様相論理 K5 の標準形とイグザクトモデル

M2020SS007 安田匡慶
指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

古典命題論理 **CL** では，m 個の命題変数 $p_1, \cdots, p_m$ から構成される任意の論理式 P に対して，P と同値な主和積標準形の論理式 Q が存在し，P を偽とする付値関数をすべて求めることにより，この Q を求めることができる．佐々木 [3],[4] は正規様相論理 **K4** を含む正規様相論理において，**CL** の主和積標準形に対応する標準形と **CL** の付値関数に対応するイグザクトモデルを構成した．本研究の目的は，佐々木の方法を用いて，正規様相論理 **K5** においても，**CL** の主和積標準形に対応する標準形と，**CL** の付値関数に対応するイグザクトモデルを構成することである．とくに，命題変数の個数が 1 と 2 の場合の標準形とイグザクトモデルを具体的に記述する．

本稿では，まず，2 節で，佐々木 [5] と小野 [2] にしたがって，**K5** を導入し，イグザクトモデルのもとになるクリプキによるセマンティクスを導入する．3 節で，**K5** の標準形とイグザクトモデルを定義し，目的の定理を紹介する．4 節で 1 変数の場合の標準形と 2 変数の場合の標準形を具体的にあげる．

2 体系 K5

この節では，[2],[5] にしたがって，様相論理の体系 **K5** およびそのクリプキによるセマンティクスを導入する．そのために，まず，論理式とシークエントを導入する．

論理式は，$\perp$（矛盾）と命題変数から論理結合子 $\wedge$（論理積），$\vee$（論理和），$\supset$（含意），$\Box$（必然）を用いて定義される．命題変数を表すのに $p, q, p_1, p_2, \cdots$ を，論理式を表すのに $P, Q, R, P_1, P_2, \cdots$ を用いる．$\neg P$ と $P \equiv Q$ はそれぞれ $P \supset \perp$と $(P \supset Q) \wedge (Q \supset P)$ の省略形として用いる．また，論理式の有限集合を表すのに $\Gamma, \Delta, \Gamma_1, \Gamma_2, \cdots$ を用いる．2 つの集合 $\{\Box P | P \in \Gamma\}$，$\{\Box P | \Box P \in \Gamma\}$ をそれぞれ $\Box\Gamma$，$\Gamma^{\Box}$ と表す．$p_1, \cdots, p_m$ 以外の命題変数が現れない論理式の集合を F^m と表す．論理式 P の深さ $d(P)$ は次のように定義される．

$d(p_i) = d(\perp) = 0$,
$d(P \wedge Q) = d(P \vee Q) = d(P \supset Q) = \max\{d(P), d(Q)\}$,
$d(\Box P) = d(Q) + 1$

表現

$$\Gamma \to \Delta$$

をシークエントという．Γ をこのシークエントの左辺，Δ を右辺という．

シークエントの左辺が「使える性質の集合」を，右辺の要素を $\vee$ でつないだ論理式が導きたい性質を，それぞれ表現している．シークエント

$$\{P_1, \cdots, P_m\} \cup \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k \to \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_\ell \cup \{Q_1, \cdots, Q_n\}$$

を

$$P_1, \cdots, P_m, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_k \to \Delta_1, \cdots, \Delta_\ell, Q_1, \cdots, Q_n$$

と表現してもよいことにする．シークエントを表すのに，$X, Y, Z, X_1, X_2, \cdots$ を用いる．シークエント $\Gamma \to \Delta$ に対して，$\mathbf{ant}(\Gamma \to \Delta)$ と $\mathbf{suc}(\Gamma \to \Delta)$ をそれぞれ以下のように定義する．

$$\mathbf{ant}(\Gamma \to \Delta) = \Gamma, \qquad \mathbf{suc}(\Gamma \to \Delta) = \Delta$$

また，シークエント X とシークエントの集合 S に対して，$\mathbf{for}(X)$ と $\mathbf{for}(S)$ を以下のように定義する．

$$\mathbf{for}(X) = \begin{cases} \bigwedge \mathbf{ant}(X) \supset \bigvee \mathbf{suc}(X) & \mathbf{ant}(X) \neq \emptyset \text{ のとき} \\ \bigvee \mathbf{suc}(X) & \mathbf{ant}(X) = \emptyset \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\mathbf{for}(S) = \{\mathbf{for}(X) \mid X \in S\}.$$

次に，様相論理の体系 **K** と体系 **K5** を導入する．そのために，まず，古典論理のシークエント体系 **LK** を導入する．体系 **LK** は G. Gentzen が導入した体系に $\perp$ の扱いを追加したものであり，次の **LK** の公理と **LK** の推論規則から定義される．

LK の公理：

$$P \to P \qquad\qquad \perp \to$$

LK の推論規則：論理記号に関する規則と構造に関する推論規則がある．その例を以下に示す．

LK の論理記号に関する推論規則の例

$$\frac{P, \Gamma \to \Delta, Q}{\Gamma \to \Delta, P \supset Q}(\supset 右)$$

LK の構造に関する推論規則の例

$$\frac{\Gamma_1 \to \Delta_1, P \quad P, \Gamma_2 \to \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Delta_1, \Delta_2}(\mathrm{cut})$$

次に，様相論理の体系 **K** と体系 **K5** を導入する．

定義 2.1
(1) 体系 **K** は，**LK** に次の推論規則を加えて定義する．
K の推論規則

$$\frac{\Gamma \to P}{\Box\Gamma \to \Box P}(\Box)$$

(2) 体系 **K5** は，**LK** に次の推論規則を加えて定義する．
K5 の推論規則

$$\frac{\Gamma \to \Box\Delta, P}{\Box\Gamma \to \Box\Delta, \Box P}(\Box - \mathbf{K5})$$

X が体系 $\mathbf{L}$ で証明可能であることを$\vdash_{\mathbf{L}} X$ と表す．とくに，$\vdash_{\mathbf{L}} \to P$ のとき，P も L で証明可能であるといい，$\vdash_{\mathbf{L}} P$ と表す．また，$\vdash_{\mathbf{L}} P \equiv Q$ であることを $P \equiv_{\mathbf{L}} Q$ と表す．$\vdash_{\mathbf{LK}}$ と $\equiv_{\mathbf{LK}}$ は，それぞれ$\vdash_{\mathbf{CL}}$ と $\equiv_{\mathbf{CL}}$ とも表す．

例 2.2
(1) $\mathbf{for}(p_1, p_2 \to) = p_1 \wedge p_2 \supset \bot \equiv_{\mathbf{CL}} \neg p_1 \vee \neg p_2$
(2) $\mathbf{for}(p_1 \to p_2) = p_1 \supset p_2 \equiv_{\mathbf{CL}} \neg p_1 \vee p_2$
(3) $\mathbf{for}(p_2 \to p_1) = p_2 \supset p_1 \equiv_{\mathbf{CL}} p_1 \vee \neg p_2$
(4) $\mathbf{for}(\to p_1, p_2) = p_1 \vee p_2$

次に，[5] にしたがって，クリプキによる様相論理のセマンティクスを与え，体系 **K5** の完全性を紹介する．

定義 2.3 空でない集合 W と W 上の二項関係 R の対 $\langle W, R\rangle$ をクリプキ・フレームという．

定義 2.4 $\langle W, R\rangle$ をクリプキ・フレームとする．W の要素と論理式の間の二項関係 $\vDash$ が次の 5 条件を満たすとき，$\langle W, R, \vDash\rangle$ をクリプキ・モデルといい，$\vDash$ を付値という．
(1) $a \nvDash \bot$
(2) $a \vDash P \wedge Q \Leftrightarrow a \vDash P$ かつ $a \vDash Q$
(3) $a \vDash P \vee Q \Leftrightarrow a \vDash P$ または $a \vDash Q$
(4) $a \vDash P \supset Q \Leftrightarrow a \vDash P$ でないか，または $a \vDash Q$
(5) $a \vDash \Box P \Leftrightarrow aRb$ となるすべての b に対し $b \vDash P$
$a \vDash P$ であるとき，「a で P は真である」という．「$a \vDash P$ でない」ことは $a \nvDash P$ と表す．

定義 2.5 クリプキ・フレーム $\langle W, R\rangle$ 上の任意の付値$\vDash$ と W の任意の要素 a に対し $a \vDash P$ となるとき，P は $\langle W, R\rangle$ で恒真であるという．クリプキ・モデル $\langle W, R, \vDash\rangle$ において，ある $b(\in W)$ に対し $b \nvDash P$ となるとき，$\langle W, R, \vDash\rangle$ で P は偽であるという．またある付値 $\vDash$ に対し，P が $\langle W, R, \vDash\rangle$ で偽であるとき，P は $\langle W, R\rangle$ で偽であるという．

次に，体系 **K5** の完全性を紹介する．この完全性は例えば，[2] と [5] を参照できる．

定義 2.6 クリプキ・フレーム $\langle W, R\rangle$ は，aRb かつ aRc ならば bRc を満たすとき，ユークリッド的であるという．

定理 2.7 （完全性）
$\vdash_{\mathbf{K5}} X \Leftrightarrow$ 任意のユークリッド的なクリプキ・フレームで $\mathbf{for}(X)$ は恒真

3 K5 の標準形とイグザクトモデル

この節では，**K5** の標準形とイグザクトモデルを導入し，目的の定理を紹介する．**CL** との対応を明確にするために，最初に **CL** の主和積標準形と付値関数の性質を述べておく．そして，**CL** の主和積標準形に対する **K5** の標準形と，**CL** の付値関数に対する **K5** のイグザクトモデルについて述べる．最後に，目的の定理を紹介する．

最初に，**CL** の主和積標準形と付値関数に関して，[2] などで紹介されている性質を示す．

定義 3.1 集合
$$\{\Gamma \to \Delta \mid \Gamma \cap \Delta = \{\}, \Gamma \cup \Delta = \{p_1, \cdots, p_m\}\}$$
の要素を **CL** の基本和という．Σ が基本和の集合のとき，$\bigwedge \mathbf{for}(\Sigma)$ を主和積標準形という．

例 3.2 $m = 2$ のとき，基本和は，
$$p_1, p_2 \to$$
$$p_1 \to p_2$$
$$p_2 \to p_1$$
$$\to p_1, p_2$$
の 4 つである．

ふつうは，これらに対応する例 2.2 の論理式を基本和とよぶことが多いが，本稿では，矢印とカンマのみで表現できるように，定義 3.1 のように基本和を定義する．

補助定理 3.3 深さ 0 の論理式 $P \in \mathrm{F}^m$ に対して，基本和のある集合 S が存在して，
$$P \equiv_{\mathbf{CL}} \bigwedge \mathbf{for}(S)$$
である．

定義 3.4 深さ 0 の論理式全体の集合から真理値の集合 {t,f} への関数 v は，次の 4 条件を満たすとき，付値関数という．
(1) $v(\bot) =$f
(2) $v(P \wedge Q) =$ t $\Leftrightarrow v(P) = v(Q) =$t
(3) $v(P \vee Q) =$ t $\Leftrightarrow v(P) =$ t または $v(Q) =$t
(4) $v(P \to Q) =$ t $\Leftrightarrow v(P) =$ f または $v(Q) =$t

定義 3.5 基本和 X に対する付値関数 v_X を次のように定義する．
$$v_X(p_i) = \mathrm{t} \Leftrightarrow p_i \in \mathbf{ant}(X)$$

補助定理 3.6
(1) 2 つの基本和 X, Y に対して，$v_X(Y) = \mathrm{f} \Leftrightarrow X = Y$
(2) 深さ 0 の $P \in \mathrm{F}^m$ に対して，$\nvdash_{\mathbf{CL}} P$ ならば，ある基本和 X が存在して，$v_X(P) = \mathrm{f}$
(3) 深さ 0 の $P \in \mathrm{F}^m$ に対して，
$$P \equiv_{\mathbf{CL}} \bigwedge_{v_X(P)=\mathrm{f}, X \text{ は基本和}} \mathbf{for}(X)$$

例 3.7 $m = 2$ のとき，例 3.2 の 4 つの基本和 X に対する v_X とその v_X に対する $\mathbf{for}(X)$ の真理値は表 1 のとお

りである．ただし，P_1, P_2, P_3, P_4 はそれぞれ，例 2.2 の (1),(2),(3),(4) の論理式である．表 1 より，補助定理 3.3 を確認できる．

表 1　$m = 2$ の場合の v_X と $\mathbf{for}(X)$

	p_1	p_2	P_1	P_2	P_3	P_4
$v_{p_1,p_2\to}$	t	t	f	t	t	t
$v_{p_1\to p_2}$	t	f	t	f	t	t
$v_{p_2\to p_1}$	f	t	t	t	f	t
$v_{\to p_1,p_2}$	f	f	t	t	t	f

例 3.8　$m = 2$ のとき．補助定理 3.6(3) と表 2 より次が成り立つ．

$$\begin{aligned} p_1 &\equiv_{\mathbf{CL}} \mathbf{for}(p_2 \to p_1) \wedge \mathbf{for}(\to p_1, p_2) \\ &\equiv_{\mathbf{CL}} (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_1 \vee p_2) \\ \neg(p_1 \wedge \neg p_2) &\equiv_{\mathbf{CL}} \mathbf{for}(p_1 \to p_2) \equiv_{\mathbf{CL}} \neg p_1 \vee p_2 \end{aligned}$$

表 2　P_1 と $\neg(p_1 \wedge \neg p_2)$ の真理値表

	p_1	p_2	$\neg(p_1 \wedge \neg p_2)$
$v_{p_1,p_2\to}$	t	t	t
$v_{p_1\to p_2}$	t	f	f
$v_{p_2\to p_1}$	f	t	t
$v_{\to p_1,p_2}$	f	f	t

次に，**CL** の基本和と主和積標準形に対応する **K5** の基本和と標準形を定義する．具体的には，以下で定義する $\mathbf{ED}^m(n)$ に対して，$\mathbf{ED}^m(2)$ の要素がその基本和である．その定義の方法は，佐々木 [3] の方法を単純化したものである．**K5** の標準形はこの基本和を用いて定義される．

定義 3.9　シークエントの集合 $\mathbf{ED}^m(n)$ を次のように定義する．

・$\mathbf{ED}^m(0) = \{\Gamma \to \Delta \mid \Gamma \cap \Delta = \emptyset, \Gamma \cup \Delta = \{p_1, \cdots, p_m\}\}$
・$\mathbf{D}^m(k+1) = \{n(X,S) \mid X \in \mathbf{ED}^m(k), S \subseteq \mathbf{ED}^m(k)\}$,
・$\mathbf{ED}^m(k+1) = \{X \in \mathbf{D}^m(k+1) \mid \nvdash_{\mathbf{K5}} X\}$

ただし，$n(X,S)$ は次のシークエントである．

$$\Box\mathbf{for}(\mathbf{ED}^m(k) \backslash S), \mathbf{ant}(X) \to \mathbf{suc}(X), \Box\mathbf{for}(S)$$

$\mathbf{ED}^m(0)$ は，定義 3.1 で与えられた **CL** の基本和を全部集めた集合である．

定義 3.10　$\mathbf{ED}^m(2)$ の要素を **K5** の基本和という．$\mathbf{ED}^m(2)$ のある部分集合 Σ に対して，

$$\bigwedge \mathbf{for}(\Sigma)$$

を **K5** の標準形という．

定義 3.11　$X \in \mathbf{ED}^m(n+1)$ に対して，ある $Y \in \mathbf{ED}^m(n)$ とある $S \subseteq \mathbf{ED}^m(n)$ が存在して，

$$X = n(Y, S)$$

を満たす．この Y を $p(X)$，S を S_X と表すことにする．

次に，イグザクトモデルを定義しその性質を示す．イグザクトモデルは，**CL** の付値関数に対応するクリプキ・モデルである．

定義 3.12　イグザクトモデル $\mathbf{EM}^m$ を次のように定義する．

$\mathbf{EM}^m = \langle \mathbf{ED}^m(2), R, \vDash \rangle$,
ただし，
$R = \{(X,Y) \mid p(Y) \in S_X, (\mathbf{suc}(X))^{\Box} \subseteq (\mathbf{suc}(Y))^{\Box}\}$,
$X \vDash p \Leftrightarrow p \in \mathbf{ant}(X)$
である．

このイグザクトモデルは次を満たす．

定理 3.13
(1) $\mathbf{EM}^m$ はユークリッド的である．
(2) $X, Y \in \mathbf{ED}^m(2)$ に対して，$X \nvDash \mathbf{for}(Y) \Leftrightarrow X = Y$
(3) 任意の $P \in \mathrm{F}^m$ に対して $\nvdash_{\mathbf{K5}} P$ ならば，ある $X \in \mathbf{ED}^m(2)$ が存在して，$\mathbf{EM}^m$ において $X \nvDash P$ である．

上の定理の (2),(3) が，それぞれ，補助定理 3.6 の (1),(2) に対応する．上の定理の (3) は (1) と補助定理 2.7（完全性）から示される．Moss[1] も，標準形からできるクリプキ・モデルを定義しているが，そのクリプキ・モデルはユークリッド的ではない．上の定理に示すように，本研究のクリプキ・モデルはユークリッド的である．

最後に，本研究の目的の定理を示す．この定理は補助定理 3.3 と補助定理 3.6(3) に対応する．

定理 3.14
(1) 任意の $P \in \mathrm{F}^m$ に対して，$\mathbf{ED}^m(2)$ のある部分集合 S が存在して，

$$P \equiv_{\mathbf{K5}} \bigwedge \mathbf{for}(S).$$

(2) 任意の $P \in \mathrm{F}^m$ が与えられたとき，$\mathbf{EM}^m$ において，

$$P \equiv_{\mathbf{K5}} \bigwedge_{X \nvDash P} \mathbf{for}(X).$$

4　K5 の基本和の具体例

この節では，$\mathbf{ED}^m(n) (m = 1, 2,\ n = 1, 2)$ の要素を具体的に挙げ，定理 3.14(2) を適用した例を示す．この節では，p_1, p_2 をそれぞれ p, q とおく．

まず，$\mathbf{ED}^1(n)$ $(n = 1, 2)$ の要素を具体的に挙げる．

定義 4.1　$\mathbf{ED}^1(0)$ の要素を次のようにおく．

$$T = (p \to), \qquad F = (\to p)$$

定義 4.2 $\mathbf{D}^1(1)$ の要素を次のようにおく．

$$\begin{array}{ll} T_1 = n(T, \{\}), & F_1 = n(F, \{\}), \\ T_2 = n(T, \{F\}), & F_2 = n(F, \{F\}), \\ T_3 = n(T, \{T\}), & F_3 = n(F, \{T\}), \\ T_4 = n(T, \{T, F\}), & F_4 = n(F, \{T, F\}) \end{array}$$

定理 4.3 $\mathbf{ED}^1(1) = \mathbf{D}^1(1)$

定理 4.4 $\mathbf{ED}^1(2) = \{T_{1.1}, T_{2.2}, T_{2.4}, T_{3.3}, T_{3.4}, T_{4.4}, F_{1.1}, F_{2.2}, F_{2.4}, F_{3.3}, F_{3.4}, F_{4.4}\}$,
ただし,

$$\begin{array}{ll} T_{1.1} = n(T_1, \{\}), & F_{1.1} = n(F_1, \{\}), \\ T_{2.2} = n(T_2, \{F_2\}), & F_{2.2} = n(F_2, \{F_2\}), \\ T_{2.4} = n(T_2, \{F_4\}), & F_{2.4} = n(F_2, \{F_4\}), \\ T_{3.3} = n(T_3, \{T_3\}), & F_{3.3} = n(F_3, \{T_3\}), \\ T_{3.4} = n(T_3, \{T_4\}), & F_{3.4} = n(F_3, \{T_4\}), \\ T_{4.4} = n(T_4, \{T_4, F_4\}), & F_{4.4} = n(F_4, \{T_4, F_4\}) \end{array}$$

である．

定理 3.14(2) の適用例を示すためにイグザクトモデル $\mathbf{EM}^1$ を具体的に記述する．

系 4.5 $\mathbf{EM}^1$ は図 1 のとおりである．ただし，図 1 はクリプキ・モデル $\langle W, R, \models \rangle$ を次の約束にしたがって表現した結果である．

- W の要素 α は，$\alpha R \alpha$ であるとき $\circ$ で，$\alpha \not R \alpha$ であるとき $\bullet$ で表す．名前 α を $\circ$ または $\bullet$ の近くに書く．
- $\alpha, \beta \in W$ が $\alpha R \beta$ かつ $\alpha \neq \beta$ をみたすとき α を表す $\circ$ または $\bullet$ から，β を表す $\circ$ または $\bullet$ へ矢印を書く．

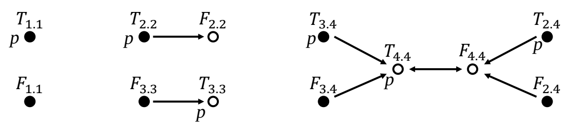

図 1 $\mathbf{EM}^1$

例 4.6 定理 3.14(2) より，次が成り立つ．

$$p \equiv_{\mathbf{K5}} \mathbf{for}(F_{1.1}) \wedge \mathbf{for}(F_{2.2}) \wedge \mathbf{for}(F_{2.4}) \wedge \mathbf{for}(F_{3.3}) \wedge \mathbf{for}(F_{3.4}) \wedge \mathbf{for}(F_{4.4})$$

$$\Box p \equiv_{\mathbf{K5}} \mathbf{for}(T_{2.2}) \wedge \mathbf{for}(F_{2.2}) \wedge \mathbf{for}(T_{2.4}) \wedge \mathbf{for}(F_{2.4}) \wedge \mathbf{for}(T_{4.4}) \wedge \mathbf{for}(F_{4.4})$$

$$\Box\Box p \equiv_{\mathbf{K5}} \mathbf{for}(T_{2.2}) \wedge \mathbf{for}(F_{2.2}) \wedge \mathbf{for}(T_{2.4}) \wedge \mathbf{for}(F_{2.4}) \wedge \mathbf{for}(T_{3.4}) \wedge \mathbf{for}(F_{3.4}) \wedge \mathbf{for}(T_{4.4}) \wedge \mathbf{for}(F_{4.4})$$

次に，$\mathbf{ED}^2(n)$ $(n = 1, 2)$ の要素を具体的に挙げる．

定義 4.7 $\mathbf{ED}^2(0)$ の要素を次のようにおく．

$$TT = (p, q \rightarrow), TF = (p \rightarrow q),$$
$$FT = (q \rightarrow p), FF = (\rightarrow p, q)$$

定理 4.8 $\mathbf{ED}^2(1) = \mathbf{D}^2(1)$ であり，その要素は 64 個である．

定義 4.9 $\mathbf{D}^2(1)$ の要素を次のようにおく．

$$\begin{array}{ll} TT_i = n(TT, S_i), & TF_i = n(TF, S_i), \\ FT_i = n(FT, S_i), & FF_i = n(FF, S_i) \end{array}$$

ただし，$i = 1, \cdots, 16$ であり，

$$\begin{array}{ll} S_1 = \{\}, & S_9 = \{TT\}, \\ S_2 = \{FF\}, & S_{10} = \{TT, FF\}, \\ S_3 = \{FT\}, & S_{11} = \{TT, FT\}, \\ S_4 = \{FT, FF\}, & S_{12} = \{TT, FT, FF\}, \\ S_5 = \{TF\}, & S_{13} = \{TT, TF\}, \\ S_6 = \{TF, FF\}, & S_{14} = \{TT, TF, FF\}, \\ S_7 = \{TF, FT\}, & S_{15} = \{TT, TF, FT\}, \\ S_8 = \{TF, FT, FF\}, & S_{16} = \{TT, TF, FT, FF\} \end{array}$$

である．

定理 4.10 $\mathbf{ED}^2(2)$ の要素は 264 個である．とくに，

- $n(TT_1, S)$ の形のシークエントは 1 個．
- $n(TT_2, S), n(TT_3, S), n(TT_5, S), n(TT_9, S)$ の形のシークエントはそれぞれ 8 個，合計 32 個．
- $n(TT_4, S), n(TT_6, S), n(TT_7, S), n(TT_{10}, S), n(TT_{11}, S), n(TT_{13}, S)$ の形のシークエントはそれぞれ 4 個，合計 24 個．
- $n(TT_8, S), n(TT_{12}, S), n(TT_{14}, S), n(TT_{15}, S)$ の形のシークエントはそれぞれ 2 個，合計 8 個．
- $n(TT_{16}, S)$ の形のシークエントはそれぞれ 1 個．
- $n(TT_i, S)$ の形のシークエントは 66 個．

である．$n(TF_i, S)$, $n(FT_i, S)$, $n(FF_i, S)$ の形の各 66 個のシークエントも同様である．

参考文献

[1] Lawrence S. Moss, Finite models constructed from canonical formulas, Journal of Philosophical Logic, pp. 605-640, 2007

[2] 小野寛晰,『情報科学における論理』, 日本評論社，東京, 1994

[3] Katsumi Sasaki, Formulas in modal logic S4, The Review of Symbolic Logic, pp. 600-627, 2010

[4] Katsumi Sasaki, Normal forms and exact models in normal modal logics containing K4, Technical Report of the Nanzan Academic Society Information Sciences and Engineering, NANZAN-TR-2013-01, Nanzan University, 2013

[5] 佐々木克巳,「形式論理入門　数学基礎論サマースクール 2021」,2021 年度数学基礎論サマースクール,2021