# 証明図による日本語証明の分析

M2020SS006 田中優祐

指導教員：佐々木克巳

## 1　はじめに

形式体系の証明図は，基本的な推論により構成されるため，その筋道が明確であるが，対応する日本語表現が必要以上に長くなることもある．一方，数学書などに見られる証明は，基本的推論が適宜省略されるが，読み手によっては，その筋道を読み取れないこともある．本研究の目的は，数学書にみられる証明と形式体系の 1 つであるシークエント体系の証明図を比較することで，日本語証明において省略される基本的な推論の傾向を考察することである．

具体的には，[1],[2] の写像の性質 (12 個) に対して，次の方法で，その傾向を考察する．

方法：
(1) 数学書から日本語証明が載っている基本的な性質を抽出する．
(2) (1) の日本語証明の筋道をとらえる．
(3) (2) の筋道を，シークエントを基本単位とした図式に変換する．
(4) (3) の図式をもとに，シークエント体系の定義に基づく証明図を作成する．
(5) (4) の証明図に対応する証明を日本語で表現する．
(6) (3),(4) を比較し，(3) の図式では，(4) のどの推論がまとめられているかを整理する．

本稿では，2 節で本研究で用いるシークエント体系を紹介する．3 節で [1] と [2] の証明の傾向を紹介する．4 節で具体的な 2 個の性質に対して，上の (1)〜 (4),(6) の結果を述べる．

## 2　シークエント体系

この節では，必要な準備をした上で，[3] にしたがい，シークエントと，シークエントの変化により証明を表現した証明図を導入する．

### 2.1　準備

この節では，シークエントを導入するための準備を行う．論理結合子「かつ」,「または」,「ならば」,「〜でない」と限定子「すべての $x$ に対して〜」,「ある $x$ が存在して〜」をそれぞれ，$\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall x, \exists x$ と表す．述語を表す記号として，$P, Q, R, P_1, P_2, \cdots$ などを用いる．$x$ についての述語は $P(x)$ のように表すこともある．集合 $X$ に対して，$\forall x(x \in X \rightarrow P)$ と $\exists x(x \in X \wedge P)$ を，それぞれ，$(\forall x \in X)P$ と $(\exists x \in X)P$ と略記する．$P$ の $x$ に式 $t$ を代入した結果を $P[t/x]$ と表す．

### 2.2　シークエント

この節では，[3] にしたがって，シークエントを導入する．使える性質の列と導きたい性質のペアを意図した形式表現

$$P_1, \cdots, P_n \Rightarrow Q$$

をシークエントという ($n$ は 0 でもよい)．$P_1, \cdots, P_n$ をこのシークエントの左辺，$Q$ を右辺という．左辺が「使える性質の列」を，右辺が「導きたい性質」をそれぞれ表現している．左辺の各 $P_i$ の順番と重複は，同一視することにする．以後，述語の有限列を表す記号として $\Gamma$ を用いる．シークエントを表す記号として，$S, S_1, S_2, \cdots$ などを用いる．

### 2.3　証明図

この節では，証明図を導入する．証明図は，証明におけるシークエントの変化の過程を形式的に表現した図式として定義する．

そのために，まず，シークエントの変化の形式表現を導入する．「シークエント $S_1, \cdots, S_n$ からシークエント $S$ が導かれる」という変化を

$$\frac{S_1 \quad \cdots \quad S_n}{S}$$

と表現し，この表現を推論規則という．各 $S_i$ をこの推論規則の上式，$S$ を下式という．

証明図は，

(I) 明らかに正しいと認めたシークエント

(II) 明らかに正しいと認めた推論規則

を選び，(I) として選ばれたシークエントから，(II) として選ばれた推論規則を適用した図式として定義する．ここで選ぶ (I) と (II) は，**C** の公理と **C** の推論規則として定めるが，本稿ではその一部を示す．

**C** の公理

$$(A1)\ P \Rightarrow P \quad (A2)\ \Rightarrow t = t$$

**C** の推論規則

$$\frac{P, Q, \Gamma \Rightarrow R}{P \wedge Q, \Gamma \Rightarrow R}\ (\wedge 左) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow P \quad \Gamma \Rightarrow Q}{\Gamma \Rightarrow P \wedge Q}\ (\wedge 右)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow P \quad Q, \Gamma \Rightarrow R}{P \rightarrow Q, \Gamma \Rightarrow R}\ (\rightarrow 左) \quad \frac{P, \Gamma \Rightarrow Q}{\Gamma \Rightarrow P \rightarrow Q}\ (\rightarrow 右)$$

$$\frac{P[t/x], \Gamma \Rightarrow Q}{\forall x P, \Gamma \Rightarrow Q}\ (\forall 左) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow P[z/x]}{\Gamma \Rightarrow \forall x P}\ (\forall 右)$$

$$\frac{P[z/x], \Gamma \Rightarrow Q}{\exists x P, \Gamma \Rightarrow Q}\ (\exists 左) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow P[t/x]}{\Gamma \Rightarrow \exists x P}\ (\exists 右)$$

$$\frac{P', \Gamma \Rightarrow Q}{P, \Gamma \Rightarrow Q}\ (def) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow P'}{\Gamma \Rightarrow P}\ (def)$$

$$\frac{s = t, P(t), \Gamma \Rightarrow Q}{s = t, P(s), \Gamma \Rightarrow Q}\ (=) \quad \frac{s = t, \Gamma \Rightarrow P(t)}{s = t, \Gamma \Rightarrow P(s)}\ (=)$$

$$\frac{f(x) \in Y, \Gamma \Rightarrow Q}{x \in X, \Gamma \Rightarrow Q}\ (P1) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow Q}{P, \Gamma \Rightarrow Q}\ (w\ \text{左})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow t \in X \quad t \in X, P(t), \Gamma \Rightarrow Q}{(\forall x \in X)P(x), \Gamma \Rightarrow Q}\ (\forall \rightarrow \text{左})$$

$$\frac{z \in X, \Gamma \Rightarrow P(z)}{\Gamma \Rightarrow (\forall x \in X)P(x)}\ (\forall \rightarrow \text{右})$$

$$\frac{z \in X, P(z), \Gamma \Rightarrow Q}{(\exists x \in X)P(x), \Gamma \Rightarrow Q}\ (\exists \wedge \text{左})$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow t \in X \quad \Gamma \Rightarrow P(t)}{\Gamma \Rightarrow (\exists x \in X)P(x)}\ (\exists \wedge \text{右})$$

$$\frac{S_1 \quad S_2 \quad t_1 \in X, t_2 \in X, P(t_1, t_2), \Gamma \Rightarrow Q}{(\forall x_1 \in X)(\forall x_2 \in X)P(x_1, x_2), \Gamma \Rightarrow Q}\ (\forall \rightarrow \text{左}) \times 2$$

$$\frac{z_1 \in X, z_2 \in X, \Gamma \Rightarrow P(z_1, z_2)}{\Gamma \Rightarrow (\forall x_1 \in X)(\forall x_2 \in X)P(x_1, x_2)}\ (\forall \rightarrow \text{右}) \times 2$$

ただし，$(\forall \rightarrow \text{左}) \times 2$ において $S_i$ は $\Gamma \Rightarrow t_i \in X$ であり，$(\forall \text{右}), (\exists \text{左}), (\forall \rightarrow \text{右}), (\exists \wedge \text{左}), (\forall \rightarrow \text{右}) \times 2,$ において，$z, z_1, z_2$ は下式で自由な出現をもたない変数である．$s, t$ は対象を表す任意の表現である．$X, Y$ は集合，$f$ は $X$ から $Y$ への写像である．$(def)$ における $P$ と $P'$ は，それぞれ，次の同値性の左辺と右辺，または，右辺と左辺である．

(全射) $f$ が全射 $\Leftrightarrow (\forall y \in Y)(\exists x \in X)(y = f(x))$

(単射 1) $f$ が単射

$\Leftrightarrow (\forall x_1 \in X)(\forall x_2 \in X)(f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2)$

(単射 2) $f$ が単射

$\Leftrightarrow (\forall x_1 \in X)(\forall x_2 \in X)(x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$

$(g \circ f)$ $y = (g \circ f)(x) \Leftrightarrow y = g(f(x))$

$(g \circ f \times 2)$ $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$

$\Leftrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

ただし，これらの定義文において，$Z$ は集合，$g : Y \rightarrow Z$ である．また，単射の定義が 2 つあるのは，本研究で証明を抽出した [1] と [2] で単射の定義が異なるからである．[1] では (単射 1) を，[2] では (単射 2) を定義としている．

上の推論規則のうち，$(\rightarrow \text{右}), (\forall \text{右}), (\exists \text{左}), (\forall \rightarrow \text{右}),$ $(\exists \wedge \text{左}), (\forall \rightarrow \text{右}) \times 2,$ は，述語の単純な変化では表現できない．これらを非直接推論の推論規則という．一方，上記以外の推論規則は，述語の変化で表現できる．これらを直接推論の推論規則という．非直接推論の推論規則は，その名前に下線を引いて直接推論の推論規則と区別することがある．

## 3 2 つの文献の傾向

この節では，[1],[2] の証明の傾向を紹介する．具体的には以下のとおりである．

(傾向 1) [1],[2] ともに，$(def)$[全射] や $(def)$[単射] が右辺で適用されるときは，$\forall$ と $\rightarrow$ の右の推論規則が適用できるところまでがまとめられて，最後の規則の上式に対応する文が日本語証明に現われていることが多い (本研究で扱った問題では，[2] で 1 つの例外があったが，それ以外はこのようになっていた).

(傾向 2) [1],[2] ともに，$(def)$[単射] が左辺で適用されるときは，少なくとも $(\forall \rightarrow \text{左}) \times 2$ と $(\rightarrow \text{左})$ はまとめられている．

(傾向 3) $(def)$[全射] が左辺で適用されるときは，2 つの文献に差がある．[1] では $(\exists \wedge \text{左})$ までがまとめられて，その $(\exists \wedge \text{左})$ の上式に対応する文が日本語表現に現れる．一方、[2] では $(\exists \wedge \text{左})$ の下式に対応する文が日本語表現に現れる．

## 4 具体例

この節では，[1],[2] から抽出した 2 個の性質とその日本語証明に対して，1 節の (1)〜(4),(6) を示す．すなわち，

(1) 数学書から抽出した基本的な性質.

(2) (1) の日本語証明.

(3) (2) の証明に対応する図式.

(4) (3) の図式をもとにした証明図.

(6) (3) の図式と (4) の証明図の比較.

を示す．(4) の証明図では $(w\ \text{左})$ を省略すること，および，$(\forall x_1 \in X)(\forall x_2 \in X), (\forall y_1 \in Y)(\forall y_2 \in Y)$ を $(\forall x_1)(\forall x_2), (\forall y_1)(\forall y_2)$ と表すことがある．また，(4) の証明図では，(3) に現れるシークエントの左に「(3)」と追記することによって，どのシークエントが追加されたかがわかるようにする．また，(6) で 3 節の傾向を確かめる．

例 1.

(1) 対象とする性質．$f{:}X \rightarrow Y, g{:}Y \rightarrow Z$ とする．このとき，$g \circ f$ が全射ならば，$g$ も全射である．

(2) 日本語証明．[1],[2] の証明を以下に示す．

(2.1)[1] の日本語証明：$z \in Z$ とする．$g \circ f$ が全射なので，$(g \circ f)(x) = z$ を満たす $X$ の要素 $x$ をとる. このとき，$Y$ の要素 $f(x)$ について $g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z$ が成り立つ．

(2.2)[2] の日本語証明：任意の $z \in Z$ をとる．$g \circ f$ が全射であるから，$z = (g \circ f)(x)$ を満たす $x \in X$ が存在する．$y = f(x)$ とおくと，$y \in Y$ であって，

$$z = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y)$$

となる．つまり，任意の $z$ は $g$ の像であり，$g$ が全射であることがわかる．

(3) (2) の証明に対応する図式.
(3.1) (2.1) に対応する図式：

$$\dfrac{\dfrac{f(x) \in Y, z = (g \circ f)(x) \Rightarrow z = g(f(x))}{x \in X, z = (g \circ f)(x) \Rightarrow (\exists y \in Y)(z = g(y))}}{z \in Z, g \circ f \text{ が全射} \Rightarrow (\exists y \in Y)(z = g(y))}$$

(3.2) (2.2) に対応する図式：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{z = (g \circ f)(x) \Rightarrow z = g(f(x))}{y = f(x), z = (g \circ f)(x) \Rightarrow z = g(y)}}{y \in Y, y = f(x), x \in X, z = (g \circ f)(x) \Rightarrow (\exists y \in Y)(z = g(y))}}{(\exists x \in X)(z = (g \circ f)(x)) \Rightarrow (\exists y \in Y)(z = g(y))}}{z \in Z, g \circ f \text{ が全射} \Rightarrow (\exists y \in Y)(z = g(y))}}{g \circ f \text{ が全射} \Rightarrow g \text{ が全射}}$$

(4) (3) の図式をもとにした証明図.
(4.1) (3.1) をもとにした証明図：図 1
(4.2) (3.2) をもとにした証明図：図 2

(6) (3) の図式と (4) の証明図の比較.
(6.1) (3.1) において，(4.1) の推論規則は次の 4 つのグループ (各グループの推論規則は左にあるものは証明図の下にある) にまとめられて，さらに終式が省略されている．①で (傾向 1) を，②で (傾向 3) を確認できる.

③ $(def)[g \circ f]$
③ $(P1), (\exists \wedge$ 右$)$
② $(def)[$全射$], (\forall \rightarrow$ 左$), (\underline{\exists \wedge \text{左}})$
① $(def)[$全射$], (\underline{\forall \rightarrow \text{右}})$

(6.2) (3.2) において (4.2) の推論規則は次の 4 つのグループ (各グループの推論規則は左にあるものは証明図の下にある) にまとめられる．終式は省略されていない．①で (傾向 1) を，②で (傾向 3) を確認できる.

④ $(def)[g \circ f]$
④ $(=)$
④ $(\exists \wedge$ 右$)$
③ $(\underline{\exists \wedge \text{左}}), (\underline{P2})$
② $(def)[$全射$], (\forall \rightarrow$ 左$)$
① $(def)[$全射$], (\underline{\forall \rightarrow \text{右}})$

例 2.
(1) 対象とする性質．$f{:}X \rightarrow Y, g{:}Y \rightarrow Z$ とする．このとき，$f, g$ がとも単射ならば，$g \circ f$ が単射である.

(2) 日本語証明．[1],[2] の証明を以下に示す.
(2.1) [1] の日本語証明：$x_1, x_2 \in X$ で $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ とする．$g$ が単射で $g(f(x_1)) = (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) = g(f(x_2))$ なので $f(x_1) = f(x_2)$ である．さらに $f$ が単射なので $x_1 = x_2$.
(2.2) [2] の日本語証明：$x_1, x_2 \in X$ が $x_1 \neq x_2$ を満たすものとする．$f$ が単射なので，$f(x_1) \neq f(x_2)$ である．そうすると，$g$ も単射なので $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ である．つまり，$g \circ f$ は単射である.

(3) (2) の証明に対応する図式.
(3.1) (2.1) に対応する図式：

$$\dfrac{\dfrac{x_1 \in X, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2), f \text{ が単射} \Rightarrow x_1 = x_2}{x_1 \in X, x_2 \in X, g(f(x_1)) = g(f(x_2)), f \text{ が単射}, g \text{ が単射} \Rightarrow x_1 = x_2}}{x_1 \in X, x_2 \in X, (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2), f \text{ が単射}, g \text{ が単射} \Rightarrow x_1 = x_2}$$

(3.2) (2.2) に対応する図式：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_1 \in X, x_2 \in X, g(f(x_1)) \neq g(f(x_2)) \Rightarrow (g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)}{x_1 \in X, x_2 \in X, f(x_1) \neq f(x_2), g \text{ が単射} \Rightarrow (g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)}}{x_1 \in X, x_2 \in X, x_1 \neq x_2, f \text{ が単射}, g \text{ が単射} \Rightarrow (g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)}}{f \text{ が単射}, g \text{ が単射} \Rightarrow g \circ f \text{ が単射}}$$

(4) (3) の図式をもとにした証明図.
(4.1) (3.1) をもとにした証明図：図 3
(4.2) (3.2) をもとにした証明図：図 4
ただし，単射の定義は，もとになる文献の定義にあわせて，図 3 では (単射 1) を，図 4 では (単射 2) を用いている.

(6) (3) の図式と (4) の証明図の比較.
(6.1) (3.1) において，(4.1) の推論規則は次の 4 つのグループ (各グループの推論規則は左にあるものは証明図の下にある) にまとめられて，さらに終式が省略されている．①で (傾向 1) を，③と④で (傾向 2) を確認できる.

④ $(def)[$単射$], (\forall \rightarrow$ 左$) \times 2, (\rightarrow$ 左$)$
③ $(def)[$単射$], (\forall \rightarrow$ 左$) \times 2, (P1), (P1), (\rightarrow$ 左$)$
② $(def)[g \circ f]$
① $(def)[$単射$], (\underline{\forall \rightarrow \text{右}}) \times 2, (\underline{\rightarrow \text{右}})$

(6.2) (3.2) において，(4.2) の推論規則は次の 4 つのグループ (各グループの推論規則は左にあるものは証明図の下にある) にまとめられている．終式は省略されていない．①で (傾向 1) を，②と③で (傾向 2) を確認できる.

④ $(def)[g \circ f]$
③ $(def)[$単射$], (\forall \rightarrow$ 左$) \times 2, (P1), (P1), (\rightarrow$ 左$)$
② $(def)[$単射$], (\forall \rightarrow$ 左$) \times 2, (\rightarrow$ 左$)$
① $(def)[$単射$], (\underline{\forall \rightarrow \text{右}}) \times 2, (\underline{\rightarrow \text{右}})$

## 5 おわりに

3 節で述べたとおり，2 つの文献 [1],[2] では，$(\exists \wedge$ 左$)$ の扱いは異なるが，$(\forall \rightarrow$ 右$)$ の扱いは同様である．[2] では単射の定義が対偶の形でされ [1] の定義と異なっていたが，推論規則のまとめられ方は [1] と同様であったことが一番興味深かった.

## 参考文献


[1] 嘉田 勝,「論理と集合から始める数学の基礎」，日本評論社，東京，2008

[2] 尾畑伸明,「集合・写像・数の体系」，牧野書店，東京，2019

[3] 佐々木克巳，2018 年度「数理論理学」講義資料，南山大学，2018

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{z\in Z\Rightarrow z\in Z \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{f(x)\in Y\Rightarrow f(x)\in Y \qquad \dfrac{z=g(f(x))\Rightarrow z=g(f(x))}{(3)z=(g\circ f)(x)\Rightarrow z=g(f(x))}\,(def)}{f(x)\in Y, z=(g\circ f)(x)\Rightarrow(\exists y\in Y)(z=g(y))}\,(\exists\wedge\text{右})}{(3)x\in X, z=(g\circ f)(x)\Rightarrow (\exists y\in Y)(z=g(y))}\,(P1)}{(\exists x\in X)(z=(g\circ f)(x))\Rightarrow(\exists y\in Y)(z=g(y))}\,(\exists\wedge\text{左})}{\dfrac{z\in Z,(\forall z\in Z)(\exists x\in X)(z=(g\circ f(x)))\Rightarrow(\exists y\in Y)(z=g(y))}{(3)z\in Z, g\circ f\text{ が全射}\Rightarrow(\exists y\in Y)(z=g(y))}\,(def)}\,(\forall\to\text{左})}{g\circ f\text{ が全射}\Rightarrow(\forall z\in Z)(\exists y\in Y)(z=g(y))}\,(\forall\to\text{右})}{g\circ f\text{ が全射}\Rightarrow g\text{ が全射}}\,(def)
$$

図 1:例 1 の (4.1) の証明図

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{z\in Z\Rightarrow z\in Z \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{y\in Y\Rightarrow y\in Y \qquad \dfrac{\dfrac{z=g(f(x))\Rightarrow z=g(f(x))}{(3)z=(g\circ f)(x)\Rightarrow z=g(f(x))}\,(def)}{(3)y=f(x), z=(g\circ f)(x)\Rightarrow z=g(y)}\,(=)}{(3)y\in Y, y=f(x), x\in X, z=(g\circ f)(x)\Rightarrow(\exists y\in Y)(z=g(y))}\,(\exists\wedge\text{右})}{x\in X, z=(g\circ f)(x)\Rightarrow (\exists y\in Y)(z=g(y))}\,(P2)}{(3)(\exists x\in X)(z=(g\circ f)(x))\Rightarrow(\exists y\in Y)(z=g(y))}\,(\exists\wedge\text{左})}{z\in Z,(\forall z\in Z)(\exists x\in X)(z=(g\circ f(x)))\Rightarrow(\exists y\in Y)(z=g(y))}\,(\forall\to\text{左})}{(3)z\in Z, g\circ f\text{ が全射}\Rightarrow(\exists y\in Y)(z=g(y))}\,(def)}{g\circ f\text{ が全射}\Rightarrow(\forall z\in Z)(\exists y\in Y)(z=g(y))}\,(\forall\to\text{右})}{(3)g\circ f\text{ が全射}\Rightarrow g\text{ が全射}}\,(def)
$$

図 2:例 1 の (4.2) の証明図

$B$ :

$$
\dfrac{x_1\in X\Rightarrow x_1\in X \quad x_2\in X\Rightarrow x_2\in X \quad \dfrac{f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f(x_1)=f(x_2) \quad x_1=x_2\Rightarrow x_1=x_2}{f(x_1)=f(x_2), f(x_1)=f(x_2)\to x_1=x_2\Rightarrow x_1=x_2}\,(\to\text{左})}{x_1\in X, x_2\in X, f(x_1)=f(x_2), (\forall x_1)(\forall x_2)(f(x_1)=f(x_2)\to x_1=x_2)\Rightarrow x_1=x_2}\,(\forall\to\text{左})\times 2
$$

$A$ :

$$
\dfrac{g(f(x_1))=g(f(x_2))\Rightarrow g(f(x_1))=g(f(x_2)) \quad \dfrac{B}{(3)x_1\in X, x_2\in X, f(x_1)=f(x_2), f\text{ が単射}\Rightarrow x_1=x_2}\,(def)}{x_1\in X, x_2\in X, g(f(x_1))=g(f(x_2)), g(f(x_1))=g(f(x_2))\to f(x_1)=f(x_2), f\text{ が単射}\Rightarrow x_1=x_2}\,(\to\text{左})
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{f(x_1)\in Y\Rightarrow f(x_1)\in Y}{x_1\in X\Rightarrow f(x_1)\in Y}\,(P1) \quad \dfrac{f(x_2)\in Y\Rightarrow f(x_2)\in Y}{x_2\in X\Rightarrow f(x_2)\in Y}\,(P1) \quad A}{x_1\in X, x_2\in X, g(f(x_1))=g(f(x_2)), (\forall y_1)(\forall y_2)(g(y_1)=g(y_2)\to y_1=y_2), f\text{ が単射}\Rightarrow x_1=x_2}\,(\forall\to\text{左})\times 2}{(3)x_1\in X, x_2\in X, g(f(x_1))=g(f(x_2)), f\text{ が単射}, g\text{ が単射}\Rightarrow x_1=x_2}\,(def)}{(3)x_1\in X, x_2\in X, (g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2), f\text{ が単射}, g\text{ が単射}\Rightarrow x_1=x_2}\,(def)}{x_1\in X, x_2\in X, f\text{ が単射}, g\text{ が単射}\Rightarrow (g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)\to x_1=x_2}\,(\to\text{右})}{\dfrac{f\text{ が単射}, g\text{ が単射}\Rightarrow(\forall x_1\in X)(\forall x_2\in X)((g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)\to x_1=x_2)}{f\text{ が単射}, g\text{ が単射}\Rightarrow g\circ f\text{ が単射}}\,(def)}\,(\forall\to\text{右})\times 2
$$

図 3:例 3 の (4.1) の証明図

$C$ :

$$
\dfrac{f(x_1)\neq f(x_2)\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2) \quad \dfrac{(g\circ f)(x_1)\neq(g\circ f)(x_2)\Rightarrow(g\circ f)(x_1)\neq(g\circ f)(x_2)}{(3)g(f(x_1))\neq g(f(x_2))\Rightarrow(g\circ f)(x_1)\neq(g\circ f)(x_2)}\,(def)}{f(x_1)\neq f(x_2), f(x_1)\neq(x_2)\to g(f(x_1))\neq g(f(x_2))\Rightarrow(g\circ f)(x_1)\neq(g\circ f)(x_2)}\,(\to\text{左})
$$

$B$ :

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{f(x_1)\in Y\Rightarrow f(x_1)\in Y}{x_1\in X\Rightarrow f(x_1)\in Y}\,(P1) \quad \dfrac{f(x_2)\in Y\Rightarrow f(x_2)\in Y}{x_2\in X\Rightarrow f(x_2)\in Y}\,(P1) \quad C}{x_1\in X, x_2\in X, f(x_1)\neq f(x_2), (\forall y_1)(\forall y_2)(y_1\neq y_2\to g(y_1)\neq g(y_2))\Rightarrow(g\circ f)(x_1)\neq(g\circ f)(x_2)}\,(\forall\to\text{左})\times 2}{(3)x_1\in X, x_2\in X, f(x_1)\neq f(x_2), g\text{ が単射}\Rightarrow(g\circ f)(x_1)\neq(g\circ f)(x_2)}\,(def)
$$

$A$ :

$$
\dfrac{x_1\neq x_2\Rightarrow x_1\neq x_2 \quad B}{x_1\in X, x_2\in X, x_1\neq x_2, x_1\neq x_2\to f(x_1)\neq f(x_2), g\text{ が単射}\Rightarrow(g\circ f)(x_1)\neq(g\circ f)(x_2)}\,(\to\text{左})
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x_1\in X\Rightarrow x_1\in X \quad x_2\in X\Rightarrow x_2\in X \quad A}{x_1\in X, x_2\in X, x_1\neq x_2, (\forall x_1)(\forall x_2)(x_1\neq x_2\to f(x_1)\neq f(x_2)), g\text{ が単射}\Rightarrow(g\circ f)(x_1)\neq(g\circ f)(x_2)}\,(\forall\to\text{左})\times 2}{(3)x_1\in X, x_2\in X, x_1\neq x_2, f\text{ が単射}, g\text{ が単射}\Rightarrow(g\circ f)(x_1)\neq(g\circ f)(x_2)}\,(def)}{x_1\in X, x_2\in X, f\text{ が単射}, g\text{ が単射}\Rightarrow x_1\neq x_2\to(g\circ f)(x_1)\neq(g\circ f)(x_2)}\,(\to\text{右})}{\dfrac{f\text{ が単射}, g\text{ が単射}\Rightarrow(\forall x_1\in X)(\forall x_2\in X)(x_1\neq x_2\to(g\circ f)(x_1)\neq(g\circ f)(x_2))}{(3)f\text{ が単射}, g\text{ が単射}\Rightarrow g\circ f\text{ が単射}}\,(def)}\,(\forall\to\text{右})\times 2
$$

図 4:例 3 の (4.2) の証明図