クォータニオンを用いたクアッドコプタの姿勢表現

M2019SC001 後藤崚汰
指導教員：大石泰章

1　はじめに

近年では，4 発のロータをもつクアッドコプタなどの無人航空機は，UAV (Unmanned Aerial Vehicle) と呼ばれ，コストや利便性などの観点から，有人機にかわって軍用だけでなく民間用にも実用化が進められている．特に民間機については，農業における肥料の散布や生育状況の監視，産業における地形の測量や空撮，輸送における食糧や医薬品の調達などさまざまな分野において活用されている [?].

こうしたさまざまな分野において望ましいパフォーマンスを実現させるためには機体の回転や姿勢について考える必要がある．姿勢の安定化や目標軌道を滑らかに追跡するような制御，予期せぬ外乱に対する安定性を保証するために，機体のダイナミクスを把握し，それを表現する数式モデルを立てる．モデルを作成する際のアプローチはいくつかあるが，一般的な回転や姿勢の表現方法のひとつとしてオイラー角表現がある．しかし，この方法をクアッドコプタに適用する際には欠点が生じる．代表的なものとしては，オイラー角表現では，ピッチ角 $\pm\frac{pi}{2}$ が特異点となっており，クアッドコプタが真横を向くような激しい運動をする場合，異常が生じる可能性がある [?].

そこで，クォータニオンの表現を導入する．クォータニオンは特異性のような問題を考慮する必要がなく，航空機などの姿勢を表現する際に便利である．また，回転の結合や補間が容易にできることや計算時の数値誤差を抑えられるという点もメリットとして挙げられる．ただし，デメリットとしてクォータニオンだけでは具体的な回転や姿勢をイメージしにくいという点があるが，その対策として，途中計算はクォータニオンで行い，結果をクォータニオン表現からオイラー角表現へ変換することによって解決できる．

本研究では，クォータニオンのシミュレーションに基づくクアッドコプタの姿勢シミュレーションを目標とする．そのための準備段階として，一定の角速度で変化する機体姿勢を，オイラー角表現およびクォータニオン表現に基づいてそれぞれ計算し，クォータニオンの有用性を示す．次に，クアッドコプタの姿勢モデルを導出し，それに基づいて飛行シミュレーションを行う．

2　クアッドコプタの座標系

図**??**, 図**??**に座標系の定義を示す． 図中の Σ_r は地上の任意の点を原点とした慣性座標系である．続いて，Σ_b は機体の重心を原点として，機体の進行方向に X_b 軸，垂直上方向に Z_b 軸をとった機体座標系である．これらの座標系は全て右手座標系である．また，慣性座標系 Σ_r に対する機体座標系 Σ_b の姿勢を機体姿勢とよぶ．

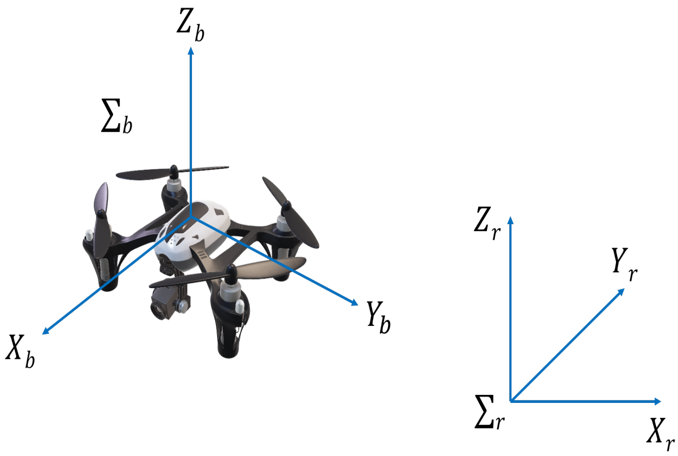


図 1: クアッドコプタの座標系 (1)

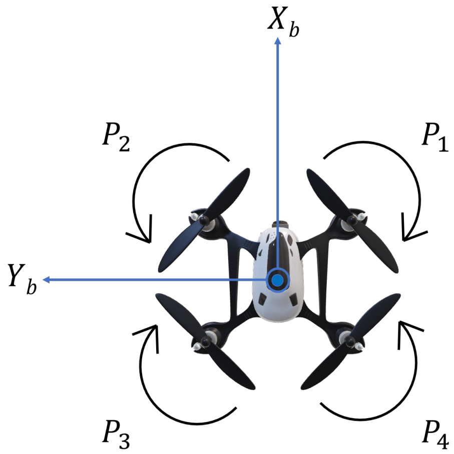


図 2: クアッドコプタの座標系 (2)

3　機体姿勢の表現方法

3.1　オイラー角表現

機体座標系 Σ_b が慣性座標系 Σ_r に対してどのような関係にあるのかを示すために，まず座標系 Σ_a を Σ_r と同一にとり，続いて座標軸周りの回転を繰り返すことによって，座標系 Σ_b に一致させることを考える．回転の際は，回転後の座標系の座標軸を基準にとる．また，反時計回りを正とする．

1. Σ_a を Σ_r の Z_r 軸周りに角度 ψ 回転させ（ヨー角），Σ'_a とする．
2. Σ'_a を Σ'_a の y' 軸周りに角度 θ 回転させ（ピッチ角），Σ''_a とする．
3. Σ''_a を Σ''_a の x'' 軸周りに角度 ϕ 回転させ（ロール角），Σ_b と一致させる．

上記の定義は z 軸，y 軸，x 軸の順に回転するため $z\!-\!y\!-\!x$ オイラー角と呼ばれる．具体的な回転の様子を図??に示す．

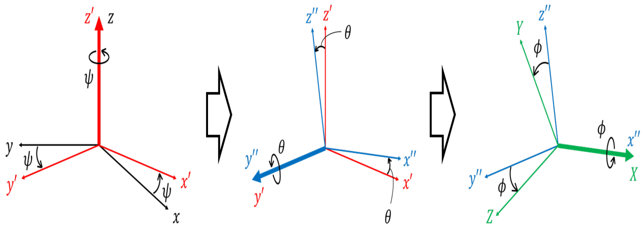


図 3: $z-y-x$ オイラー角の回転表現

機体座標系 Σ_b が慣性座標系 Σ_r に対して角速度 $\boldsymbol{\omega} = [P \quad Q \quad R]^T$ で回転する場合を考える．このとき，Σ_b の姿勢を表すオイラー角は次を満たす：

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \dfrac{\sin\phi}{\cos\theta} & \dfrac{\cos\phi}{\cos\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \tag{1}$$

．式 (??) において，$\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\tan\theta$ および $\dfrac{1}{\cos\theta}$ の値は無限大に発散する．このため，$\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$ は特異点と呼ばれる．

3.2　クォータニオン表現

次に，クォータニオンについて説明する．クォータニオン（四元数，quaternion）は複素数を拡張した数体系で，1843 年にイギリスの数学者ウィリアム・ローワン・ハミルトン（William Rowan Hamilton）によって発見された [?]．いま，クォータニオン q を式 (??) のように定義する：

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k. \tag{2}$$

このように，クォータニオンは 1 つの実数部と 3 つの虚数部から構成されており，虚数単位である i，j，k は式 (??) を満たす：

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ ij = -ji = k, \\ jk = -kj = i, \\ ki = -ik = j. \end{cases} \tag{3}$$

ここで，q_0 をスカラー部，$\tilde{q} = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ をベクトル部と呼び，$\tilde{q}$ をベクトル $[q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$ と同一視する．また，クォータニオン q 自身もベクトルと同一視して以下のように表記する：

$$q = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T. \tag{4}$$

さらに，クォータニオン q のノルムは式 (??) で定義される：

$$\|q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}. \tag{5}$$

ここで，ある角度 θ と単位ベクトル $n = [n_1 \quad n_2 \quad n_3]^T$ に対して，スカラー部が $\cos\dfrac{\theta}{2}$，ベクトル部が $n\sin\dfrac{\theta}{2}$ のクォータニオン $\hat{q}$ を考える [?]．$\|\hat{q}\| = 1$ に注意する．

$$\begin{aligned} \hat{q} &= \cos\frac{\theta}{2} + n\sin\frac{\theta}{2} = (\cos\frac{\theta}{2}, n\sin\frac{\theta}{2}), \\ n &= n_1 i + n_2 j + n_3 k, \\ \|\hat{q}\| &= 1 \end{aligned} \tag{6}$$

上記のようなノルムが 1 であるクォータニオン $\hat{q}$ はベクトル n 周りの角度 θ 回転した座標系を表す．図形的な解釈については図??に示す．

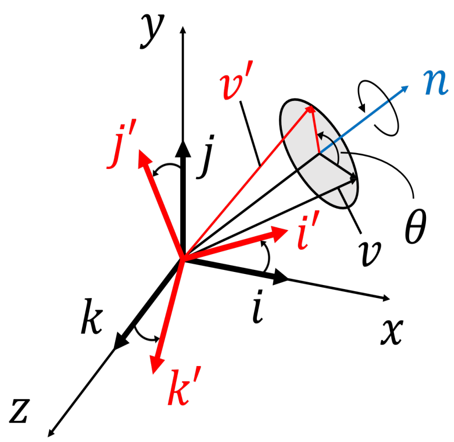


図 4: 機体座標系のクォータニオン表現

また，機体座標系 Σ_b に角速度 $\boldsymbol{\omega} = [P \quad Q \quad R]^T$ を与えたとき，Σ_b の姿勢を表すクォータニオンは次を満たす：

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ Q \\ R \end{bmatrix}. \tag{7}$$

式 (??) と式 (??) を比較すると，式 (??) は三角関数の演算がないため，オイラー角表現に比べてクォータニオン表現が簡単であることがわかる．

4　シミュレーション

4.1　シミュレーションの方法

本研究では，シミュレーションを行う際の方法としてルンゲ・クッタ（Runge–Kutta）法を採用する．以下の式 (??)，(??) をみたす $x(t)$ の近似値を $0 \le t \le T$ で求めることを考える：

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \tag{8}$$

$$x(0) = x_0. \tag{9}$$

ここで，刻み幅 $h = T/N$ $(N \in \mathbb{N})$，$t_n = nh$ $(n = 0, 1, \ldots, N)$ とする．また，$n = 0, 1, \ldots, N-1$ について，

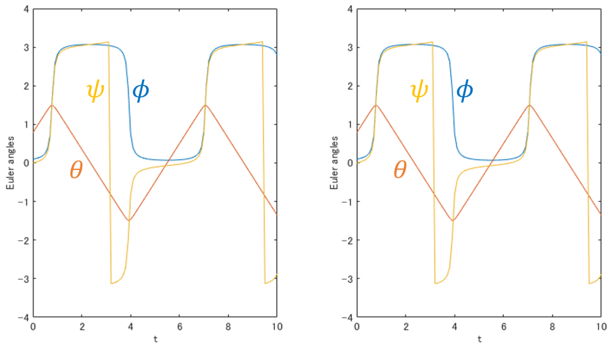
$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, t_n), \\
k_2 &= f(x_n + \frac{h}{2}k_1, t_n + \frac{h}{2}), \\
k_3 &= f(x_n + \frac{h}{2}k_2, t_n + \frac{h}{2}), \\
k_4 &= f(x_n + hk_3, t_n + h), \\
x_{n+1} &= x_n + h\left[\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{6}k_2 + \frac{2}{6}k_3 + \frac{1}{6}k_4\right]
\end{aligned} \tag{10}
$$

とし，x_n を $x(t_n)$ の近似値とする．

クォータニオン表現のシミュレーションについては，初期状態および結果をオイラー角で表現し，途中計算をクォータニオンで行った．初期状態は $[\phi \quad \theta \quad \psi]^T = [0.1 \quad a \quad 0]^T$ とし，a の値を変化させた．角速度は $[P \quad Q \quad R]^T = [0 \quad 1 \quad 0]^T$ のように一定の値を与えてシミュレーションを行った．

4.2 シミュレーション結果

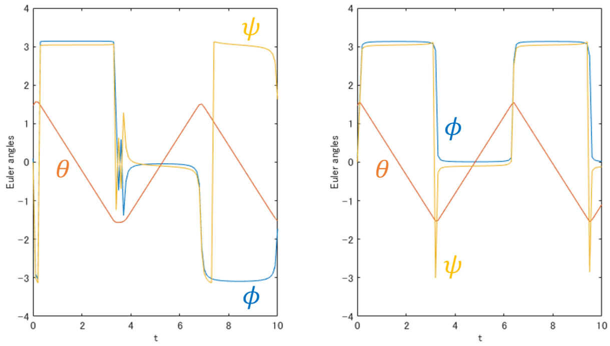
初期状態 $[\phi \quad \theta \quad \psi]^T = [0.1 \quad \frac{\pi}{4} \quad 0]^T$ のときのシミュレーション結果を図??に示す．図??から，いずれの表現方法においても同様の結果が得られることがわかる．



(a) オイラー角表現　(b) クォータニオン表現

図 5: 初期状態 $[\phi \quad \theta \quad \psi]^T = [0.1 \quad \frac{\pi}{4} \quad 0]^T$ のときのシミュレーション結果

さらに，初期状態 $[\phi \quad \theta \quad \psi]^T = [0.1 \quad \frac{\pi}{2} - 0.1 \quad 0]^T$ のときのシミュレーション結果を図??に示す．図??からわかるように，オイラー角表現では $\theta = -\frac{\pi}{2}$ 付近で異変が見られる．角速度は一定であるため，グラフは周期的になるはずであるが，オイラー角表現の結果では周期的ではない．一方で，クォータニオン表現ではオイラー角表現に見られる異変はなく，グラフも周期的である．これらの結果からクォータニオンの有用性を示すことができる．



(a) オイラー角表現　(b) クォータニオン表現

図 6: 初期状態 $[\phi \quad \theta \quad \psi]^T = [0.1 \quad \frac{\pi}{2} - 0.1 \quad 0]^T$ のときのシミュレーション結果

5 クアッドコプタの姿勢モデルのシミュレーション

5.1 クアッドコプタの姿勢モデル

本節では，クォータニオンを用いてクアッドコプタの姿勢モデルを導出する．モデルの導出に必要なパラメータを表??に示す．具体的な値については文献 [?] を参考にした．

表 1: クアッドコプタのモデルに関するパラメータ

パラメータ	詳細	値 [単位]
I_{xx}	機体の X_b 軸まわりの慣性モーメント	4.856×10^{-3} [kg · m^2]
I_{yy}	機体の Y_b 軸まわりの慣性モーメント	4.856×10^{-3} [kg · m^2]
I_{zz}	機体の Z_b 軸まわりの慣性モーメント	8.801×10^{-3} [kg · m^2]
α	機体重心とプロペラの回転中心を結ぶ線分と X_b 軸のなす角	$\frac{\pi}{4}$ [rad]
l	機体重心からプロペラの回転中心までの距離	0.225 [m]
b	ロータ推力係数	2.980×10^{-6} [N · s^2/(rad)^2]
k	反トルク係数	1.140×10^{-7} [N · m · s^2/(rad)^2]

本研究では，機体の並進については考慮せず，機体の回転についてのみ考える．角速度 $\boldsymbol{\omega}$ が与えられたときの機体の回転に関する方程式は式 (??) で表すことができる：

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\tau}. \tag{11}$$

ここで，J は慣性行列であり，式 (??) で表される：

$$J = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

また，Ω_i を i 番目のロータの角速度とすると，外力トルク $\boldsymbol{\tau}$ は式 (??) で与えられる：

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} bl(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2)\sin\alpha \\ bl(-\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)\cos\alpha \\ k(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \end{bmatrix}. \tag{13}$$

以上の式 (??) および式 (??) をクアッドコプタの姿勢モデルとする．

5.2 シミュレーション結果

初期条件を $\Omega_1^2 = \Omega_2^2 = 110$，$\Omega_3^2 = \Omega_4^2 = 90$ としてシミュレーションを行った結果を図??に示す．角速度の 2 乗にトルクが比例するので，角速度の 2 乗に対して初期条件を設定した．

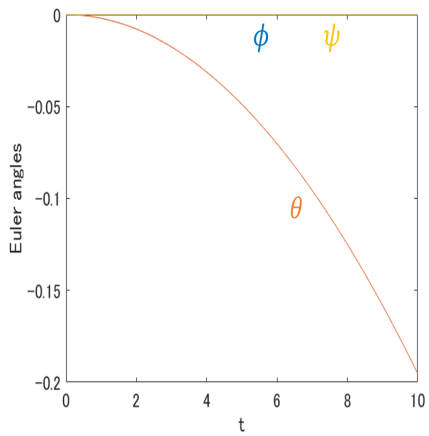


図 7: クアッドコプタの姿勢モデルに基づくシミュレーション結果 (1)

機体のロール角 ϕ，ヨー角 ψ は零のままで，ピッチ角 θ が単調に減少している．実際，図??におけるプロペラ P_1，P_2 の角速度を大きくし，プロペラ P_3，P_4 の角速度を小さくすると，機体が後ろ回りに回転することは明らかである．

また，初期条件を $\Omega_1^2 = 110$，$\Omega_2^2 = 120$，$\Omega_3^2 = 90$，$\Omega_4^2 = 80$ としてシミュレーションを行った結果を図??に示す．

図??より，ロータの角速度の値をさまざま変化させたときの機体の回転についても表現することができる．

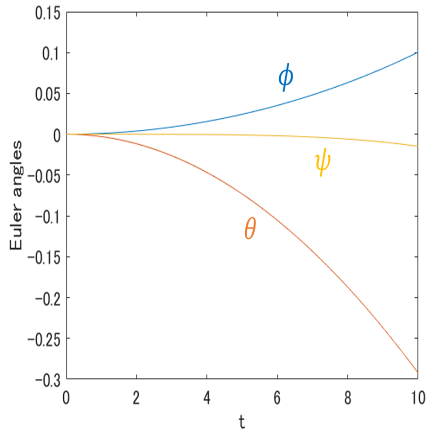


図 8: クアッドコプタの姿勢モデルに基づくシミュレーション結果 (2)

さらに，図??，図??のいずれにおいても $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ 付近でオイラー角表現において見られた異変が起こらず，クォータニオンをクアッドコプタの姿勢モデルに適用した際にも有益であることが確認できる．

6 おわりに

機体座標系のオイラー角表現およびクォータニオン表現を用いて座標系の姿勢変化のシミュレーションを行った．これらのシミュレーション結果からクォータニオンの有用性を示した．また，クアッドコプタの姿勢モデルに基づくシミュレーションを行った結果，所望の応答を得ることができた．

今後の課題としては，機体の回転のみならず，並進についても考慮したクアッドコプタのシミュレーションが挙げられる．さらに，それに基づくクアッドコプタの制御を行うことが考えられる．

参考文献

[1] 鈴木智，中澤大輔，野波健蔵，田原誠：「クォータニオンフィードバックによる小型電動ヘリコプタの姿勢制御」，日本機械学会論文集（C 編），76 巻 761 号，2010，pp. 51–60.

[2] E. Fresk and G. Nikolakopoulos: Full Quaternion Based Attitude Control for a Quadrotor. 2013 European Control Conference (ECC), Zurich, Switzerland, 2013, pp. 3864–3869.

[3] 野波健蔵：『ドローン工学入門—モデリングから制御まで—』，コロナ社，東京，2020.

[4] 矢田部学：「クォータニオン計算便利ノート」，MSS 技報，Vol. 18，2007，pp. 29–34.

[5] 山本健太，関口和真，野中謙一郎：「階層型線形化を用いたクアッドコプタの合意制御」，第 60 回自動制御連合講演会，東京，2017.