

安定多様体法を用いた回転型二重倒立振子の振り上げ安定化制御

M2020SC003 松元大輝

指導教員：中島明

1 はじめに

劣駆動システムとは、アクチュエータの数がシステムの自由度よりも小さい機構のことである。これらを恣意に運動させるためには駆動部より少ない数のアクチュエータでシステム全体を制御することが求められる。また、多くの場合強い非線形性を持つ。そのため、制御難度が高い系である。しかし、少ないアクチュエータで機器が構成されることにより、部品の数量の減少による軽量化、低コスト化、また省エネルギー化の効果が期待できる。ロボット工学や航空宇宙工学では幅広く応用されており、注目を集めているテーマの一つである [1]。

倒立振子は代表的な制御対称の一つであり、強い非線形性を有する系である。非線形最適制御の制御性能の評価のため、研究の制御対称としてよく用いられてきた。今日までにも堀部らによる回転型の振り上げ安定化制御 [2] や、竹田による回転かつ並列型の 1 回での振り上げ安定化制御シミュレーション [3] 等多くの研究がされている。

本論文では、回転型倒立振子においてアームの回転軸を対称として並列に振子を追加した系である回転型二重倒立振子を取り扱う。非線形最適制御則により、単一のコントローラでの複数回での振り上げ安定化制御を実現する。非線形最適制御問題では Hamilton-Jacobi 方程式の求解が求められるが、非線形偏微分方程式を解くことは困難であり、これまでに盛んに研究が行われてきた。非線形最適制御コントローラは近年開発された数値計算法である安定多様体法 [4, 5] を計算機上で実装することにより Hamilton-Jacobi 方程式の近似解を得ることで設計する。これまでに同手法は Acrobot の平衡姿勢間遷移制御 [6, 7, 8] や磁気浮上系の加速度制約下での安定化制御 [9]、航空機の制御 [10, 11] などにおいてその効果が実証されている。

2 非線形最適制御問題

ここでは非線形システムにおける最適制御問題に対し、安定多様体法理論よりシステムに対する最適制御入力がどのような形になるかを述べる。以下では次のような非線形時不変システムを考え、二次形式によって表現されるような評価関数を最小化する問題について述べる。

$$\begin{cases} \sum : \dot{x} = f(x) + g(x)u, x(0) = x_0 \\ J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $Q \geq 0, R > 0, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, g(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ とする。このシステムに対して動的計画法を適用する。ここで Hamiltonian $H(x, u, p)$ は、随伴変数を $p \in \mathbb{R}^n$ とし、

$$H(x, u, p) = p^T (f(x) + g(x)u) + x^T Q x + u^T R u \quad (2)$$

と表される。ここで、一般的な最適制御理論において

$$\min_u H(x, u, p) = H(x, \bar{u}(x, p), p) \quad (3)$$

とする関数 $\bar{u}(x, p)$ 及び Hamilton-Jacobi 方程式

$$H \left(x, \bar{u} \left(x, \frac{\partial V}{\partial x} \right), \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0 \quad (4)$$

の解 $V(x)$ が求められたとする。このときの最適フィードバック制御入力 $u^*(t)$ は、

$$u^*(x^*) = u \left(x^*(t), \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (5)$$

で与えられる。ただし、 $x^* = x^*(t)$ は最適入力での状態応答を表し、

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u^*(x) \quad (6)$$

の解である。さらに、初期値 x_0 に対する評価関数の最小値 J^* は

$$J^*(x_0) = V(x_0) \quad (7)$$

と与えられる。これを評価関数が x, u の二次形式で与えられている場合に適用することで、

$$u(x, p) = -\frac{1}{2} R^{-1} g(x)^T p \quad (8)$$

となり、最適フィードバック制御入力を以下のように得る。

$$u^*(x) = -\frac{1}{2} R^{-1} g(x)^T \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \quad (9)$$

これと (2) 式より、以下の Hamilton-Jacobi 方程式が得られる。

$$\begin{aligned} H(x, p) &= \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T f(x) \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T g(x) R^{-1} g(x)^T \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) + x^T Q x \\ &= p^T f(x) - \frac{1}{4} p^T g(x) R^{-1} g(x)^T p + x^T Q x = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

(10) 式の Hamiltonian に対する Hamilton 正準方程式は以下ようになる。

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p) \end{cases} \quad (11)$$

安定多様体法理論 [4] により、Hamilton-Jacobi 方程式の解 $V(x)$ の偏微分である $\frac{\partial V}{\partial x}$ と正準方程式の解 $p(x)$ は等価であることが知られている。よって最適制御入力は以下の式で置き換えることができる。

$$u^*(x) = -\frac{1}{2} g(x)^T p(x) \quad (12)$$

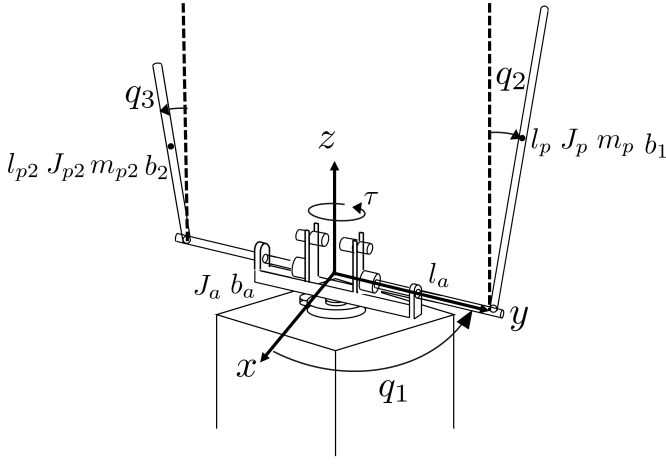


図1 Parallel rotary inverted pendulum model

3 モデリング

並列回転型倒立振り子は図1で表される並列型かつ回転型の二重倒立振り子である。まず、モータに接続されたアームが、モータと同期して水平面内を回転する。そして、アームのそれぞれの先端部分に取り付けられた振り子が鉛直面内を自由に回転する。ただし、二つの振り子はそれぞれ非駆動で回転する。このように、並列回転型倒立振り子は強い非線形性と劣駆動性を持つ。

表1に、本研究での各変数と名称との対応を示す。ここで、制御難度が振子の長さについて可変であるとされている[12]。ここでは振子はアルミ製とし、長いものを20cm, 短いものを15cmとした。

表1 Parameter Set

記号	名称
J_a	回転アームの慣性モーメント
J_p	長い振子の慣性モーメント
J_{p2}	短い振子の慣性モーメント
m_p	長い振子の質量
m_{p2}	短い振子の質量
l_a	アームの長さ
l_p	長い振子の回転中心から重心への距離
l_{p2}	短い振子の回転中心から重心への距離
b_a	アームの粘性摩擦
b_1	長い振子の粘性摩擦
b_2	短い振子の粘性摩擦
g	重力加速度
R_a	電気子抵抗
K_E	逆起電力係数
K_T	トルク定数
n	モータとアームのギア比

ラグランジアン L は運動エネルギー T , ポテンシャルエネルギー U より次のように表される。

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q) \quad (13)$$

これより Euler-Lagrange の運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

と表現でき、次に示す Lagrange の非線形運動方程式 (14) が得られる。

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = \tau \quad (14)$$

モータの特性を以下のように表し, t_a, t_b で置く。

$$\begin{aligned} \tau &= -\frac{n^2 K_T K_E}{R_a} \dot{q}_1 + \frac{n K_T}{R_a} u, \\ t_a &= \frac{n^2 K_T K_E}{R_a} \dot{q}_1, t_b = \frac{n K_T}{R_a} \end{aligned}$$

また、各リンクの粘性摩擦 $F_b = [b_a \dot{q}_1, b_1 \dot{q}_2, b_2 \dot{q}_3]^T$ を考慮すると、

$$\tau = -F_b - T_a + T_b u \quad (15)$$

と表される。ただし $T_a = [t_a, 0, 0]^T$, $T_b = [t_b, 0, 0]^T$ である。ここで、状態変数を $x = [q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3]^T$ とし、次に示すような非線形状態方程式 (16) を得る。

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (16)$$

4 制御器の設計

本節では、Hamilton-Jacobi 方程式を数値的に解く手法である安定多様体法と二点境界値ソルバを用いたコントローラ設計を行う。制御問題設定として、両方の振り子が振り下がった状態からの振り上げ安定化制御を対称とする。積分漸化式の繰り返し計算により解軌道を得ることで安定多様体面を構成し、これより状態フィードバック関数を得る流れで制御器設計を行う。また、Hamilton-Jacobi 方程式の非一意解性を利用した複数回振り上げ安定化コントローラの設計も行う。本節では、以上の内容についてその過程を述べる。

4.1 振り上げ解軌道の探索

本節では解軌道探索に用いた評価関数

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad Q \geq 0, R > 0 \quad (17)$$

の状態量に対する重みをアームの角度にのみ付け、

$$Q = \text{diag}[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], \quad R = 10$$

と決定した。図2に安定多様体法によって求めた1回での振り上げの両振り子に関する解軌道を示す。

緑で示す軌道が振り上げの解軌道であり、二本の振り子が降り下がった状態(桃色の点それぞれの初期姿勢を示す)から振り上がった状態である原点へと向かっていることが確認できる。コントローラの設計手順で、得られた数値解である $p(t)$, $x(t)$ を用いて状態フィードバックの形をとるような多項式を近似によって求める必要がある。しかし緑の軌道に示すような一本のデータのみでは、実験で生じるノイズやモデル誤差、4.3節で述べる多項式

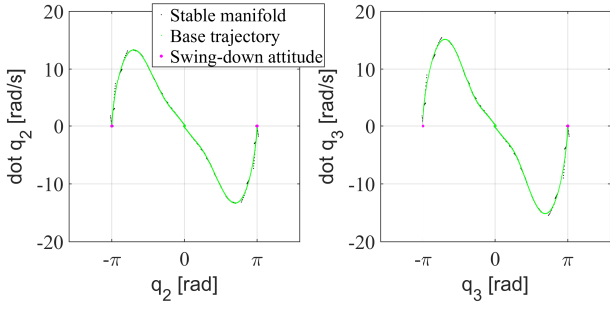


図 2 1 swing-up trajectory

近似の近似誤差などにより、応答が求めた解軌道から外れてしまう際、最適入力を与えることができない。そこで、緑で示す軌道を基準の軌道として、これを覆うような黒色の軌道が示す安定多様体面を求解し、これらの軌道一本一本を制御器設計に全て利用する。この手順を設けることで、実験の際基準軌道から振り上げ軌道が外れてしまっても、安定多様体面の $p(x)$ の値を用いることで所望の制御目的を達成するような有効な入力を与えることができる。

4.2 複数回振り上げ解軌道の探索

Hamilton-Jacobi 方程式には同一の制御目的を達成するような複数の解軌道が非一意解として存在することがある。並列回転型倒立振り子でも複数回振り上げ軌道として非一意解が存在する。一般的に振り上げ回数が大きいほど最適入力小さくなる傾向にある。本報告では、並列回転型倒立振り子に対して複数回振り上げを実現する Hamilton-Jacobi 方程式解軌道を二点境界値ソルバの利用による探索によって得る。探索にあたって、評価関数 (17) の設計パラメータを

$$Q = \text{diag}[5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], R = 10$$

のように決定した。図 3 に得られた 2 回振り上げの解軌道を、図 4 に 3 回振り上げの解軌道を示す。

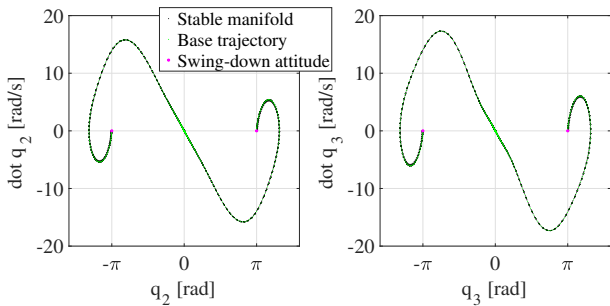


図 3 2 swing-up trajectory

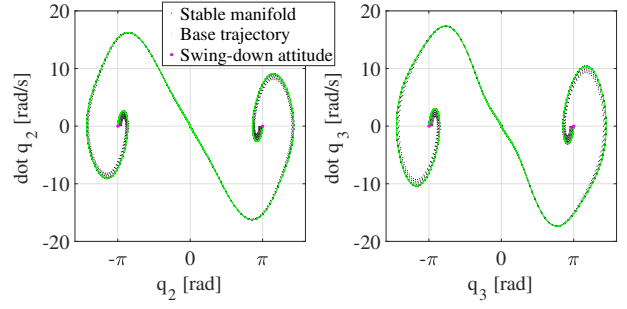


図 4 3 swing-up trajectory

4.3 状態フィードバックの構成

ここでは得られた解軌道を用いて状態フィードバックの形となるコントローラを設計する工程について述べる。安定多様体法で反復計算によって得られた解軌道は数値データ x と p であるため、このデータから計算される制御入力 u を状態変数 x の多項式で近似する。このとき、状態量について最大 5 次と定め最小二乗法により多項式近似を行う。得られる多項式近似最適状態フィードバックコントローラは以下のようになる。

$$u^* \simeq C_{\text{pol}} Z(x) \quad (18)$$

$$C_{\text{pol}} = [c_{11} \ c_{12} \ \cdots \ c_{1m}] \in \mathbb{R}^{1 \times m}$$

$$Z(x) = [x_1, \ \cdots, \ x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} x_4^{i_4} x_5^{i_5} x_6^{i_6}, \ \cdots] \in \mathbb{R}^m$$

ただし、 $0 \leq i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6 \leq 5$, $\sum_{k=1}^6 i_k \leq 5$ である。ここで、最大近似次数と計算負荷はトレードオフの関係にある。得られた多項式の次数を表 2 に示す。振り上げ

表 2 Approximation order

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1 swing up	1	1	1	3	1	1
2 swing up	3	2	2	1	1	1
3 swing up	2	2	1	2	2	5

回数の増加に応じてフィードバックコントローラが高次化していることが読み取れる。これは、振り上げ回数に応じて最適入力複雑になり、多項式近似の難易度があることに起因している。

5 フィードバックシミュレーション

本節では、生成したフィードバックコントローラを用いたシミュレーションを行う。図 5-7 は基準軌道の Open-loop シミュレーションによる結果と生成したコントローラによるフィードバックシミュレーションの結果の時系列データ及び入力である。

各応答を見ると、Open-loop による結果とフィードバックによる結果は多少誤差があるものの振り上げ安定化は達成されているといえる。3 回振り上げに着目すると、入力が 0.5 秒付近において少々振動的であるが、これは 2 に示した近似次数が起因している。振り上げ回数に応じて

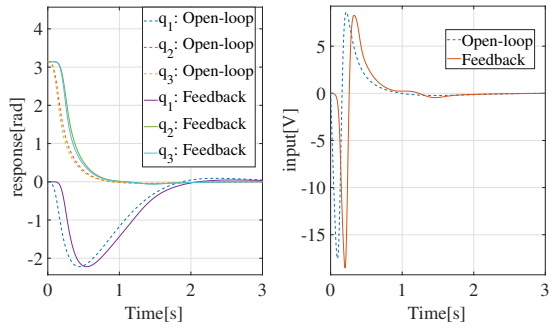


図 5 1 swing-up simulation result

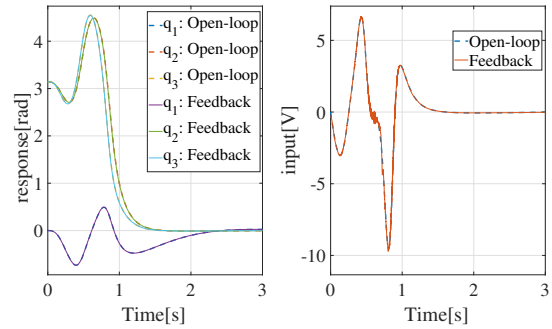


図 7 3 swing-up simulation result

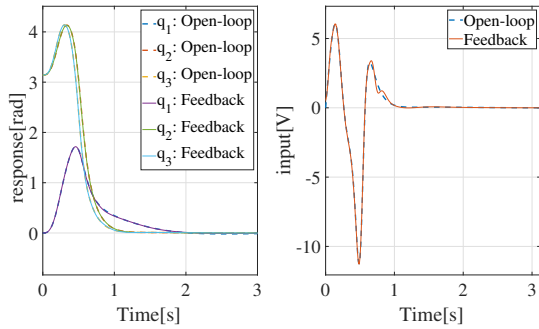


図 6 2 swing-up simulation result

フィードバックコントローラが高次化していることが読み取れ、これが作用し振動的な入力を生み出していると言える。各振り上げ回数の結果を比較すると、振子が目的姿勢に向かう際の入力のピークが振り上げ回数に応じて減少しており、振子の反動を利用して必要な入力電圧を低減できていると考えられる。

6 おわりに

本論文では、Hamilton-Jacobi 方程式の近似解を安定多様体法によって求めることで、非一意解の探索を行い並列回転型倒立振子の複数回振り上げによる同時振り上げ安定化解軌道を導出した。更に複数回振り上げ解軌道の周りを包括するような安定多様体面を求解し、それらから得られる状態フィードバックコントローラを設計することでフィードバックシミュレーションでの振り上げ安定化を達成した。今後は実機での振り上げ安定化制御の達成が望まれる。また、同システムに限らず、大車輪運動を可能とする最適制御器の設計も興味深い問題である。

参考文献

- [1] Yang Liu and Hongnian Yu. A survey of underactuated mechanical systems. *IET Control Theory and Applications*, Vol. 7, No. 7, pp. 921-935, 2013.
- [2] Takamasa Horibe and Noboru Sakamoto. Optimal swing up and stabilization control for inverted pendulum via stable manifold method. *IEEE Trans. on Control System Technology*, Vol.26, No. 2, pp. 708-715, 2017.
- [3] 竹田賢矢. 非線形最適制御による並列回転型倒立振子の振り上げ安定化制御. Master's thesis, 南山大学,

2021.

- [4] Noboru Sakamoto and Arjan J. van der Schaft. Analytical approximation methods for the stabilizing solution of the Hamilton-Jacobi equation. *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol.53, No. 10, pp. 2335-2350, 2008.
- [5] Noboru Sakamoto. A recent progress in the optimal control design under various constraints. In *Proc. of IFAC Conference on Manufacturing, Management, and Control*, pp. 1522-1527, 2013.
- [6] 小塚健太, 坂本登, 中島明, 鈴木達郎, 米川翔太, 西田裕貴, 宮野峻. 安定多様体法を用いたアクロボットの平衡姿勢間遷移制御-制御系設計と検証実験-. 第 5 回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム, 2018.
- [7] 竹田賢矢, 坂本登, 中島明. Acrobot の最適大域姿勢遷移に関する数値解析的考察. 第 7 回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム, 2020.
- [8] K.Takeda, N.Sakamoto, and A.Nakashima. Experimental verification of acrobot transitions between unstable equilibrium attitudes via stable manifold method. *SICE Annual Conference 2020*, 2020.
- [9] Anh Tuan Tran, Shogo Suzuki, and Noboru Sakamoto. Nonlinear optimal control design considering a class of system constraints with validation on a magnetic levitation system. *IEEE Control Systems Letters*, Vol.1, No.2, pp. 418-423, 2017.
- [10] Anh Tuan Tran, Noboru Sakamoto, Yoshimitsu Kikuchi, and Koichi Mori. Pilot induced oscillation suppression controller design via nonlinear optimal output regulation method. *Aerospace Science and Technology*, Vol. 68, pp. 278-286, 2017.
- [11] Anh Tuan Tran, Noboru Sakamoto, and Koichi Mori. Nonlinear gain-scheduled flight controller design via stable manifold method. *Aerospace Science and Technology*, Vol. 80, pp. 301-308, 2018.
- [12] 杉江 俊治, 岡田 昌史. 並列倒立振子システムの H^∞ 制御. システム制御情報学会論文誌, Vol.6, No.12, pp. 543-551, 1993.