中学校の幾何問題の発展的考察

—「図形と相似」を中心として—

M2020SS003 長瀬隼大
指導教員: 佐々木克巳

1 はじめに

本研究の目的は, 中学校の幾何問題を発展的に考察し, その結果を学校教育に活かすことである. 特に, 中点連結定理を用いた問題を対象とする.

中点連結定理の考察は, 加藤, 杉山, 熊倉[2]でも考察されているが, 本研究は, それらの研究とは, 異なる方向の考察をする. その発展的考察では, 問題の一般化や特殊化を行い, その結果から複数の類似問題を作成する. 一般化は, 問題のある条件が成立しなかった場合にどうなるか(問題の条件変え), 逆命題は成立するか, 他の問題との共通点はないかを手がかりに行う. 具体的な条件変えは, 点の位置を変える条件変え, 中点連結定理を適用する三角形の組み合わせ方を変える条件変え, 用いる性質(中点連結定理以外)を別の性質に変える条件変えである. これらの条件変えは, 全ての場合が尽くされるように行う. そして, その特殊な場合を考察することで複数の類似問題を作成する.

本研究が対象とした問題は, [1],[5]などから抽出した 6 題の証明問題である. 本稿では, そのうちの 2 題について述べる. これらの考察では, 複数の証明を比較する必要があり, そのために正しいと認められた性質と証明の表現を統一的に扱うことにする. 本稿では, 次節でその内容を示し, 3 節と 4 節では抽出した 2 題の考察の一部を述べる. また, 5 節ではその 2 題の共通点に着目し, 図形の位置関係からどのような性質が導かれるかを考察する.

2 認められた性質と証明の表現方法

この節では, 本稿で認めている性質と, 本研究における証明の表現方法を述べる. 認めている性質は, 次の性質 2.1~2.6 である. どれも中学校の教科書([4]など)で紹介されている性質である.

性質 2.1. 2 つの三角形は, 次の少なくとも 1 つの条件を満たすとき, 合同である.
(i) 1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい
(ii) 2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しい
(iii) 3 組の辺がそれぞれ等しい

性質 2.2(中点連結定理). △ABC の 2 辺 AB, AC の中点を, それぞれ, M, N とすると次が成り立つ.

$$MN//BC,\ MN=BC/2$$

性質 2.3. 合同な図形では, 対応する線分の長さはそれぞれ等しく, 対応する角の大きさもそれぞれ等しい.

性質 2.4. △ABC において, AB=AC⇔∠B＝∠C である.

性質 2.5. 平行線の錯角は等しい. また, 同位角も等しい.

性質 2.6. 三角形の内角の和は 180° である.

本研究では, 証明を, 文を並べた表で表現する. 表の列は文番号, 文, 根拠で構成され, さらに, 文番号の列は,「P から Q が導かれた」のような導出関係を一つの根拠として扱うために, その導出関係の証明に現れる文番号の列を, 別の列に記載する([3]参照).

3 具体例 1

この節では, [5]から抽出した次の問題を考察する.

問題 3.1[5]. AB>AC の△ABC において, ∠A の二等分線上の点を D とする. また, ∠BAD=∠CAD＝35° である. 点 B から線分 AD に引いた垂線の足を E とし, 点 C から線分 AD に引いた垂線の足を F とする. また, 辺 BC の中点を M とする(図 3.1 参照).
(1) AB//FM を証明せよ.
(2) AC//ME を証明せよ.
(3) ∠EMF の大きさを求めよ.
証明(図 3.2 参照).

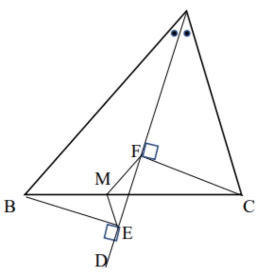


図 3.1:問題 3.1 の図

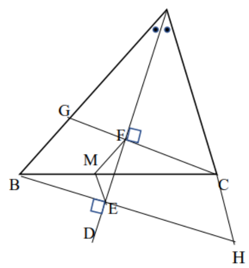


図 3.2:問題 3.1 の証明の図

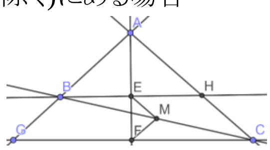
1		△ABC において, ∠BAD=∠CAD＝35°, BE ⊥ AD, CF ⊥ AD, BM=CM である	仮定

	2	G は, 直線 AB と直線 CF の交点 H は, 直線 AC と直線 BE の交点	仮定
	3	∠GAF＝∠CAF	1,2
	4	∠AFG=∠AFC＝90°	1,2
	5	AF=AF	等号の性質
	6	△ACF≡△AGF	3,4,5,性質 2.1
	7	CF=GF	6,性質 2.3
	8	AB//FM	1,7,性質 2.2
	9	AE=AE	等号の性質
	10	∠AEB=∠AEH=90°	1,2
	11	△ABE≡△AHE	1,9,10,性質 2.1
	12	HE=BE	11,性質 2.3
	13	AH//ME	1,12,性質 2.2
	14	∠MFE=∠BAF=35°	1,8,性質 2.5
	15	∠FEM=∠CAF =35°	1,13,性質 2.5
	16	∠FME=110°	14,15,性質 2.6
17		AB//FM,AH//ME, ∠FME=110°	2-16

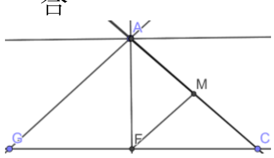
この問題に対して, 本研究では, B を動かす条件変えを考察した. 具体的な動かし方は, 図 3.3 の(C3.1), (C3.2), (C3.3)の 3 つの場合である. また, もとの問題と(C3.1), (C3.2), (C3.3)の違いは, 次のようにもまとめられる.

もとの問題:AD は∠A の二等分線, AB＞AC
(C1):AD は∠A の二等分線, AB＜AC
(C2):A=B
(C3):AD は∠A の外角の二等分線

(C3.1) B が線分 AG 上(端点を除く)にある場合



(C3.2)A=B=E=H の場合



(C3.3)B が線分 GA の延長線上の場合

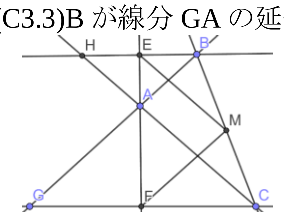


図 3.3:各場合の図

もとの問題の証明と, 各場合の証明の比較の結果は次のとおりである.
(C3.1)および(C3.3):もとの問題の証明は, B の位置が異なるが本質的には同じものになる.
(C3.2):(1)は, A と B が重なるため, 対応する問題はできないが, AG//FM は成立する. (2)は, A と E が重なるため, 直線 AC と直線 ME は一致する. (3)は, もとの問題と同じ証明になる.

4 具体例 2

この節では, [1]から抽出した次の問題を考察する.

問題 4.1[1]. AB＞AC の△ABC で, 辺 AB 上に点 D を, BD=AC となるようにとる. また, 辺 BC の中点を E, 線分 AD の中点を F とする. 線分 EF の延長と辺 CA の延長との交点を G とするとき, △AGF は二等辺三角形であることを証明せよ(図 4.1 参照).

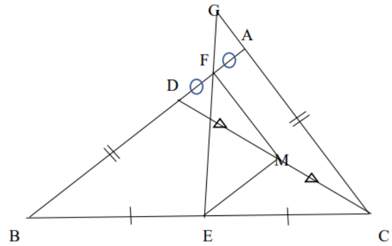


図 4.1:問題 4.1 の図

証明.

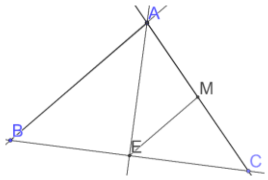
1		AB>AC の△ABC がある. D は, BD=AC を満たす辺 AB 上の点. E は, 辺 BC の中点. F は, 線分 AD の中点. G は, 直線 EF と直線 CA の交点.	仮定
	2	M は, 線分 CD の中点	仮定
	3	EM//BD	1,2,性質 2.2
	4	EM=BD/2	1,2,性質 2.2
	5	FM//AC	1,2,性質 2.2
	6	FM=AC/2	1,2,性質 2.2
	7	EM=FM	1,4,6
	8	∠MEF=∠MFE	7,性質 2.4
	9	∠AFG=∠MEF	1,3,性質 2.5
	10	∠AGF=∠MFE	1,5,性質 2.5
	11	∠AFG=∠AGF	8,9,10
	12	△AGF は二等辺三角形	11,性質 2.4
13		△AGF は二等辺三角形	2-12

この問題に対して, 本研究では 2 種類の条件変えを考察した. 1 つは B を動かす条件変え, もう 1 つは F を AB の中点とした上で, B を動かす条件変えである. 本稿では, この前者の概要を示す. B の動かし方は, 図 4.2 の(C4.1)~(C4.6)の場合を考える. もとの問題も含めて, この 7 つの場合の証明は, 次の 3 つのグループに分けられる.

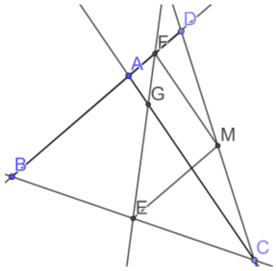
I:もとの問題,(C4.2),(C4.4),(C4.5),(C4.6)
II:(C4.1)

III:(C4.3)

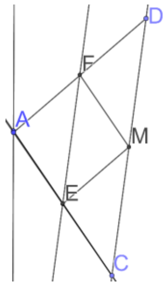
(C4.1) AB=AC かつ D=A (F=G=A となる)



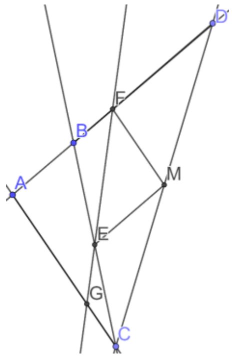
(C4.2) AB<AC かつ A が線分 BD 上にある



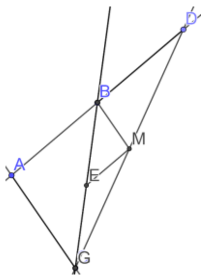
(C4.3) B=A かつ C≠D



(C4.4) AB<AC かつ A が線分 BD 上にない



(C4.5)AB=AC かつ D≠A (F=B,C=G となる)



(C4.6)AB>AC かつ D が辺 AB 上にない

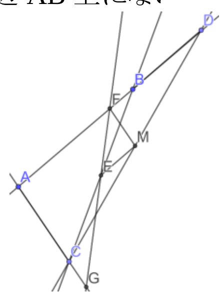


図 4.2:各場合の図

I は，どの場合も同様に証明できて，△CBD と△ADC に中点連結定理を適用している. II と III は，△AGF を定義できないが，もとの問題の証明に現れる△EFM が二等辺三角形であること(EM=FM)を示すことができる.

5 問題の比較をもとにした発展的考察

本研究で扱った問題のうち，前 2 節の問題 3.1 と問題 4.1 には次の共通点がある.
共通点 1. 中点連結定理を適用する 2 つの三角形は，中点をとる 1 辺だけが重なっている.
共通点 2. 中点連結定理を適用する 2 つの三角形の中点をとらない辺は，共有点をもたない.
この節では，この 2 つの共通点をみたす 2 つの三角形について，問題 4.1 と同様の結果が得られるか考察し，さらに，問題 3.1 をふまえて，その逆が成り立つかを考察する. これらを統一的に扱うために次の前提条件を固定する(記号は図 4.1 にあわせている).

前提条件 5.1.
(1)2 つの三角形を△ADC と△BCD とおく(A と B は直線 CD に対して反対側にある).
(2)辺 BC，辺 AD，辺 CD の中点をそれぞれ E, F, M とおく.
(3)2 直線 CA と EF の交点を G とする.
(4)2 直線 DB と EF の交点を H とする.

すると，ここで考察する性質は次のように表現できる.

性質 5.2. AC=BD⇔∠EGA=∠EHB

この性質と前 2 節の問題(問題 3.1 と問題 4.1)の関係を明らかにしておく. 問題 4.1 は前提条件 5.1 のもとでは H=F の場合である. その筋道は，図 5.1 のとおりであり，その筋道に性質 5.2(⇒)の証明が含まれる. また，問題 3.1 は，用いられる記号を前提条件 5.1 の記号におきかえて考える. 前提条件 5.1 のもとでは，H=G の場合に相当し，さらに，問題 3.1 に E と F が中点であるという条件を加えて考えることになる. この場合，∠E=90° も∠F=90° も用いずに FM=EM を導けて，さらに AC=BD を導ける. その筋道は図 5.2 のとおりであり，性質 5.2 の逆の証明でもある. このような見方をすると，性質 5.2(⇒)が問題 4.1 の，性質 5.2(⇐)が問題 3.1 の一般化とみることができる.

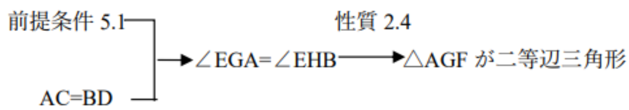


図 5.1:問題 4.1 の筋道

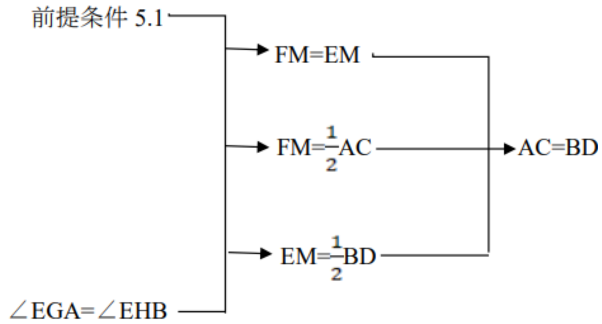


図 5.2:問題 3.1 からわかる性質の筋道

さて，性質 5.2 が成り立つかどうかを次の 4 つの場合において考察する.

(C5.1)直線 BD が A を通る(H=F の)場合(図 4.1 参照)
(C5.2)直線 BD が G を通る(H=G の)場合(図 5.3 参照)
(C5.3)直線 BD が線分 AG と交わる場合(図 5.4 参照)

(C5.4)BD//AC の場合(図 5.5 参照)

まず，性質 5.2(⇒)は，(C5.4)以外は成立する．(C5.1)は，問題 4.1 より成立する．(C5.2)，(C5.3)の証明は，以下に示す．(C5.4)は，AC//BD//EF であるため，性質 5.2 の右辺が定義されない．また，前提条件 5.1 の(1)，(2)と AC//BD//EF から，AC=BD を導くこともできない．反例を図 5.6 に示す．

図 5.3：(C5.2)の図

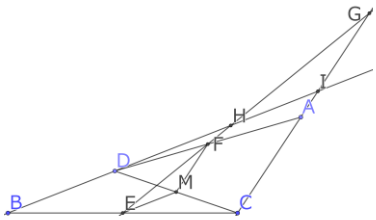


図 5.4：(C5.3)の図

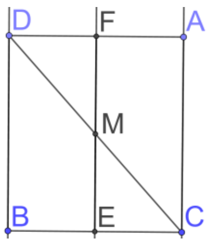


図 5.5：(C5.4)の図

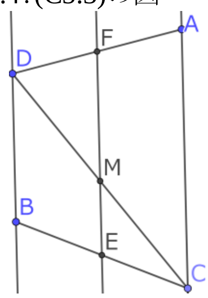


図 5.6：反例(ABCD が AC//BD，AC≠BD の台形のとき)

(C5.2)の証明．

1	前提条件 5.1	仮定
2	AC=BD	仮定
3	EM//BD,FM//AC	1,性質 2.2
4	EM=BD/2,FM=AC/2	1,性質 2.2
5	EM=FM	2,4
6	∠MEF=∠MFE	5,性質 2.4
7	∠MEF=∠EGB	3,性質 2.5
8	∠MFE=∠EGC	3,性質 2.5
9	∠EHB=∠EGC	6,7,8

(C5.3)の証明．(1~6 は(C5.2)の証明と同じ)

7	∠MEF=∠EHB	3,性質 2.5
8	∠MFE=∠EGC	3,性質 2.5
9	∠EHB=∠EGC	6,7,8

次に，性質 5.2(⇐)は，(C5.4)以外は成立する．(C5.2)は，問題 3.1 と図 5.3 より成立する．(C5.1)，(C5.3)の証明は以下に示す．

(C5.1)の証明．

1	前提条件 5.1	仮定
2	∠EGC=∠EFB	仮定
3	EM//BD,FM//AC	1,性質 2.2
4	EM=BD/2,FM=AC/2	1,性質 2.2
5	∠EGC=∠MFE	3,性質 2.5
6	∠EFB=∠MEF	3,性質 2.5
7	∠MFE=∠MEF	2,5,6
8	FM=EM	7,性質 2.4
9	AC=BD	4,8

(C5.3)の証明．(1~4 は(C5.1)の証明と同じ)

5	∠EHB=∠MEF	3,性質 2.5
6	∠EGC=∠MFE	3,性質 2.5
7	∠MFE=∠MEF	2,5,6
8	FM=EM	7,性質 2.4
9	AC=BD	4,8

以上より，(C5.4)のような特殊な場合を除き，性質 5.2 が成り立つことが分かった．

6 おわりに

本研究の発展的考察は，ある条件が成立しなかった場合，逆命題，他の問題との共通点を手がかりに行った．この手がかりの中の，「条件」と「共通点」は，図形の位置関係に関係するものに着目した．これらは，類似問題の作成などに役立つと考える．これらを適用した結果，与えられている問題の意図をより深く理解できるだけでなく，他の問題との関係も理解することができ，さらに，その様な手法についても理解できた．本研究で培った経験を学校現場においても活用していきたい．また，この考え方は，図形の位置関係以外にも適用できるので，他の分野の問題においても応用できると考える．今後は，他の分野の問題についても同様の考察により，理解を深めていきたい．

参考文献

[1] 市川博規他 9 名，『新 A クラス中学幾何問題集(5 訂版)』，昇龍堂出版，東京，2013

[2] 加藤健二，杉山篤史，熊倉啓之，「中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導」，静岡大学教育学部附属教育実践総合センター紀要，30，pp.244-253，静岡大学教育学部附属教育実践総合センター，2020

[3] 長瀬隼大，「ユークリッド原論と中学校の幾何問題」，南山大学理工学部ソフトウェア工学科卒業論文，2019

[4] 岡本和夫他 131 名，『未来へひろがる数学 1~3』，新興出版社啓林館，大阪，2020

[5] 坂田昭，『有名高校への数学』，評論社，東京，1989