

時空間ネットワークを用いた信号制御の最適化

M2019SS003 加藤優依

指導教員：小市俊悟

1 はじめに

現代社会において、自動車は最も重要な移動手段の一つである。しかし、道路網が発達した現代においても渋滞が発生しており、それによる経済的損失は、年間10兆円以上であると言われる。このような状況を改善するために、車線数の増加や交通状況を迅速に把握するためのETC2.0の普及などの対策が施されてきた。本研究では、渋滞を緩和する手段としての信号制御に注目し、円滑な交通を目的とした信号制御の最適化モデルを提案することを目指す。

モデル化にあたっては、和田らによる「ネットワーク・モデリングによる系統交通信号の最適化」[1]を参考にし、信号制御則を時空間ネットワークに表現し、移動所要時間の総和の最小化を目的とした最適化問題を解くことで、最適な信号制御則を求める。特に、既存研究では、表現が難しかった多起点多終点の交通も考慮したモデルを作成する。現状の制御則と最適化モデルによって得られた制御則を比較するとともに、同一条件のもとに、それぞれの制御則における利用経路と交通量を求め、交差点での滞留量を比較し、制御則の最適化による効果を検証する。

2 信号とネットワークモデル

2.1 ネットワークモデル

時空間ネットワークは、1988年に家田ら[2]によって考案された。本研究では、その着想を道路ネットワークに適用し、交通網などの2次元ネットワークである道路ネットワークに対して時間軸を加え、3次元のネットワークとすることで、信号交差点での待ち時間を考慮して経路選択をするという動的なネットワークフロー問題を静的なネットワークフロー問題として扱うことができるようにする。

通常の道路ネットワークは、交差点を節点とし、交差点間に枝を張った2次元ネットワークで表現される。本研究では、より現実に近い道路網と交通流を表現するために交差点を複数の節点に置き換え、各交差点での左折、右折、直進を表現できるようにしたネットワークを作成する。これを交差点拡大ネットワークと呼び、さらに、この交差点拡大ネットワークを時間軸方向に拡張して、時空間ネットワークとする。

2.2 各種ネットワークの定義

道路ネットワークを想定して、節点集合 V と枝集合 E を持つ有向グラフ $G=(V,E)$ を考える。節点 i から j へ向かう枝を (i,j) と表し、 i と j をそれぞれ枝 $e=(i,j)$ の始点、終点と呼ぶ。簡単のために、各枝 $e=(i,j) \in E$ について、 $i \neq j$ であり、 G には必ず逆向き枝 $e'=(j,i)$ が存在すると仮定する。各枝 $e=(i,j) \in E$ には、通過所

要時間 $d_e=d_{i,j} \geq 0$ と容量 $c_e=c_{i,j} \geq 0$ が付されており、どちらも整数とする。各節点 i について、 i から出る枝の終点の集合を $N(i)$ と表す。先述の仮定により、この $N(i)$ は、 i に入る枝の始点の集合でもある。本研究では、節点 i から出る枝の本数 $|N(i)|$ のことを節点 i の次数と呼び、節点 i に入る枝の本数にも等しい。このような枝に長さのある有向グラフ G をもとに、交差点拡大ネットワークと時空間ネットワークをそれぞれ定義する。

2.2.1 交差点拡大ネットワーク

各枝に長さが与えられた有向グラフ $G=(V,E)$ の各節点 $i \in V$ について、次数 $|N(i)|$ と同じ数の節点 $I(i)=\{i(j) \mid j \in N(i)\}$ を用意し、 i を $I(i)$ の節点に置き換える。続いて、各枝 $e=(i,j) \in E$ を $(i(j),j(i))$ に置き換え、枝 $(i(j),j(i))$ の通過所要時間は $d_{i(j),j(i)}=d_{i,j}$ 、容量は $c_{i(j),j(i)}=c_{i,j}$ と定める。上記に加えて、各 $i(j),i(j') \in I(i)$ ($j \neq j'$)に関して、交差点内枝と呼ぶ枝 $(i(j),i(j'))$ と $(i(j'),i(j))$ を用意し、簡単のために、通過所要時間は $d_{i(j),i(j')}=d_{i(j'),i(j)}=0$ とし、容量は $c_{i(j),i(j')}=c_{i(j'),i(j)}=\infty$ とする。有向グラフ G から以上のようにして作成されるグラフを、交差点拡大ネットワークと呼び、 $G_I=(V_I,E_I)$ と表す。

2.2.2 時空間ネットワーク

本研究では、有向グラフ $G=(V,E)$ の交差点拡大ネットワーク $G_I=(V_I,E_I)$ に対して時空間ネットワークを作成する。時刻を表す集合を $\mathcal{T}=\{1,2,\dots,T\}$ とする。各節点 $i \in V_I$ について、集合 $i_{\mathcal{T}}=\{i_t \mid t \in \mathcal{T}\}$ を考え、各 i_t は時刻 t の節点 i を表す。時空間ネットワーク $G_{\mathcal{T}}=(V_{\mathcal{T}},E_{\mathcal{T}})$ の節点集合 $V_{\mathcal{T}}$ は、このようにしてできる時刻付き節点の集合全体、すなわち、 $V_{\mathcal{T}}=\bigcup_{i \in V_I} i_{\mathcal{T}}$ である。時空間ネットワークの枝集合 $E_{\mathcal{T}}$ は、次のように定める。まず、各 $i \in V_I$ について、時間経過付き枝 $(i,i)_t=(i_t,i_{t+1})$ ($t \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$)を用意する。枝 $(i,i)_t$ の通過所要時間は $d_{(i,i)_t}=1$ 、容量は $c_{(i,i)_t}=\infty$ と定める。また、各枝 $(i,j) \in E_I$ と各時刻 $t \in \mathcal{T}$ について、時間経過付き枝 $(i,j)_t$ を

$$(i,j)_t=(i_t,j_{t+d_{i,j}}) \quad (1)$$

とする。ただし、 $t+d_{i,j} > T$ となるものは除く。枝 $(i,j)_t$ ($i \neq j$)の通過所要時間は $d_{(i,j)_t}=d_{i,j}$ と定め、容量は、

$$c_{(i,j)_t}=\begin{cases} \infty & i=j \\ \lfloor c_{i,j}/d_{i,j} \rfloor & i \neq j \end{cases} \quad (2)$$

と定める。ここまで説明した枝全体を $E_{\mathcal{T}}$ とする。

2.3 信号制御則と時空間ネットワーク

信号制御則を時空間ネットワークに反映させる方法として、いくつか考えられるが、次のように考えることが

基本となる。

信号制御則が一つ決まれば、各信号について現示が赤の時間帯が決まる。例えば、時間帯 $[t_0, t_1] = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1\}$ において、元の有向グラフ G における節点 h から交差点 i に向かう道路上の車両に対して、交差点 i にある信号が赤を示すものとする。これに対応する時空間ネットワーク $G_{\mathcal{T}} = (V_{\mathcal{T}}, E_{\mathcal{T}})$ 上で表すには、 $G_{\mathcal{T}}$ から枝 $(i(h), i(j))_t = (i(h)_t, i(j)_t)$ ($t \in [t_0, t_1], j \in N(i) \setminus \{h\}$) を取り除けばよい。取り除くとした枝の容量を 0 とすることでも表現可能である。

3 時空間ネットワークと最適化問題

2.3 節で述べたように信号制御則が指定されれば、対応する時空間ネットワークが決まる。そこで、ここでは、信号制御則を反映するか否かを含めて、信号制御則、すなわち、時空間ネットワークは所与とし、与えられた時空間ネットワークにおいて発生する交通流を求めるために所要時間の総和の最小化を目的とした多品種フロー問題を定式化する。

多品種フロー問題は、ネットワーク上に複数の品種を同時にそれぞれの始点から終点まで流すという場合に利用される問題である。本研究では、出発時刻や到着地を多様にし、これらを時空間ネットワークに流すものとする。

4 時空間ネットワーク上の多品種フロー

有向グラフ $G = (V, E)$ に対して、Origin-Destination(OD) ペアの集合 $K \subseteq V \times V$ が与えられる。 G に対する交差点拡大ネットワークを G_I とし、さらに、時空間ネットワークを $G_{\mathcal{T}}$ とする。 $G_{\mathcal{T}}$ の節点の部分集合 U について、 $\delta(U)$ は、 U の節点から出て、 U 以外の節点に入る枝の集合を表し、 $\rho(U)$ は、 U 以外の節点から出て、 U の節点に入る枝の集合を表す。 G の節点 i に対応する G_I の節点の集合 $I(i)$ について、各時刻 $t \in \mathcal{T}$ で、 $G_{\mathcal{T}}$ の節点の部分集合 $I(i)_t = \{i(j)_t \mid j \in N(i)\}$ を考え、さらに、

$$I(i)_{\mathcal{T}} = \bigcup_{t \in \mathcal{T}} I(i)_t \quad (3)$$

と書く。ここで、各枝 $e = (m, n) \in G_{\mathcal{T}}$ と各 OD ペア $k = (a, b) \in K$ について、 e を流れる k に関するフローを考え、それを $x_e^k = x_{m,n}^{a,b}$ と表す。フロー x_e^k は非負の整数値をとるものとし、これを非負整数の集合 \mathbb{Z}_+ を用いて、

$$x_e^k \in \mathbb{Z}_+ \quad (k \in K, e \in E_{\mathcal{T}}) \quad (4)$$

と表す。また、枝 e を流れるフローの和は枝 e の容量 c_e を超えられないので

$$\sum_{k \in K} x_e^k \leq c_e \quad (e \in E_{\mathcal{T}}) \quad (5)$$

である。さらに、OD ペア $k = (a, b)$ に関するフローについて、各時刻 $t \in \mathcal{T}$ における $I(a)_t$ からの正味の流出量 $s_t^k = s_t^{a,b}$ が与えられ、下記を満たすことが求められる。

$$\sum_{(m,n) \in \delta(I(a)_t)} x_{m,n}^{a,b} - \sum_{(n,m) \in \rho(I(a)_t)} x_{n,m}^{a,b} = s_t^{a,b} \quad ((a, b) \in K, t \in \mathcal{T}) \quad (6)$$

一方、OD ペア $k = (a, b)$ に関するフローは、 $I(b)_{\mathcal{T}}$ でのみ時空間ネットワークから流出することができるので、下記を満たす。

$$\sum_{(m,n) \in \delta(I(b)_t)} x_{m,n}^{a,b} - \sum_{(n,m) \in \rho(I(b)_t)} x_{n,m}^{a,b} \leq 0 \quad ((a, b) \in K, t \in \mathcal{T}) \quad (7)$$

OD ペア $k = (a, b)$ に関するフローは、 $I(a)_{\mathcal{T}}$ と $I(b)_{\mathcal{T}}$ を除く節点では、保存される必要がある。下記で定義される

$$V_{\mathcal{T}}^k = V_{\mathcal{T}}^{a,b} = V_{\mathcal{T}} \setminus (I(a)_{\mathcal{T}} \cup I(b)_{\mathcal{T}}) \quad (8)$$

を用いれば、

$$\sum_{(m,n) \in \delta(\{m\})} x_{m,n}^{a,b} - \sum_{(n,m) \in \rho(\{m\})} x_{n,m}^{a,b} = 0 \quad ((a, b) \in K, m \in V_{\mathcal{T}}^{a,b}) \quad (9)$$

を満たす。

以上が基本的な設定であるが、次に考える整数計画問題が実行不可能となることを防ぐために、時空間ネットワーク $G_{\mathcal{T}} = (V_{\mathcal{T}}, E_{\mathcal{T}})$ に特別な節点 ω を追加するとともに、節点 i_T ($i \in V_I$) それぞれについても、枝 (i_T, ω) を通過所要時間 $d_{i_T, \omega} = T^2$ 、容量 $c_{i_T, \omega} = \infty$ と定めた上で加える。(4) 式、(5) 式は、これらの枝についても適用される。一方、各 OD ペアに関するフローについて、節点 ω については、流入の超過を許容する。すなわち、

$$\sum_{i \in V_I} x_{i_T, \omega}^{a,b} \geq 0 \quad ((a, b) \in K) \quad (10)$$

以降では、このような追加設定を行った時空間ネットワークを対象にする。

以上の設定の下に、最小化する目的関数として、次を考える。

$$\sum_{k \in K} \sum_{e \in E_{\mathcal{T}}} d_e^k x_e^k \quad (11)$$

フローが制約式 (4), (5), (6), (7), (9), (10) を満たすとき、各 OD ペア $k = (a, b) \in K$ について、 k に関するフロー $x_{m,n}^{a,b}$ が正である枝をその向きに従ってたどれば、 $I(a)_{\mathcal{T}}$ から、 $I(b)_{\mathcal{T}}$ もしくは ω に到達する道となる。フローが整数値であることも踏まえれば、このようにして見つけた道に沿って値が少なくとも 1 のフローが流れていたと考えられる。すると、その道上のすべての枝について、枝を流れるフローを 1 減らすこともできる。このような操作を繰り返せば、いずれの枝のフローも 0 とすることができる。繰り返しの中で、同じ道が複数回得られることもあるので、道を重複して選ぶことができる必要があるが、この繰り返し操作により、結局のところ、フローとは値 1 の量をそのようにして得られた道に沿って流したものの和であると解釈することができる。このような道に沿って流れる値 1 の量が (11) 式の目的関数に寄与する分は、その道の所要時間の和と考えられる。したがって、そのような道の所要時間が小さいほど、目的関数は小さくなると考えられる。ここで、出発時刻が固定されていることも踏まえると、到着時刻が早いほど目的関数値は小さくなるとも言える。

5 信号制御則の再定義

本研究では、時空間ネットワークの枠組みの中で、信号制御則を考える必要があるため、信号制御則を次のように再定義する。

有向グラフ $G = (V, E)$ の節点 $i \in V$ は信号制御則が適用される交差点であるとする。既述のとおり、交差点拡大ネットワーク G_T を用いると、交差点 i を節点 $h \in N(i)$ 方向から流入し、節点 $j \in N(i)$ 方向に流出していく移動を、交差点内枝 $(i(h), i(j))$ に対応づけることができる。したがって、交差点 i の交差点内枝の集合を $E_i = \{(i(h), i(j)) \mid h, j \in N(i)\}$ で表すとき、その部分集合により、許容される、もしくは許容されない移動を指定することができる。本研究では、のちの表記を簡単にするために、 E_i の部分集合を許容されない移動を表すのに使用する。

信号制御則は、いくつかの信号の現示パターンで構成され、サイクル長と呼ばれる時間で、それらのパターンが1周する。各現示パターンがサイクル長に占める割合はスプリットと呼ばれる。本研究では、離散時間 $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots, T\}$ で考えているので、サイクル長も離散時間で考え、交差点 i のサイクル長を T_i ($1 \leq T_i \leq T$) で表す。サイクル長 T_i を σ_i 個のスプリットに分けることにするが、各スプリットについても離散時間としたいので、割合ではなく、それぞれを離散時間 $T_i^{(1)}, T_i^{(2)}, \dots, T_i^{(\sigma_i)}$ で与え、 $\sum_{l=1}^{\sigma_i} T_i^{(l)} = T_i$ をみたすものとする。ここで、第 l 番目のスプリットにおいて許容されない移動を、 E_i の部分集合 $E_i^{(l)}$ によって表すものとするれば、 $(T_i^{(l)}, E_i^{(l)})_{l=1}^{\sigma_i}$ が一つの信号制御則を表すことになる。

実際に、信号制御則を適用するには、開始時刻が必要となる。しかし、その情報を入手することができなかったため、本研究では、すべての信号について、時刻1から制御則を適用する。これにより、時空間ネットワーク G_T に対する信号制御則の適用は、信号制御則に従って、時刻1から順次、許容されない移動を表す交差点内枝の部分集合に相当する G_T の枝の容量を0とすることで表現される。すべてのサイクルの開始時刻を1とすることは、現状の再現においては実際と異なることになるかもしれないが、各スプリットの時間を変更したり、信号の現示パターンの順番を入れ替えることができるのであれば、制御則の最適化においては大きな問題とはならないと考える。

信号制御則を構成する信号の現示パターンについても述べておくと、本研究で対象とした交差点についてまとめた結果、全部で19個のパターンがあった。このうち、4個は三叉路の交差点に対するものであった。残る15個は十字路の交差点に関するものであったが、このうち、11個は交差点に接続する4本の道路すべてが両方向に通行可能な十字路を対象にしている。その他は、4本のうち2本が一方通行であり、流入路と流出路がそれぞれ3本あるような交差点であった。

6 信号制御最適化問題

信号制御最適化問題を次のように定める。有向グラフ $G = (V, E)$ の節点のうち、信号制御則の適用対象となる

交差点の集合を $U \subseteq V$ で表す。信号制御最適化問題では、前節の最後に述べた現示パターンを利用可能な現示パターンとして、各交差点 $i \in U$ について、最適な制御則を構成する。そのときの目的関数は、4節に示した時空間ネットワーク上の多品種フロー問題と同じ(11)式である。三叉路や十字路であること、さらに一方通行の指定を変更することは容易ではないと考えるので、信号制御最適化問題においては、これらは変更できない所与のものとする。したがって、信号制御則を構成するのに利用できる現示パターンも交差点ごとに所与となる。そこで、時刻 t に交差点 $i \in U$ に適用可能な P_i 個の現示パターンを $E_{i,t,1}, E_{i,t,2}, \dots, E_{i,t,P_i}$ とし、これらは各パターンで通行不可となる G_T の交差点内枝の集合を表すものとする。交差点 i が時刻 t において採用する現示パターンを表すために、変数 $z_{i,t,p}$ を導入する。ここで、 p は現示パターンを表す添字であり、各 $p \in \{1, 2, \dots, P_i\}$ について、変数 $z_{i,t,p}$ は、交差点 i が時刻 t に現示パターン p を採用しているとき、1を、採用していないとき、0を取るものとする。時刻 t に採用できる現示パターンは一つであるので、次が多品種フロー問題に加える新たな制約式となる。

$$\sum_{p=1}^{P_i} z_{i,t,p} = 1 \quad (i \in U, t \in \mathcal{T}) \quad (12)$$

時空間ネットワーク G_T の時刻付き枝 $e \in E_T$ について、通行の可・不可を表す変数 y_e を導入する。変数 y_e は0-1変数であり、通行可能であるとき、1を(取ることができ)、通行不可であるとき、0を取る。交差点 i が時刻 t において、現示パターン p を採用しているとき、 $E_{i,t,p}$ の枝は通行不可でなければならない。このような条件は、現示パターンを採用するとき1となる変数 $z_{i,t,p}$ を用いれば、次のように表すことができる。

$$y_e + z_{i,t,p} \leq 1 \quad (i \in U, t \in \mathcal{T}, p \in \{1, 2, \dots, P_i\}, e \in E_{i,t,p}) \quad (13)$$

このような y_e を用いて、多品種フロー問題の制約式(5)を次で置きかえる。

$$\sum_{k \in K} x_e^k \leq c_e y_e \quad (e \in E_T) \quad (14)$$

信号制御則となるためには、所与のサイクル長を周期として、現示パターンが繰り返さなければならない。すなわち、交差点 i はサイクル長 T_i ごとに、同じ現示パターン p を採用することになるので、次を制約式に加える。

$$\begin{aligned} z_{i,t',p} &= z_{i,t,p} \\ (i \in U, t \in \mathcal{T}, p \in \{1, 2, \dots, P_i\}, \\ t' \in \{1, 2, \dots, T_i\}, t \bmod T_i = t') \end{aligned} \quad (15)$$

これらに加えて、使用する現示パターンの数に制限が必要となる。そのために、各交差点 $i \in U$ について、現示パターン $p \in \{1, 2, \dots, P_i\}$ を制御則に使用するか否かを表す変数 $w_{i,p}$ を用意する。変数 $w_{i,p}$ は交差点 i がその制御則に現示パターン p を使用するなら1を、そうでなければ

ば, 0 を取るようにする. 交差点 i の信号制御則に使用できる現示パターンを L_i 個に限るとき, 次が制約となる.

$$\sum_{p=1}^{P_i} w_{i,p} = L_i \quad (i \in U) \quad (16)$$

この制約の下に, $w_{i,p} = 1$ であるような現示パターンのみを使用できるので, 制約式 (15) も踏まえれば, 次を満たすことが要求される.

$$z_{i,t,p} \leq w_{i,p} \quad (i \in U, t \in \{1, 2, \dots, T_i\}, p \in \{1, 2, \dots, P_i\}) \quad (17)$$

また, 逆に, $w_{i,p} = 1$ であるような現示パターン p はサイクル中に現れないといけないので, 次も制約式として加える.

$$\sum_{t=1}^{T_i} z_{i,t,p} \geq w_{i,p} \quad (i \in U, p \in \{1, 2, \dots, P_i\}) \quad (18)$$

制約式 (16) により使用する現示パターンの総数を制限することはできるが, それだけでは, サイクル長の中で頻繁に変わることが許容される. そこで, 次を満たすような補助的な 0-1 変数 $\zeta_{i,t,p}$ を用意する.

$$z_{i,1,p} \leq \zeta_{i,1,p} \quad (i \in U, p \in \{1, 2, \dots, P_i\}) \quad (19)$$

$$z_{i,t,p} - z_{i,t-1,p} \leq \zeta_{i,t,p}$$

$$(i \in U, t \in \{2, 3, \dots, T_i\}, p \in \{1, 2, \dots, P_i\}) \quad (20)$$

(19) 式により, 時刻 $t = 1$ で使用する現示パターン p について, $\zeta_{i,1,p} = 1$ が要求される. さらに, (20) 式では, 時刻が $t-1$ から t となるときに現示パターン p を使用し始めるとすると, 左辺が 1 となるので, $\zeta_{i,t,p} = 1$ となることが要求される. このような $\zeta_{i,t,p}$ を利用すれば, 現示パターンが切り替わる回数を制限できる. つまり, 次の制約式により, サイクル内の現示パターンの切り替わり回数を使用する現示パターンの数と同じく L_i となる.

$$\sum_{t=1}^{T_i} \sum_{p=1}^{P_i} \zeta_{i,t,p} = L_i \quad (i \in U) \quad (21)$$

(21) 式の左辺には, サイクルの最初の現示パターンを切り替わりとして含む.

7 計算実験

国土交通省が提供している平成 7 年の道路データ (公財) 日本道路交通情報センター (JARTIC) が提供している交差点制御情報また (公財) 日本交通管理技術協会が提供している交差点の位置情報を入手し, これらを基にネットワークの作成を行った. 計算実験では, 中区のネットワークを使用する. ネットワークにおける節点の数は 46, 枝の本数を 140 である. また, OD ペアの数 10, 20 秒間隔を想定した離散時間を使用し, 終端時刻 $T = 300$, 移動速度を一様に 30km/h, 枝の容量を一様に 30, 時刻 $t = 1$ から時刻 $t = 10$ まで 10 ずつ流出させるものとし, 以上の設定のもと計算を行なった.

7.1 実行結果

図 1 は, 現状の制御則において, 滞留が多くみられた 3 つの節点での滞留量の推移を示したグラフであり, 縦軸は滞留量, 横軸は時刻となっている. 赤色のグラフは, 現状の制御則での滞留量の推移を表し, 青色のグラフは, 信号制御最適化問題によって得られた制御則における滞留量の推移を表している.

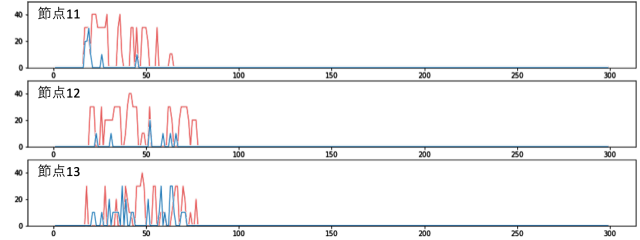


図 1 滞留量の推移

現状と最適化後と比較すると, 滞留が発生する頻度が減り, 滞留量の最大値が低くなった. また, 最適化前で滞留量が多かった時刻に関して, それが減少されるように最適化されていることがわかる. グラフの形にも注目してみると, 滞留が発生した後に, 一度下がってはいるが, 0 にはならずまた増加したり平衡状態となるグラフが最適化前に見られる. これは, 進みたい方向への青現示が表示されず信号待ちしている滞留車の量を表していると考えられる. 最適化後は, そのような形のグラフは見られず, 待ち状態がなくなっている. 加えて, 所要時間の総和である最適値においても現状の制御則による最適値が 85840 であったのに対し, 信号制御最適化問題での最適値は 81890 と減少した.

8 おわりに

本研究の信号制御最適化モデルは, 実際の信号制御則に対する条件を全て反映するには至っていないが, 提案する信号制御最適化モデルを用いた計算実験の結果から, 本研究によって時空間ネットワークの新たな活用方法を示すことができたと考える. 今後の課題として, 上で述べたように, 現在のモデルでは実際の信号制御則に対する条件を反映できていないため, 条件を満たすような制約式の追加が挙げられる. また, 現状のネットワークでは, 十字路において, すべての左折が可能であるとき, 交差点内枝をつたって直進も右折も可能な状況にあり, このような状況を排除することも今後の課題として挙げられる.

参考文献

- [1] 和田健太郎・瀧川翼・桑原雅夫: 「ネットワーク・モデリングによる系統交通信号の最適化」. 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.71, No.4, pp.168-180, 2015.
- [2] 家田仁・赤松隆・高木淳・畠中秀人: 「利用者均衡配分法による通勤列車運行計画の利用者便益評価」. 土木計画学研究論文集, No.6, pp.177-184, 1988.