathrm{ES}_{27} \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_2, v_3, v_4\}(T \vdash X)$
$= \{v_3, v_4\}(T \vdash X) = \{v_2, v_3\}(T \vdash X) = v_3(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C28)$\mathrm{ES}_{28} \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_2, v_3, v_4\}(T \vdash X)$
$= \{v_2, v_4\}(T \vdash X) = \{v_2, v_3\}(T \vdash X) = v_2(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C29)$\mathrm{ES}_{29} \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_1, v_2, v_3, v_4\}(T \vdash X)$
$= \{v_2, v_3, v_4\}(T \vdash X) = \{v_1, v_3, v_4\}(T \vdash X)$
$= \{v_1, v_2, v_4\}(T \vdash X) = \{v_3, v_4\}(T \vdash X) = \{v_2, v_4\}(T \vdash X)$
$= \{v_1, v_4\}(T \vdash X) = v_4(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C30)$\mathrm{ES}_{30} \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_1, v_2, v_3, v_4\}(T \vdash X)$
$= \{v_2, v_3, v_4\}(T \vdash X) = \{v_1, v_3, v_4\}(T \vdash X)$
$= \{v_1, v_2, v_3\}(T \vdash X) = \{v_3, v_4\}(T \vdash X) = \{v_2, v_3\}(T \vdash X)$
$= \{v_1, v_3\}(T \vdash X) = v_3(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C31)$\mathrm{ES}_{31} \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_1, v_2, v_3, v_4\}(T \vdash X)$
$= \{v_2, v_3, v_4\}(T \vdash X) = \{v_1, v_2, v_4\}(T \vdash X)$
$= \{v_1, v_2, v_3\}(T \vdash X) = \{v_2, v_4\}(T \vdash X) = \{v_2, v_3\}(T \vdash X)$
$= \{v_1, v_2\}(T \vdash X) = v_2(T \vdash X) = \mathrm{t}$
(C32)$\mathrm{ES}_{32} \in \mathrm{ES}(T, X) \Leftrightarrow \{v_1, v_2, v_3, v_4\}(T \vdash X)$
$= \{v_1, v_3, v_4\}(T \vdash X) = \{v_1, v_2, v_4\}(T \vdash X)$
$= \{v_1, v_2, v_3\}(T \vdash X) = \{v_1, v_4\}(T \vdash X) = \{v_1, v_3\}(T \vdash X)$
$= \{v_1, v_2\}(T \vdash X) = v_1(T \vdash X) = \mathrm{t}$

**系 4.3.** 任意の 1-基本シークエント$Y$に対して, 次の 2 条件は同値である.
(1)$Y \in \mathrm{ES}(T, X)$,
(2)$V(Y) = \mathrm{f}$となる任意の$V$で, $V(T \vdash X) = \mathrm{t}$.

**例 4.4.** 表 4.2 より次が成り立つ.
(1)$\mathrm{ES}(\{\mathrm{ES}_1\} \vdash \Rightarrow \bot) = \{\mathrm{ES}_1\}$

(2)$\mathrm{ES}(\{\mathrm{ES}_5\} \vdash\Rightarrow\perp) = \{\mathrm{ES}_5\}$
(3)$\mathrm{ES}(\{\mathrm{ES}_1, \mathrm{ES}_5\} \vdash\Rightarrow\perp) = \{\mathrm{ES}_1, \mathrm{ES}_2, \mathrm{ES}_5, \mathrm{ES}_6\}$
(4)$\mathrm{ES}(\{\mathrm{ES}_2, \mathrm{ES}_6\} \vdash\Rightarrow\perp) = \{\mathrm{ES}_1, \mathrm{ES}_2, \mathrm{ES}_5, \mathrm{ES}_6\}$
ただし，表 4.2 において，

$$\big(v_1(p), v_1(q)\big) = (\mathrm{t}, \mathrm{t}), \big(v_2(p), v_2(q)\big) = (\mathrm{t}, \mathrm{f}),$$
$$\big(v_3(p), v_3(q)\big) = (\mathrm{f}, \mathrm{t}), \big(v_4(p), v_4(q)\big) = (\mathrm{f}, \mathrm{f}),$$

であり，

$$V_1 = \{v_1, v_2\}, \quad V_2 = \{v_1, v_3\}, \quad V_3 = \{v_1, v_4\},$$
$$V_4 = \{v_2, v_3\}, \quad V_5 = \{v_2, v_4\}, \quad V_6 = \{v_3, v_4\},$$
$$V_7 = \{v_1, v_2, v_3\}, \ V_8 = \{v_1, v_2, v_4\}, \ V_9 = \{v_1, v_3, v_4\},$$
$$V_{10} = \{v_2, v_3, v_4\}, V_{11} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

である．

**補助定理 4.5.**

$$T \vdash X\text{が直接推論である} \Leftrightarrow \mathrm{ES}(T, X) = \mathbf{ES}$$

**定理 4.6.** $T \vdash X$と$\mathrm{ES}(T, X) \vdash \Rightarrow\perp$は同値である．とくに，$T \vdash X$が非直接推論であれば，$\mathrm{ES}(T, X) \neq \mathbf{ES}$である．
証明．後半は前半と補助定理 4.5 から示されるので，前半のみを示す．$T'= \mathrm{ES}(T, X)$とおく．任意に$V$を与える．

$$V(T \vdash X) = \mathrm{t} \Leftrightarrow V(T' \vdash \Rightarrow\perp) = \mathrm{t}$$

を示せばよい．次の(1), (2)の場合のみを示す．
(1)ある$i \in \{1,2,3,4\}$が存在して$V = \{v_i\}$のとき：$i = 1$ のときのみを示す．$v_1(T \vdash X) = \mathrm{t} \Rightarrow v_1(T' \vdash \Rightarrow\perp) = \mathrm{t}$を示す．$v_1(T \vdash X) = \mathrm{t}$と仮定すると，定義 4.2の(C1)より$\mathrm{ES}_1 \in T'$であり，$v_1(\mathrm{ES}_1) = \mathrm{f}$であるから$v_1(T' \vdash \Rightarrow\perp) = \mathrm{t}$である．

$v_1(T' \vdash \Rightarrow\perp) = \mathrm{t} \Rightarrow v_1(T \vdash X) = \mathrm{t}$を示す．$v_1(T' \vdash\Rightarrow\perp) = \mathrm{t}$を仮定すると，$v_1(T') = \mathrm{f}$である．ある基本シークエント$ES \in T'$が存在して，$v_1(ES) = \mathrm{f}$である．表 4.2 より，$\mathrm{ES}_1, \mathrm{ES}_6, \mathrm{ES}_{10}, \mathrm{ES}_{14}, \mathrm{ES}_{19}, \mathrm{ES}_{22}, \mathrm{ES}_{25}, \mathrm{ES}_{32}$のいずれかが$T'$に属する．定義 4.2 より，$v_1(T \vdash X) = \mathrm{t}$である．
(2)ある$i, j \in \{1,2,3,4\} (i \neq j)$が存在して$V = \{v_i, v_j\}$のとき：$(i, j) = (1,2)$のときを示す．

$\{v_1, v_2\}(T \vdash X) = \mathrm{t} \Rightarrow \{v_1, v_2\}(T' \vdash \Rightarrow\perp) = \mathrm{t}$を示す．$\{v_1, v_2\}(T \vdash X) = \mathrm{t}$と仮定すると，補助定理 3.1 より，$v_1(T \vdash X) = \mathrm{t}$または$v_2(T \vdash X) = \mathrm{t}$である．定義 4.2 の(C5)と(C6)より $\mathrm{ES}_5 \in T'$または $\mathrm{ES}_6 \in T'$であり，表 4.2 より$\{v_1, v_2\}(\mathrm{ES}_5) = \{v_1, v_2\}(\mathrm{ES}_6) = \{v_1, v_2\}(T') = \mathrm{f}$であるから，$\{v_1, v_2\}(T' \vdash \Rightarrow\perp) = \mathrm{t}$である．

上の定理より，$\mathrm{ES}((T, X) \vdash\Rightarrow\perp)$の形の推論が標準形といえる．この標準形の導出関係は，以下の定理 4.7 のように$\mathrm{ES}(T \vdash X)$の包含関係で表現できる．

**定理 4.7.** 次の 2 条件は同値である．
⑴$\mathrm{ES}(T_1, X_1) \subseteq \mathrm{ES}(T_2, X_2)$,
⑵任意の$V$に対して，$V(\mathrm{ES}(T_1, X_1) \vdash\Rightarrow\perp) = \mathrm{t}$ならば$V(\mathrm{ES}(T_2, X_2) \vdash\Rightarrow\perp) = \mathrm{t}$.

ただし，$\mathbf{ES}$のどの部分集合が，$\mathrm{ES}(T_1, X_1)$の形で表現できるかは，表 4.2 などから具体的に計算する必要がある．たとえば，$\{\mathrm{ES}_1, \mathrm{ES}_5\}$は$\mathrm{ES}(T_1, X_1)$の形では表現できない．

表 4.2：$\mathrm{ES}_1, \cdots, \mathrm{ES}_{32}$の真理値

| | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ | $V_4$ | $V_5$ | $V_6$ | $V_7$ | $V_8$ | $V_9$ | $V_{10}$ | $V_{11}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{ES}_1$ | f | t | t | t | t | t | t | t | t | t | t | t | t | t | t |
| $\mathrm{ES}_2$ | t | f | t | t | t | t | t | t | t | t | t | t | t | t | t |
| $\mathrm{ES}_3$ | t | t | f | t | t | t | t | t | t | t | t | t | t | t | t |
| $\mathrm{ES}_4$ | t | t | t | f | t | t | t | t | t | t | t | t | t | t | t |
| $\mathrm{ES}_5$ | t | f | t | t | f | t | t | t | t | t | t | t | t | t | t |
| $\mathrm{ES}_6$ | f | t | t | t | f | t | t | t | t | t | t | t | t | t | t |
| $\mathrm{ES}_7$ | t | t | t | f | t | t | t | t | t | f | t | t | t | t | t |
| $\mathrm{ES}_8$ | t | t | f | t | t | t | t | t | t | f | t | t | t | t | t |
| $\mathrm{ES}_9$ | t | t | f | t | t | f | t | t | t | t | t | t | t | t | t |
| $\mathrm{ES}_{10}$ | f | t | t | t | t | f | t | t | t | t | t | t | t | t | t |
| $\mathrm{ES}_{11}$ | t | t | t | f | t | t | t | t | f | t | t | t | t | t | t |
| $\mathrm{ES}_{12}$ | t | f | t | t | t | t | t | t | f | t | t | t | t | t | t |
| $\mathrm{ES}_{13}$ | t | t | t | f | t | t | f | t | t | t | t | t | t | t | t |
| $\mathrm{ES}_{14}$ | f | t | t | t | t | t | f | t | t | t | t | t | t | t | t |
| $\mathrm{ES}_{15}$ | t | t | f | t | t | t | t | f | t | t | t | t | t | t | t |
| $\mathrm{ES}_{16}$ | t | f | t | t | t | t | t | f | t | t | t | t | t | t | t |
| $\mathrm{ES}_{17}$ | t | t | f | t | t | f | t | f | t | t | f | t | t | t | t |
| $\mathrm{ES}_{18}$ | t | f | t | t | f | t | t | f | t | t | f | t | t | t | t |
| $\mathrm{ES}_{19}$ | f | t | t | t | f | f | t | t | t | t | f | t | t | t | t |
| $\mathrm{ES}_{20}$ | t | t | t | f | t | t | f | t | f | t | t | f | t | t | t |
| $\mathrm{ES}_{21}$ | t | f | t | t | f | t | t | t | f | t | t | f | t | t | t |
| $\mathrm{ES}_{22}$ | f | t | t | t | f | t | f | t | t | t | t | f | t | t | t |
| $\mathrm{ES}_{23}$ | t | t | t | f | t | t | f | t | t | f | t | t | f | t | t |
| $\mathrm{ES}_{24}$ | t | t | f | t | t | f | t | t | t | f | t | t | f | t | t |
| $\mathrm{ES}_{25}$ | f | t | t | t | t | f | f | t | t | t | t | t | f | t | t |
| $\mathrm{ES}_{26}$ | t | t | t | f | t | t | t | t | f | f | t | t | t | f | t |
| $\mathrm{ES}_{27}$ | t | t | f | t | t | t | t | f | t | f | t | t | t | f | t |
| $\mathrm{ES}_{28}$ | t | f | t | t | t | t | t | f | f | t | t | t | t | f | t |
| $\mathrm{ES}_{29}$ | t | t | t | f | t | t | f | t | f | f | t | f | f | f | f |
| $\mathrm{ES}_{30}$ | t | t | f | t | t | f | t | f | t | f | f | t | f | f | f |
| $\mathrm{ES}_{31}$ | t | f | t | t | f | t | t | f | f | t | f | f | t | f | f |
| $\mathrm{ES}_{32}$ | f | t | t | t | f | f | f | t | t | t | f | f | f | t | f |

また，補助定理 2.6(1)の推論$\{p \Rightarrow q\} \vdash\Rightarrow p \to q$は，表 4.2 と表 4.3 より，
$\{\mathrm{ES}_1, \mathrm{ES}_2, \mathrm{ES}_3, \mathrm{ES}_4, \mathrm{ES}_5, \mathrm{ES}_6, \mathrm{ES}_7, \mathrm{ES}_8, \mathrm{ES}_9,$
$\mathrm{ES}_{10}, \mathrm{ES}_{13}, \mathrm{ES}_{14}, \mathrm{ES}_{23}, \mathrm{ES}_{24}, \mathrm{ES}_{25}\} \vdash\Rightarrow\perp$と同値になる．

表 4.3:補助定理 2.6(1)の真理値表

| | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ | $V_4$ | $V_5$ | $V_6$ | $V_7$ | $V_8$ | $V_9$ | $V_{10}$ | $V_{11}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| p | t | t | f | f | t | f | f | f | f | f | f | f | f | f | f |
| q | t | f | t | f | f | t | f | f | f | f | f | f | f | f | f |
| p⇒q | t | f | t | t | f | t | t | t | t | t | t | t | t | t | t |
| p→q | t | f | t | t | f | t | t | f | f | t | f | f | t | f | f |
| {p⇒q} ⊢ ⇒p→q | t | t | t | t | t | t | t | f | f | t | f | f | t | f | f |

## 5　おわりに

本研究では，体系$\vdash_S$を用いて 1 変数の非直接推論の標準形について明らかにした．また，2 変数の非直接推論の標準形について考察し，$\mathbf{ES}$のある部分集合$T'$を用いて$T' \vdash \Rightarrow\perp$と表現できることを示すことができた．そして，その形の推論の導出関係の証明を示すことができた．

## 参考文献

[1] G. Gentzen, Untersuchungen über das logisch Schließen, Mathematische Zeitschrift, vol. 39 (1934-35), pp. 176-210, 405-431.
[2]小野寛晰,『情報科学における論理』, 日本評論社, 東京, 1994.
[3] K. Sasaki, A sequent system without improper derivations. Bulletin of the Section of Logic, (2021), 18 pp. https://doi.org/10.18778/0138-0680.2021.21