非線形最適制御による並列回転型倒立振子の振り上げ安定化制御

M2019SC012 竹田賢矢
指導教員：坂本登

1　はじめに

劣駆動系とは，アクチュエータの数がシステムの自由度よりも小さい系の総称である．少ない数のアクチュエータでシステム全体を制御する必要があり，かつ強い非線形性を有していることが多いため劣駆動系の制御は難しい問題である．しかし少ないアクチュエータでシステムを構成できる関係上必要部品を減らせるため，このようなシステム対して所望の制御目的を達成することは，軽量化，低コスト化，省エネルギー化の観点から有用である．劣駆動システムは，本論文の制御対象である倒立振子をはじめ，劣駆動ロボットマニピュレータ，コントロール・モーメント・ジャイロ（CMG），垂直離着陸機（VTOL 機）や Acrobot 等の数多くのシステムが知られている [1].

倒立振子は，最も基本的な制御対象でありながら不安定系・劣駆動系システムの代表例の一つであり，かつ強い非線形性を有している．そのため原点近傍での安定化制御から，振り上げ安定制御等様々な制御技術の制御性能の評価をする上でのベンチマークとして広く用いられてきた．今日までにもこれらの制御に対してさまざまな研究報告がされている．

本論文では，二重倒立振子系である並列回転型倒立振子に対して非線形最適制御則設計を行う．これまで同システムは原点近傍の安定化制御 [2] や振り上げ制御器と安定化制御器を切り替えることによる振り上げ安定化 [3] 等が報告されている．しかし，単一のコントローラによる振り上げ安定化制御はその非線形性から非常に難しい問題である．非線形最適制御則は，Hamilton-Jacobi 方程式を安定多様体法 [4][5] によって解くことで設計する．安定多様体法は，近年著者の一人によって開発された数値計算法であり，航空機制御 [6, 7] や，倒立振子の振り上げ制御 [8, 9]，磁気浮上系の加速度制約下での安定化制御 [10] や Acrobot の振り上げ安定化制御 [11] などでその効果が実証されている．本論文ではシミュレーションにより安定多様体法理論の有用性と汎用性を検証する．さらに本論文では，倒立振子系の振り上げ安定化制御において複数回の振り上げ軌道が現れることについて触れる．この現象は非線形最適制御に特有の興味深い問題であり，[8, 11] などで Hamilton-Jacobi 方程式の非一意解として報告されている．

2　非線形最適制御問題

本節では非線形システムにおける最適制御問題に対して安定多様体法理論から導かれるシステムに対する最適制御入力に関して述べる．以下では次の非線形時不変システムに対し二次形式の評価関数を最小化する最適レギュレータ問題を扱う．

$$\begin{cases} \sum : \dot{x} = f(x) + g(x)u, x(0) = x_0 \\ J = \int_0^\infty (x^{\mathrm{T}}Qx + u^{\mathrm{T}}Ru)\mathrm{dt} \end{cases} \tag{1}$$

ここで，$Q \geq 0, R > 0, x \in \mathbb{R}^n, u \in R^n, f(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, g(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ である．このシステムに動的計画法を適用する．このとき Hamiltonian $H(x,u,p)$ は，随伴変数 $p \in \mathbb{R}^n$ を用いて

$$H(x,u,p) = p^{\mathrm{T}}(f(x) + g(x)u) + x^{\mathrm{T}}Qx + u^{\mathrm{T}}Ru \tag{2}$$

この時，最適フィードバック制御入力 $u^*(x)$ は Hamilton-Jacobi 方程式の解 $V(x)$ を用いて

$$u^*(x) = -\frac{1}{2}R^{-1}g(x)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}$$

と得られる．上式を (2) 式に代入すると，Hamilton-Jacobi 方程式は，

$$H(x,p) = P^{\mathrm{T}}f(x) - \frac{1}{4}p^{\mathrm{T}}g(x)R^{-1}g(x)^{\mathrm{T}}p + x^{\mathrm{T}}Qx \tag{3}$$

となる．(3) 式の Hamiltonian $H(x,p)$ に対する Hamilton 正準方程式は以下のように得られる．

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x,p) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,p) \end{cases} \tag{4}$$

安定多様体法理論 [4] では，ある条件下で Hamilton-Jacobi 方程式の解 $V(x)$ の偏微分 $\frac{\partial V}{\partial x}$ と正準方程式 (4) の安定多様体 $p(x)$ は等価であることが報告されている．したがって最適制御入力は，式 (5) で置き換えることができる．

$$u^*(x) = -\frac{1}{2}g(x)^{\mathrm{T}}p(x) \tag{5}$$

3　並列回転型倒立振子

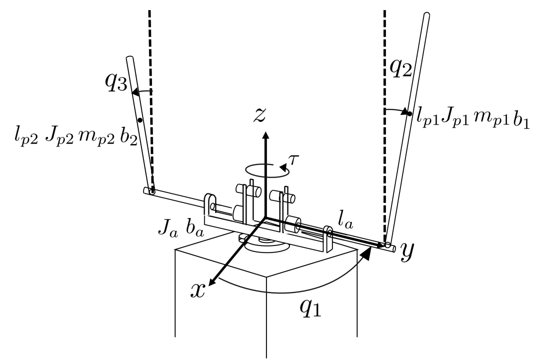

図 1 Parallel rotary inverted pendulum model

3.1　並列回転型倒立振子システム

本研究で使用する並列回転型倒立振子は，表 1 のパラメータを持つ図 1 の実験機である．実験機は回転アーム，

表 1 Physical Parameter

記号	名称
J_a	回転アームの慣性モーメント
J_{pi}	振子 i の慣性モーメント
m_{pi}	振子 i の質量
l_a	回転アームの長さ
l_{pi}	振子 i の回転中心から重心位置までの長さ
b_a	回転アームの粘性摩擦係数
b_i	振子 i の粘性摩擦係数
g	重力加速度
R_a	電気子抵抗
K_E	逆起電力係数
K_T	トルク定数
n	DC モータと回転アームのギア比

振子，DC モータ，マイクロエンコーダで構成されている．回転アームはギアを介して DC モータに接続されており，電圧入力を与えることで回転軸を中心として水平面内を回転する．振子はアームの先端に取り付けられており，垂直平面内を自由に回転することができる．回転アームの回転角 q_1 はギアを介して DC モータに内蔵されているエンコーダで観測する．振子の回転角 q_2，q_3 はベルトとプーリを介してマイクロエンコーダで観測する．また計測・制御には Compact-RIO を用い，制御プログラムは Labview で記述する．図 2 に並列回転型倒立振子システムの実験環境を示す．

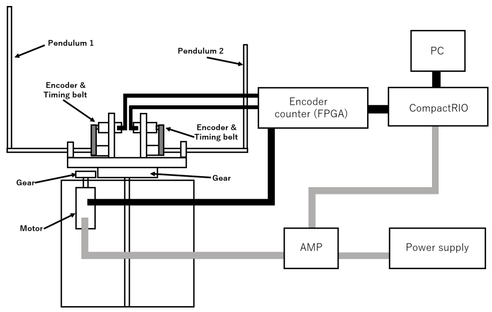

図 2 Experiment environment of parallel inverted pendulum system

3.2 モデリング

ラグランジアン L は運動エネルギー T，ポテンシャルエネルギー U を用いて次のように表される．

$$L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - U(q) \tag{6}$$

この時，Euler-Lagrange の運動方程式は，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

で与えられ，次の Lagrange の非線形運動方程式 (7) を得る．

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + G(q) = \tau \tag{7}$$

ここで，$\mathrm{S}(\theta) = \sin\theta$，$\mathrm{C}(\theta) = \cos\theta$ として

$$M(q) = \begin{bmatrix} r_2\,\mathrm{S}(q_2)^2 + r_3\,\mathrm{S}(q_3)^2 + r_1 & l_a\,r_4\,\mathrm{C}(q_2) & l_a\,r_5\,\mathrm{C}(q_3) \\ l_a\,r_4\,\mathrm{C}(q_2) & r_2 & 0 \\ l_a\,r_5\,\mathrm{C}(q_3) & 0 & r_3 \end{bmatrix}$$

$$C(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} -l_a\,r_4\,\mathrm{S}(q_2)\,\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1\,r_2\,\mathrm{S}(2\,q_2)\,\dot{q}_2 - l_a\,r_5\,\mathrm{S}(q_3)\,\dot{q}_3^2 + \dot{q}_1\,r_3\,\mathrm{S}(2\,q_3)\,\dot{q}_3 \\ -\frac{\dot{q}_1^2\,r_2\,\mathrm{S}(2\,q_2)}{2} \\ -\frac{\dot{q}_1^2\,r_3\,\mathrm{S}(2\,q_3)}{2} \end{bmatrix}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g\,r_4\,\mathrm{S}(q_2) \\ -g\,r_5\,\mathrm{S}(q_3) \end{bmatrix} \tag{8}$$

である．ただし，

$$r_1 = J_a + m_{p1}l_a^2 + m_{p2}l_a^2\ , r_2 = J_{p1}\ , r_3 = J_{p2}\ , r_4 = m_{p1}\,l_{p1}\ , r_5 = l_{p2}\,m_{p2} \tag{9}$$

は [12] に基づいて求めた基底パラメータである．DC モータの特性は次のように表し，t_a, t_b に置き換える．

$$\tau = -\frac{n^2K_TK_E}{R_a}\dot{q}_1 + \frac{nK_T}{R_a}u$$
$$t_a = \frac{n^2K_TK_E}{R_a}\dot{q}_1, t_b = \frac{nK_T}{R_a}$$

また，粘性摩擦 $F_b = [b_a\dot{q}_1, b_1\dot{q}_2, b_2\dot{q}_3]^T$ を考慮すると，

$$\tau = -F_b - T_a + T_b\,u \tag{10}$$

と表される．ただし $T_a = [t_a, 0, 0]^T$，$T_b = [t_b, 0, 0]^T$ である．次に，(7) 式を用いて状態方程式を導出する．状態変数を $x = [q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3]^{\mathrm{T}}$ とすると，次に示される非線形状態方程式 (11) が得られる．

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{11}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M^{-1}(q)\{C(q,\dot{q}) + G(q) - T_a\} \end{bmatrix}$$
$$g(x) = \begin{bmatrix} O_{1\times 3} \\ -M^{-1}(q)t_b \end{bmatrix}$$

式 (11) の非線形状態方程式を原点近傍 ($x = 0$) 線形化すると，次に示す線形状態方程式 (12) を得る．

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{12}$$

4 パラメータ同定

制御器設計に際して，運動方程式 (7) を決定づける未知パラメータを同定する必要がある．しかし，その目的に対して表 1 の全慣性パラメータは冗長である．よって運動方程式を一意に決定する最小個数のパラメータである基底パラメータを同定する．実験機に与える入力は電圧

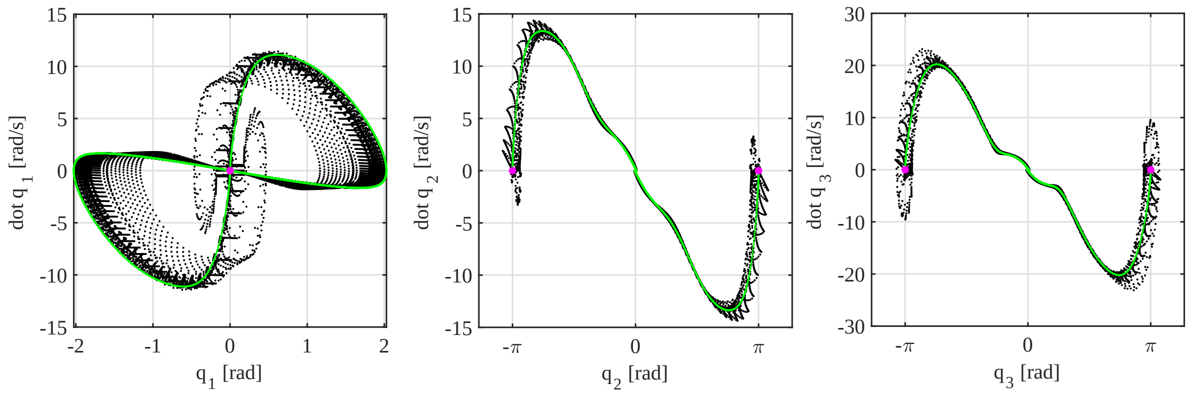

図 3 1 swing-up trajectory

であることを考慮すると，(7) 式は基底パラメータを含む行列 r を用いて

$$M(q;r)\ddot{q} + C(q,\dot{q};r) + G(q;r) + F_b(\dot{q};r) + T_a(q;r) = T_b\,u \tag{13}$$

$$r = \left[\ r_1, ..., r_5, b_a + t_a, b_1, b_2\ \right]^{\mathrm{T}}$$

と書ける．また，(13) 式は行列 $X(q,\dot{q},\ddot{q})$ を用いて r との線形結合

$$X(q,\dot{q},\ddot{q})\ r = T_b\ u \tag{14}$$

として表せる．アームと振子のエンコーダからは角度しか得られないため，角速度や角加速度は中心差分によって求める．入力電圧は既知であるため，未知パラメータ r は

$$r = (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}T_b\ u \tag{15}$$

と得られる．同定実験により得られたパラメータを表 2 に示す．

表 2 System Parameter

r_1	r_2	r_3	r_4
1.509×10^{-2}	1.676×10^{-3}	9.821×10^{-4}	1.198×10^{-2}
r_5	$b_a + t_a$	b_1	b_2
1.370×10^{-2}	3.860×10^{-2}	1.195×10^{-3}	3.278×10^{-3}
n	R_a	K_T	K_E
1 : 5	0.363	0.0155	0.0155

5 振り上げ解軌道の探索

本論文では，Hamilton-Jacobi 方程式の数値解法である安定多様体法を用いて，並列回転型倒立振子の同時振り上げ安定化制御器を設計する．安定多様体法は，積分漸化式を繰り返し計算し多様体面を構成してこれを関数として表現する（状態フィードバックの構成）ことで制御器設計を行う．本節では，制御器設計におけるこの過程を述べる．ここでの解軌道探索に用いた線形最適制御における評価関数式 (1) の重みを

$$Q = \mathrm{diag}(1,0,0,0,0,0),\ R = 10$$

とした．図 3 は安定多様体法によって得られた 1 回振り上げの解軌道である．緑の軌道が振り上げの解軌道であり，両振子が降り下がった状態から原点へ軌道が伸びていることが確認できる．制御器を設計する上で，得られた数値解 $p(t), x(t)$ を $p(x)$ の多項式となるように近似する必要がある．しかし解軌道一本分のデータのみでは，実験の際振り上げ軌道が得られた解軌道から外れた場合，有効な $p(x)$ が得られない．そこで緑色の線を基準軌道として，この軌道を包括するように黒色の線が示す安定多様体面を形成し，これら全てをまとめて多項式係数を計算する．この手順により，実験時に基準軌道から振り下げ軌道が外れた場合でも，多様体面の $p(x)$ の値を用いてシステムが安定となるような入力を実験機に与えることができる．

6 シミュレーション結果

得られた解軌道を用いて状態フィードバックの形となる制御器を設計する．本論文では，1 回振り上げ軌道において多項式近似によるフィードバックコントローラを設計，シミュレーションを行う．

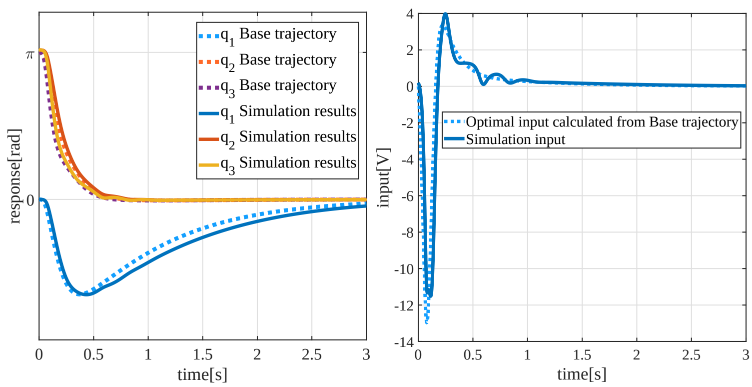

図 5 1 swing-up simulation result

図 5 はシミュレーション結果の時系列データ及び入力を解軌道と比較したものである．解軌道とシミュレーション結果は多少誤差があるものの，設計したコントローラは振り上げと安定化を達成している．多様体面を形成することにより，近似精度によって発生する誤差等によって制御対象が基準軌道から外れた際もシステムを安定化する入力が印可されていると考えられる．図 5 右図は解軌道から算出される最適入力とシミュレーションでの入力を比較していることに注意されたい．

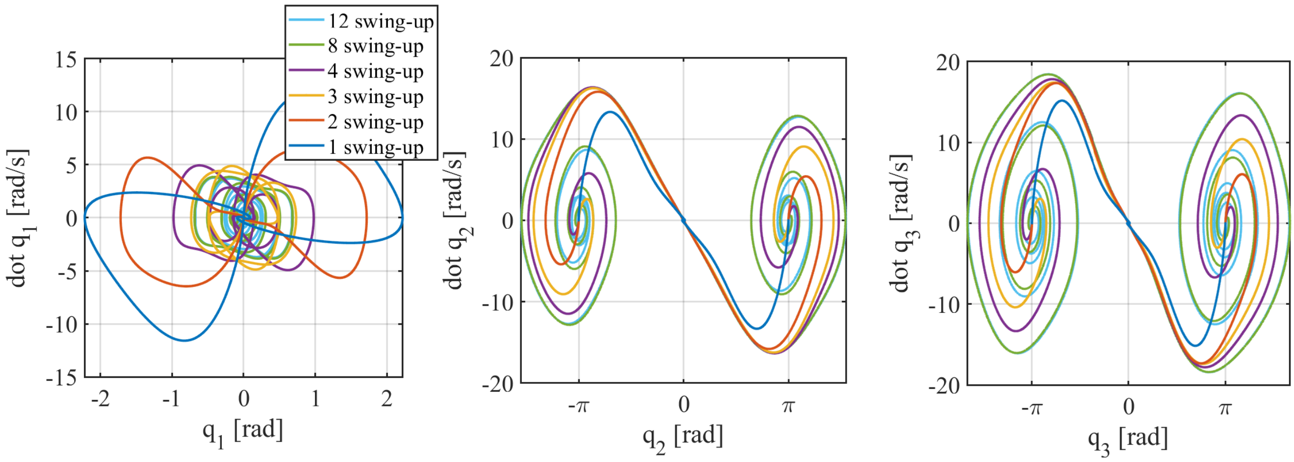

図 4 1-12 swing-up trajectories

7 非一意解の探索

Hamilton-Jacobi 方程式には非一意解という同一の制御目的を達成する別の解軌道が存在することがある．倒立振子系においては複数回振り上げとして非一意解が存在し，[8] で報告されている．ここでは，並列回転型倒立振子における Hamilton-Jacobi 方程式の非一意解の探索を行う．探索にあたって前節までと異なる振子を用い，評価関数の重みを次のように決めた．

$$Q = \mathrm{diag}(5, 0, 0, 0, 0, 0),\ R = 10$$

図 4 は得られた 1 回から 12 回振り上げの解軌道である．得られた解軌道は全て同一の Hamilton-Jacobi 方程式の解であり，どれもその軌道近傍において最適である．表 3 は得られた解軌道の評価関数及び図を示したものである．振り上げ回数に応じて評価関数値が減少している．これは振子に重みをつけないことにより，振子の運動によって評価関数が影響されないためである．

表 3 Optimal trajectory cost

Number of swings	cost
1swing	338.4857
2swings	189.8585
3swings	164.9428
4swings	154.9444
8swings	143.6377
12swings	139.0087

8 おわりに

本論文では，Haimlton-Jacobi 方程式の近似解を求めることが可能であることが実証されている安定多様体法を用いて，並列回転型倒立振子の振り上げ安定化解軌道を求めた．得られた解軌道を用いて制御器を設計し，シミュレーションによってその有効性を検証した．また，Hamilton-Jacobi 方程式の非一意解の探索を行い，複数回の振り上げ解軌道の存在を確認した．設計した制御器はモデル化誤差に対して脆弱な傾向がある上に現実験機及び重みは安定化の時点で困難である等の実機検証へ向けた課題が存在する．今後は制御器のロバスト性改善と実験機及び実験環境の改良が望まれる．

参考文献

[1] Yang Liu and Hongnian Yu. A survey of underactuated mechanical systems. *IET Control Theory and Applications*, Vol. 7, No. 7, pp. 921–935, 2013.

[2] 杉江俊治, 岡田昌史. 並列倒立振子システムの H^∞ 制御. システム制御情報学会論文誌, Vol. 6, No. 12, pp. 543–551, 1993.

[3] 藤田優樹, 井筒正義, 畠山省四朗. エネルギー制御による回転型並列倒立振子の振り上げ安定化. 自動制御連合講演会講演論文集, Vol. 56, , 2013.

[4] Noboru Sakamoto and Arjan J. van der Schaft. Analytical approximation methods for the stabilizing solution of the Hamilton-Jacobi equation. *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 53, No. 10, pp. 2335–2350, 2008.

[5] Noboru Sakamoto. A recent progress in the optimal control design under various constraints. In *Proc. of IFAC Conference on Manugacturing, Management, and Control*, pp. 1522–1527, 2013.

[6] Anh Tuan Tran, Noboru Sakamoto, Yoshimitsu Kikuchi, and Koichi Mori. Pilot induced oscillation suppression controller design via nonlinear optimal output regulation method. *Aerospace Science and Technology*, Vol. 68, pp. 278–286, 2017.

[7] Anh Tuan Tran, Noboru Sakamoto, and Koichi Mori. Nonlinear gain-scheduled flight controller design via stable manifold method. *Aerospace Science and Technology*, Vol. 80, pp. 301–308, 2018.

[8] Takamasa Horibe and Noboru Sakamoto. Optimal swing up and stabilization control for inverted pendulum via stable manifold method. *IEEE Trans. on Control System Technology*, Vol. 26, No. 2, pp. 708–715, 2017.

[9] Ryu Fujimoto and Noboru Sakamoto. Swing-up and stabilization of inverted pendulum by nonlinear optimal control. *Trans. SICE*, Vol. 48, No. 7, pp. 423–430, 2012.

[10] Anh Tuan Tran, Shogo Suzuki, and Noboru Sakamoto. Nonlinear optimal control design considering a class of system constraints with validation on a magnetic levitation system. *IEEE Control Systems Letters*, Vol. 1, No. 2, pp. 418–423, 2017.

[11] Takamasa Horibe and Noboru Sakamoto. Nonlinear optimal control for swing up and stabilization of the Acrobot via stable manifold approach: Theory and experiment. *IEEE Trans. on Control System Technology*, Vol. 27, No. 6, pp. 2374–2387, 2019.

[12] H. Mayeda, K. Yoshida, and K. Osuka. Base parameters of manipulator dynamic models. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 6, No. 3, pp. 312–321, 1990.