非整数階微積分法の制御系設計への応用手法に関する研究

M2019SC008 西田裕貴
指導教員：中島明

1　はじめに

近年，科学技術の分野において，従来の微分・積分の階数を整数から非整数に拡張し一般化した，非整数階微積分法の考え方が注目を集めている．非整数階微積分法は非線形性を有するような複雑な現象のモデリングに利用できるほか，制御系設計への利用によって優れた性能を実現できることでも知られており，その応用可能性が期待されている．そのため工学の分野では，特に制御工学への応用が熱心に研究され，その適用例を増やしている [1]．主な例の一つとして，産業分野で広く使われる PID 制御の技術を非整数階微積分の考え方を用いて発展させた非整数階 PID 制御が挙げられる．非整数階 PID 制御は従来の PID 制御と同様の構造を含みながらもより多くの調整パラメータを持つことができるため，直感的にわかりやすくより柔軟な設計が可能であり，優れた性能を発揮できると言われている．

一方，工業の分野では機械システムに含まれる非線形性が長年大きな課題とされてきた．それらはシステムの性能に大きな影響を及ぼすことで知られており，歯車を持つ駆動系におけるバックラッシュもまたその一つである．バックラッシュとは互いに噛み合って運動する歯車の運動方向に設けられた歯と歯の隙間や遊びの事を指し，歯車を無理なく回転させるために不可欠な要素である．バックラッシュがなければ歯車の歯同士が互いに干渉してしまい，歯車を回すことができなくなってしまう．そのため機械的なカップリングを含むほぼ全ての機械システムにおいてバックラッシュは避けられない要素である．しかしバックラッシュはシステムに遅れや振動，予期せぬ挙動を生じさせることから，その性能を低下させ，場合によってはシステムの破損を招く恐れもある．そのため機械システムを安全かつ効率的に制御するために，バックラッシュの正確なモデリングと解析が必要とされている．

この問題に対し，これまで数多くの研究が行われ，様々な手法が提案されてきた．こうした従来研究の多くは，バックラッシュを dead-zone や hysterisis といった単純化したモデルで置き換えて扱ってきた．しかし，これらのモデルはバックラッシュの物理的性質を正確には表現できておらず，そのモデルの不正確性がバックラッシュ研究における大きな課題となっていた [2]．そこで近年，Nordin らによって新たに exact model と呼ばれるモデルが提案された．このモデルはバックラッシュの物理特性を極めて正確に表現できることが報告されている [3]．

そこで本研究では，バックラッシュを含む駆動系を対象に非整数次制御系を設計し，その効果と有用性を検証する．対象とする駆動系はバックラッシュを含む多慣性系としてモデリングする．なお，課題となるバックラッシュ部については，従来研究で広く使われてきた dead-zone のような単純なモデルではなく exact-model を用いて実現する．その後，作成したモデルに対し従来の PID 制御と非整数階 PID 制御をそれぞれ適用し，フィードバックシミュレーションによってその性能を比較検討する．

2　非整数階微積分法

非整数階微積分法は微積分を整数次から非整数次へ拡張し一般化したものである．実在する多くの複雑な動的システムが非整数階微積分法の考え方を用いた数理モデルによってより正確に表現できることが知られている．また，非整数階 PID 制御系は非整数次の積分器と微分器を有することから，制御則の設計において通常の PID 制御よりさらに 2 つの自由度を持つことができ, 優れた性能を発揮できると考えられている．

非整数階微積分作用素は一般に次のように定義される．

$$
{}_aD_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & (\mathbb{R}(\alpha) > 0) \\ 1 & (\mathbb{R}(\alpha) = 0) \\ \int_a^t (dt)^{-\alpha} & (\mathbb{R}(\alpha) < 0) \end{cases} \tag{1}
$$

ここで $[a, t]$ は積分区間を表し，α は微積分の階数を表す．α は任意の実数または複素数をとることができ，$\mathbb{R}(\alpha)$ は α の実部を表している．

2.1　定義

非整数階微積分にはいくつかの定義が存在するが，本研究では Grünwald-Letnikov の定義を利用する．以下に Grünwald-Letnikov の定義を示す．

$$
{}_aD_t^\alpha = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{[\frac{t-a}{h}]} (-1)^j \begin{pmatrix} \alpha \\ j \end{pmatrix} f(t - jh) \tag{2}
$$

ここで $[\frac{t-a}{h}]$ は $\frac{t-a}{h}$ の整数部を表す.

2.2　近似手法

Grünwald-Letnikov の定義は非整数階微積分の計算を極めて精密に表現できる．しかし，制御則設計や解析に定義式をそのまま用いると初期時刻からの畳み込み積分が必要となり，実用的ではない．そこで非整数階微積分を制御系設計に利用するために，非整数次で表されたモデルを整数階の伝達関数で近似する必要がある．その最も有効な方法の一つがフィルタを用いた手法であり，これまでに様々なフィルタが提案されている．本研究では，[4] で提案された Oustaloup's Recurcive Filter を用いる．このフィルタは非整数階微積分作用素をボード線図上の指定した周波数帯域 (ω_b, ω_h) において整数階の伝達関数を用いて折れ線近似する．周波数帯域を広く，かつ精度を高くとるほど近似伝達関数は高次となる．

$s^\gamma(0<\gamma<1)$ に対するフィルタは以下で定義される．

$$s^\gamma \approx K\prod_{k=-N}^{N}\frac{s+\omega_k'}{s+\omega_k} \tag{3}$$

ここで $\omega_k'=\omega_b(\frac{\omega_h}{\omega_b})^{\frac{k+N+\frac{1}{2}(1-\gamma)}{2N+1}}$,$\omega_k=\omega_b(\frac{\omega_h}{\omega_b})^{\frac{k+N+\frac{1}{2}(1+\gamma)}{2N+1}}$，$K=\omega_h^\gamma$ であり，次数は γ である．本研究では，周波数帯域を $(1\times10^{-5},1\times10^{5})$，近似次数を $2N+1=11$ とした．また，積分を扱う場合はこの式の逆数を取ればよい．さらに，次数が $\alpha\geq1$ の時は，$s^\alpha=s^\beta s^\gamma$ と書き直せばよい．ここで β は α の整数部を表し，γ は非整数部を表す．これで任意の s^γ に対しての近似が可能となる．

3 バックラッシュを含む駆動系

3.1 バックラッシュモデル

機械システムにおいて，バックラッシュは非常に一般的な非線形性である．ここでまず初めにバックラッシュのモデルを示す．図 1 は慣性を持たないシャフトに接続したバックラッシュを示しており，θ_1 はモータの角度，θ_2 はドライブシャフトの角度，θ_3 がバックラッシュ部におけるドライブシャフトの角度を表している．2α[rad] のバックラッシュを含んだシャフトは弾性定数 k[Nm/rad]，減衰係数 c[Nm/rad/s] であるとする．シャフトに慣性がない場合，左側のトルク T は右側のトルク T に一致する．

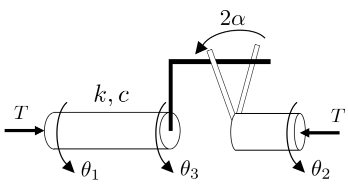

図 1 Backlash system: a shaft connected to a backlash

3.1.1 Dead-zone モデル

Dead-zone モデル [2, 5, 6] はバックラッシュのモデルとして利用される最も単純なモデルである．Dead-zone モデルでは，シャフトにかかるトルクは次の式で表される．

$$T=\begin{cases}k(\theta_d-\alpha) & \text{if } \theta_d>\alpha\\ 0 & \text{if } |\theta_d|<\alpha\\ k(\theta_d+\alpha) & \text{if } \theta_d<-\alpha\end{cases} \tag{4}$$

ここでは $\theta_d=\theta_1-\theta_2$ が変数であり，α はバックラッシュの半分の角度である．このモデルでは，シャフトの粘性減衰は一切考慮されていない．上のモデルにシャフトの粘性減衰を考慮したものは [7, 8] で定義されており，この場合シャフトにかかるトルクは以下のように表される．

$$T=\begin{cases}k(\theta_d-\alpha)+c\dot{\theta}_d & \text{if } \theta_d>\alpha\\ 0 & \text{if } |\theta_d|<\alpha\\ k(\theta_d+\alpha)+c\dot{\theta}_d & \text{if } \theta_d<-\alpha\end{cases} \tag{5}$$

しかし，Dead-zone は本来不感帯を表したモデルであり，バックラッシュに内在する物理特性を正確に表現してはいないため，このモデルはバックラッシュのモデルとしては正しくないことが [2] で示されている．

3.1.2 Exact model

Exact model は [3, 6] で Nordin らによって提案されたモデルであり, バックラッシュの物理特性を極めて正確に表現できる．Exact model ではシャフトにかかるトルク T は以下の式で表される．

$$T=k(\theta_d-\theta_b)+c(\dot{\theta}_d-\dot{\theta}_b) \tag{6}$$

ここで $\theta_d=\theta_1-\theta_2$ であり，バックラッシュの角度は $\theta_b=\theta_2-\theta_3$ である．また，θ_b は次の式から求められる．

$$\dot{\theta}_b=\begin{cases}\max(0,\dot{\theta}_d+\frac{k}{c}(\theta_d-\theta_b)) & \theta_b=-\alpha\ (T\leq0)\\ \dot{\theta}_d+\frac{k}{c}(\theta_d-\theta_b) & |\theta_b|<\alpha\ (T=0)\\ \min(0,\dot{\theta}_d+\frac{k}{c}(\theta_d-\theta_b)) & \theta_b=\alpha\ (T\geq0)\end{cases} \tag{7}$$

この式において $\theta_b=\alpha$ かつ $\dot{\theta}_b\geq0$ のときギアは左側で接触し，$\theta_b=-\alpha$ かつ $\dot{\theta}_b\leq0$ のとき右側で接触する．このモデルでは，ここで得られた θ_b，$\dot{\theta}_b$ と，与えられた θ_d，$\dot{\theta}_d$ を用いることで，式 (6) からトルク T を求めることができる．また，このモデルはシャフトに生じるねじれとバックラッシュの角度との関係を物理的に正確にモデル化することができており，Exact model では式 (4)，(5) のモデルで生じていた物理的に誤った挙動を解消することができる．次節でこのことについて議論する．

3.1.3 モデルの比較

ここで二つのモデルの違いについて [6] に則って検証する．図 2 において，影のついた部分がシャフトにかかるトルク $T=0$ の領域を表している．右の Dead-zone model の図は式 (4),(5) の両者に共通したものである．図 2 から，Exact model ではトルクの伝達領域とバックラッシュ前後のシャフトの回転速度差 $\dot{\theta}_d$ との間に相関関係があることが分かる．これはシャフトの回転速度の変化に応じて当然そのねじれの大きさにも変化が生じるためである．

一方，Dead-zone model では，$\dot{\theta}_d$ の値に関わらず θ_d の値によってのみトルクの伝達が切り替わる．つまりこのモデルでは，二つのシャフトの両端の角度が常に一致し，一切ねじれがない場合でなければトルクが正しく計算できない．しかし現実にそのような条件はあり得ず，そのため本来接触していないはずの状態でトルクが伝達されるような物理的に誤った挙動が発生する．また, 両モデルの影の領域が $|\dot{\theta}_d|$ が大きくなるほど乖離していくことから，シャフトの回転速度が素早く変動するほど Dead-zone model では誤った挙動が増えると考えられる．

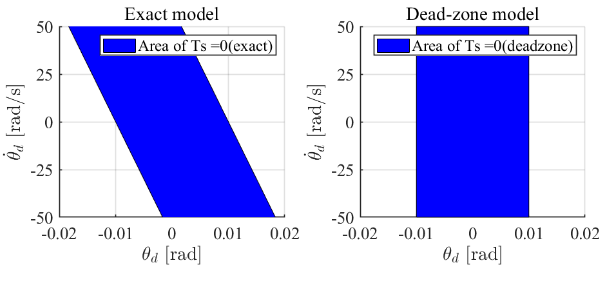

図 2 Phase plane (θ_d-$\dot{\theta}_d$): α=0.01[rad]，k/c=6000 [s^{-1}]

3.2　バックラッシュを含む 3 慣性系

図 3 はバックラッシュを含む 3 慣性系を表している．物理パラメータの値は表 1 に示す．J_m，J_g と J_l はそれぞれモータ，ギア，負荷の慣性で，θ_m，θ_g と θ_l はそれぞれの回転角である．また，b_m，b_g と b_l はそれぞれの粘性摩擦係数であり，k_1 と k_2 はシャフトの弾性係数，c_1 と c_2 は減衰係数である．α はバックラッシュの半分の角度，n はギア比である．さらに T_m は入力トルク，T_{g1} と T_{g2} はギアに接続したシャフトの両端のトルクで，T_l は負荷側の外乱トルクである．3 慣性系に含まれるバックラッシュモデルは 3.1.2 節で示した Exact model を使用する．

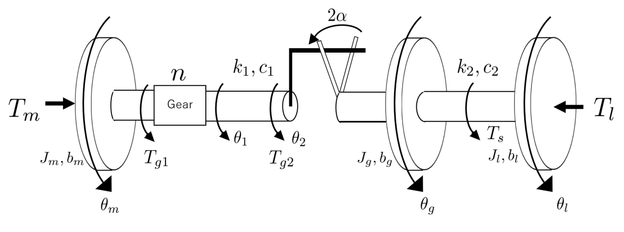

図 3　The three-inertia model

モデルの運動方程式を以下に示す．

$$J_m\ddot{\theta}_m + b_m\dot{\theta}_m = T_m - T_{g_1} \tag{8}$$

$$J_g\ddot{\theta}_g + b_g\dot{\theta}_g = T_{g2} - T_s \tag{9}$$

$$J_l\ddot{\theta}_l + b_l\dot{\theta}_l = T_s - T_l \tag{10}$$

$$T_{g1} = T_{g2}/n,\ \theta_1 = \theta_m/n \tag{11}$$

$$T_s = k_2(\theta_g - \theta_l) + c_2(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}_l) \tag{12}$$

また，モータのダイナミクスは以下である．

$$T_m = K_t i(t) \tag{13}$$

$$L\frac{di}{dt}(t) + Ri(t) = u(t) - K_e\dot{\theta}_m(t) \tag{14}$$

K_t はトルク定数，K_e は逆起電力定数，L はインダクタンス，R は電機子抵抗，i は電流で u が印加電圧である．

表 1　物理パラメータ

J_m[kg·m^2]	J_g[kg·m^2]	J_l[kg·m^2]	k_1[Nm/rad]
5.06×10^{-4}	3.4×10^{-3}	2.9×10^{-3}	3000
k_2[Nm/rad]	c_1[Nm/rad/s]	c_2[Nm/rad/s]	b_m[Nm/rad/s]
198.49	0.1	0	0
b_g[Nm/rad/s]	b_l[Nm/rad/s]	α[rad]	n
0	0	0.01	2
K_t[Nm·m/A]	K_e[V·s/rad]	L[H]	$R[\Omega]$
8.07×10^{-2}	8.07×10^{-3}	1.33×10^{-4}	9.83×10^{-2}

4　非整数階 PID 制御

ここでは 3.2 節で示したシステムに対して非整数階 PID 制御系を設計する．モータの回転角速度 $\dot{\theta}_m$ を観測可能とし，バックラッシュによる振動を抑えつつ目標値に回転角速度を追従させることを目標とする．非整数階 PID 制御は $PI^\lambda D^\mu$ 制御とも呼ばれ，特有の積分器と微分器を持つ．それらはそれぞれ次数として λ と μ の項を持ち，積分器の次数が λ，微分器の次数が μ である．

$PI^\lambda D^\mu$ 制御器の伝達関数は次のように示される．

$$G(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d s^\mu \tag{15}$$

ここに示された追加パラメータ λ と μ によって，直感的でより自由度の高い制御則の設計が可能となり，従来の PID 制御を上回る追従性と制振性能の実現が期待される．

5　シミュレーション結果

ここでシミュレーションによって従来の PID 制御と非整数階 PID 制御の性能を比較検証する．どちらの制御系も Exact model を含む 3 慣性系モデルに対し設計した．なおシミュレーションではモデルに使用した DC モータの仕様に即して制御入力となるモータへの印加電圧を $\pm 20[V]$ に制限した．グラフにおいて，ω_m，ω_g と ω_l はそれぞれモータ，ギア，負荷の回転角速度を表す．使用した制御パラメータを表 2 に示す．本検証では通常の PID 制御器と非整数階 PID 制御器はどちらも同じ K_p, K_i，K_d を用いた．これにより非整数階 PID 制御器の二つの追加パラメータ λ と μ による制御性能の変化を確かめる．

表 2　制御パラメータ

K_p	K_i	K_d	λ	μ
0.082	9.8	1.2×10^{-4}	0.79	0.82

まず外乱のないシステムに対しては，どちらの制御器でも概ね上手く制御することができた．そこで次に負荷側から外乱トルク T_l として周波数 50[Hz]，振幅 0.3[Nm] の矩形波を印加した．図 4 は通常の PID 制御の時間応答を示している．ここでは 3 慣性系の共振特性とバックラッシュによる振動が確認できる．特にモータの回転速度 ω_m ではバックラッシュに起因する急峻な振動が生じており，制御性能を大きく損ねている．また制御入力電圧も激しく変動し，たびたび限界値に達していることが分かる．実際のシステムではこのような挙動は機器に大きなダメージを与える可能性があり，望ましくない．

そこで同じ条件で非整数階 PID 制御を適用した結果を図 5 に示す．先の結果と比較してこの制御系では ω_m の速度制御において優れた制振性を実現できていることが分かる．3 慣性系の共振特性に起因すると思われる振動がギアと負荷に残っているものの，モータではバックラッシュによる激しい振動が上手く抑制されている．特に興味深い違いは入力電圧に表れており，非整数階 PID 制御では従来の PID 制御に比べはるかに安定的にかつ小さな入力でシステムを制御できていることが分かる．

このような差が生じた要因を検証するため，PID 制御でモータに生じた振動の周波数解析を行った．図 6 はモータの角加速度 $\dot{\omega}_m$ の周波数スペクトルを示したものである．300[rad/s]，次いで 1500[rad/s] 付近で大きなピークが見られる．この結果を受け制御器の周波数特性を分析した所，図 7 から，10^0[rad/s] を皮切りに高周波数域になるほどゲイン特性に大きな差が生じることが確認でき

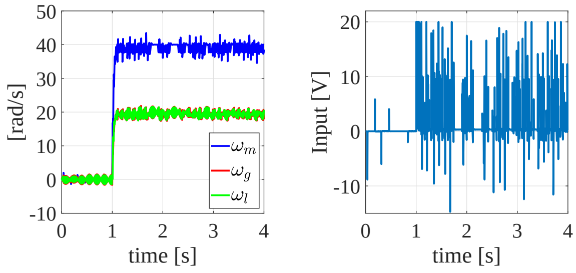

図 4 Time response of classic PID control

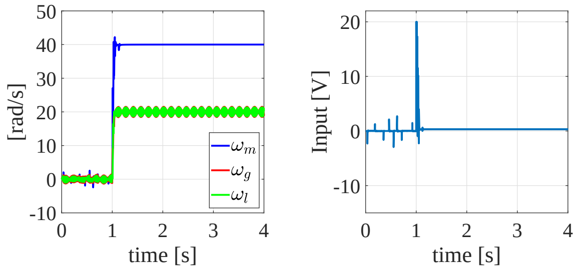

図 5 Time response of fractional PID control

た．これをスペクトル解析の結果と合わせると，モータの振動でピークが観測された $10^2, 10^3$[rad/s] といった高周波数域において PID 制御器ではゲイン線図が上昇し 0 を上回っているのに対し，非整数階 PID 制御器では負の値に抑えられている．こうした高周波数域におけるゲイン特性の差が今回の結果に繋がったと考えられる．

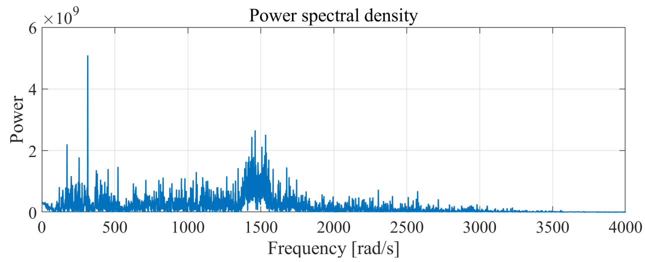

図 6 FFT analysis of $\dot{\omega}_m$

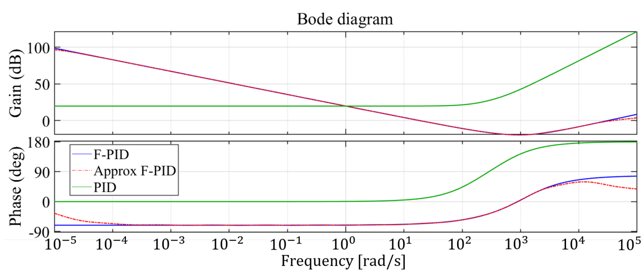

図 7 Bode diagram of controllers

6 考察と展望

本研究ではバックラッシュを含む 3 慣性系に対して非整数次制御系を設計しその性能を検証した．対象システムのモデリングに際し Exact model を用いることでより精密なモデルの構築を実現し，シミュレーションの正確性を向上させた．このモデルに対し，従来の PID 制御と非整数階 PID 制御をそれぞれ適用し，シミュレーションによって比較検討を行った．その結果，非整数階 PID 制御がバックラッシュに対し従来の PID 制御より優れた安定性とロバスト性を実現できることがわかった．また，周波数解析の結果，非整数階 PID 制御は従来の PID 制御に比べ高周波数域において優れたゲイン余裕を実現できることが確認され，これがバックラッシュに起因する振動の抑制性能の差に繋がったと考えられる．

今後の展望としては，駆動系以外のモデルに対する非整数次制御系の適用可能性の検討や実システムへの実装が大きな課題として挙げられ，更なる研究が必要である．

参考文献

[1] C. Ma and Y. Hori, “Backlash vibration suppression control of torsional system by novel fractional order pidk controller,” *IEEJ Transactions on Industry Applications*, vol. 124, no. 3, pp. 312–317, 2004.

[2] M. Nordin and P.-O. Gutman, “Controlling mechanical systems with backlash - a survey,” *Automatica*, vol. 38, no. 10, pp. 1633–1649, 2002.

[3] M. Nordin, J. Galić, and P.-O. Gutman, “New models for backlash and gear play,” *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 11, no. 1, pp. 49–63, 1997.

[4] A. Oustaloup, F. Levron, B. Mathieu, and F. M. Nanot, “Frequency-band complex noninteger differentiator: Characterization and synthesis,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 47, no. 1, pp. 25–39, 2000.

[5] A. Lagerberg, “Control and estimation of automotive powertrains with backlash,” Ph.D. dissertation, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 2004.

[6] M. Nordin and P.-O. Gutman, “New models and identification methods for backlash and gear play,” in *Adaptive Control of Nonsmooth Dynamical Systems*, G. Tao and F. L. Lewis, Eds. Springer-Verlag London, 2001, pp. 1–30.

[7] G. Brandenburg, H. Hertle, and K. Zeiselmair, “Dynamic influence and partial compensation of coulomb friction in a position- and speed-controlled elastic two-mass system,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 20, no. 5, Part 3, pp. 93 – 101, 1987, 10th Triennial IFAC Congress on Automatic Control - 1987 Volume III, Munich, Germany, 27-31 July.

[8] G. Brandenburg and U. Schafer, “Influence and adaptive compensation of simultaneously acting backlash and coulomb friction in elastic two-mass systems of robots and machine tools,” in *Proceedings. ICCON IEEE International Conference on Control and Applications*, 1989, pp. 407–410.