２入力２出力磁気浮上システムに対する
物理モデリングとシステム同定

M2018SC011 余語紘行

指導教員：陳幹

1　はじめに

本研究の目的は磁気浮上系に対してシステム同定を行い，コントローラ設計に使用するための数理モデルを取得することである．

磁気軸受は複数の電磁石を利用することにより非接触で多自由度で動かすことができるシステムであるが，使用される物理モデルでは微小変動を仮定することで直交に配置されている電磁石同士の影響を無視することが多い [1][2]．しかし，複数の電磁石により対象をある程度の大きさで動かす場合においては必ずしも適切な物理モデルであるとは限らない．そこで，本研究では直交に配置されている電磁石同士の影響が生じると仮定した物理モデルの導出を行い，影響が生じないと仮定した物理モデルと比較を行う．また，磁気浮上系の非線形モデルに対して線形モデルを取得するには従来テイラー展開がよく使用されている．しかし，物理パラメータや動作範囲によっては非線形性などにより必ずしも良い一致にならないことがある．そこで非線形モデルに外生信号を加え，システム同定を行い，線形モデルの取得を行う．磁気浮上系は不安定系であるため，フィードバック制御下でシステム同定を行わなければならない．コントローラの影響を考慮に入れた閉ループ同定の手法として安定化予測誤差法が提案されており [3]，不安定系に対しての有効性が確認されているため，磁気浮上系に対する適用は有効であると考えられる．本研究で使用する磁気浮上系の物理モデルは２入力２出力であるが，x 方向，y 方向それぞれ１入力１出力として考え，安定化予測誤差法の適用を行う．

2　対象とするシステム

2.1　２入力２出力磁気浮上システムの物理モデリング（Case １）

従来使用されてきた２自由度の吸引型の磁気軸受の並進運動を表す物理モデルを示す．電磁力が電流の二乗に比例し，対象の軸の位置と電磁石の位置とのギャップの二乗に反比例するして考える．すると，次の非線形微分方程式が得られる．

$$m\frac{d^2}{dt^2}X(t) = F_{12}(t) = f_1(t) - f_2(t) \tag{1}$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}Y(t) = F_{34}(t) = f_3(t) - f_4(t) \tag{2}$$

$$f_1(t) = K_e\frac{(I_{12}+i_{12}(t))^2}{(p-X(t))^2}, f_2(t) = K_e\frac{(I_{12}-i_{12}(t))^2}{(p+X(t))^2}$$

$$f_3(t) = K_e\frac{(I_{34}+i_{34}(t))^2}{(p-Y(t))^2}, f_4(t) = K_e\frac{(I_{34}-i_{34}(t))^2}{(p+Y(t))^2}$$

m は電磁石で制御する対象の質量，K_e は電磁力定数，I_{12}，I_{34} はバイアス電流，p はギャップ長，X と Y は変位を表す．電磁力 F_{12} を平衡点 $(i_{12}, X) = (0, 0)$，電磁力 F_{34} を平衡点 $(i_{34}, Y) = (0, 0)$ 近傍でテイラー展開する．よって次の線形化された微分方程式が得られる．

$$m\frac{d^2}{dt^2}X(t) = k_{XX}X(t) + k_{XI}i_{12}(t) \tag{3}$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}Y(t) = k_{YY}Y(t) + k_{YI}i_{34}(t) \tag{4}$$

$$k_{XI} = \frac{4K_eI_{12}}{p^2}\ ,\quad k_{XX} = \frac{4K_eI_{12}^2}{p^3}$$

$$k_{YI} = \frac{4K_eI_{34}}{p^2}\ ,\quad k_{YY} = \frac{4K_eI_{34}^2}{p^3}$$

2.2　２入力２出力磁気浮上システムの物理モデリング（Case ２）

４つの電磁石により磁気的な吸引力を用いる磁気浮上系を考える．対象 P とし，その位置を (X, Y) と置く．x 方向の制御の際に使用する電磁石を em1，em2 とし，y 方向の制御の際に使用する電磁石を em3，em4 とする．em1 の位置を $(p, 0)$，em2 の位置を $(-p, 0)$，em3 の位置を $(0, p)$，em4 の位置を $(0, -p)$ とする．想定するシステムの概略図を図１に示す．ここで，F_{em1} の x 方向の

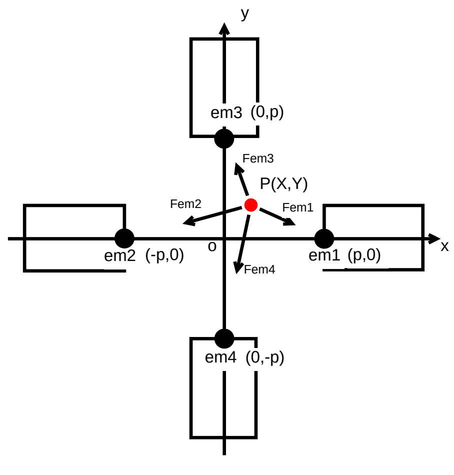

図１　システムの概略図

力 F_{em1X} は次の式で表される．

$$F_{em1X}(t) = K_e\frac{(p-X(t))(I_{12}+i_{12}(t))^2}{\{(p-X(t))^2+Y(t)^2\}^{\frac{3}{2}}} \tag{5}$$

F_{em1} の y 方向の力 F_{em1Y} は次の式で表される．

$$F_{em1Y}(t) = K_e\frac{Y(t)(I_{12}+i_{12}(t))^2}{\{(p-X(t))^2+Y(t)^2\}^{\frac{3}{2}}} \tag{6}$$

残りの F_{em2X}, F_{em3X}, F_{em4X}, F_{em2Y}, F_{em3Y}, F_{em4Y} においても同じように定義する．

これより，次の磁気浮上系の微分方程式が得られる．

$$m\frac{d^2X(t)}{dt^2} = F_X(t) \tag{7}$$
$$= F_{em1X}(t) - F_{em2X}(t) - F_{em3X}(t) - F_{em4X}(t) \tag{8}$$
$$m\frac{d^2Y(t)}{dt^2} = F_Y(t) \tag{9}$$
$$= F_{em3Y}(t) - F_{em4Y}(t) - F_{em1Y}(t) - F_{em2Y}(t) \tag{10}$$

電磁力 F_X, F_Y を平衡点 $(i_{12}, i_{34}, X, Y) = (0,0,0,0)$ 近傍で線形化する．よって次の線形化された微分方程式が得られる．

$$m\frac{d^2}{dt^2}X(t) = k_{Xx}X(t) + k_{Xi}i_{12}(t) \tag{11}$$
$$m\frac{d^2}{dt^2}Y(t) = k_{Yy}Y(t) + k_{Yi}i_{34}(t) \tag{12}$$
$$k_{Xi} = \frac{4K_eI_{12}}{p}, k_{Xx} = \frac{4K_eI_{12}^2}{p^3} - \frac{2K_eI_{34}^2}{p^3}$$
$$k_{Yi} = \frac{4K_eI_{34}}{p}, k_{Yy} = \frac{4K_eI_{34}^2}{p^3} - \frac{2K_eI_{12}^2}{p^3}$$

Case2 では異なる軸に配置された電磁石による影響は生じるが，線形モデルの構造から 1 入力 1 出力の同定手法を適用することが可能であることが確認できた．平衡点近傍付近において，テイラー展開により近似の精度は確保されるが，動作範囲を広くとると非線形性により近似の精度は悪くなるため，その動作範囲においてより精度の高い線形モデルの取得を行うためにシステム同定を利用する．

2.3 システムの構成

想定する 2 入力 2 出力システムのブロック線図を図 2 に示す．r_x, r_y は同定の際に使用する外生信号である．対象は 2 入力 2 出力連続時間システムであり，離散時間コントローラによりフィードバック制御されているとする．$P_{12} = 0, P_{21} = 0$ として次の差分方程式をシステム同定で取得する．

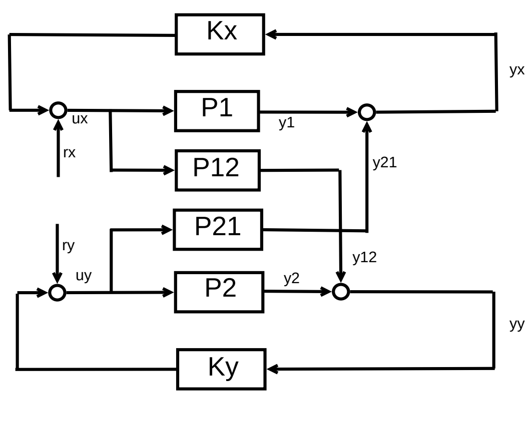

図 2 想定する 2 入力 2 出力システムのブロック線図

$$y_x[k] + a_{x1}y_x[k-1] + a_{x2}y_x[k-2] = b_{x1}u_x[k-1] + b_{x2}u_x[k-2] \tag{13}$$
$$y_y[k] + a_{y1}y_y[k-1] + a_{y2}y_y[k-2] = b_{y1}u_y[k-1] + b_{y2}u_y[k-2] \tag{14}$$

ここで $y[k] = y(kT)$, $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ であり，T はサンプリング周期である．a_{x1}, a_{x2}, b_{x1}, b_{x2}, a_{y1}, a_{y2}, b_{y1}, b_{y2} を推定する．

3 システム同定理論

予測誤差法の枠組みで，閉ループ系に対して有効な手法の一つに安定化予測誤差法がある [3]．安定化予測誤差法は不安定系に対して有効とされる双対 Youla パラメトリゼーションによる方法から導かれており [4]，実際に倒立振子ロボットに対して適用されているため [5]，本研究の目的である磁気浮上系に対してよい推定値が得られることが期待される．

次の離散時間閉ループシステムを考える．

$$y[k] = P[q^{-1}]u[k] + v[k] \tag{15}$$
$$u[k] = r[k] - K[q^{-1}]y[k] \tag{16}$$

y は出力，u は入力，r は外線信号，v は観測ノイズを表している．安定化予測誤差法の予測子 $\hat{y}$ を次の式で定義する．

$$\hat{y}[k] = \hat{P}[q^{-1}]\hat{u}[k] \tag{17}$$
$$\hat{u}[k] = u[k] + K[q^{-1}](y[k] - \hat{y}[k]) \tag{18}$$
$$\hat{P}[q^{-1}] = P[\hat{\theta}, q^{-1}] \tag{19}$$

式 (17), (18) から予測誤差 ϵ を定義する．$\epsilon[k] = y[k] - \hat{y}[k]$ から次の式が導かれる．

$$\begin{aligned}\epsilon(t) &= \hat{S}[q^{-1}]y[k] - \hat{S}[q^{-1}]\hat{P}[q^{-1}]u[k] \\ &= \hat{S}[q^{-1}]S[q^{-1}]\{P[q^{-1}] - \hat{P}[q^{-1}]\}r[k] \\ &+ S[q^{-1}]v[k]\end{aligned} \tag{20}$$

$$S[q^{-1}] = \frac{1}{1 + P[q^{-1}]K[q^{-1}]}$$
$$\hat{S}[q^{-1}] = \frac{1}{1 + \hat{P}[q^{-1}]K[q^{-1}]}$$

目的関数を次に示す．

$$V(\hat{\theta}, \epsilon) = \sum_{k=0}^{N} \epsilon[\hat{\theta}, k]^2 \tag{21}$$

式 (21) の目的関数が小さくなるように $\hat{\theta}$ を動かすことにより，$P[q^{-1}] - \hat{P}[q^{-1}]$ の差が小さくなる．また，$E\{v[k]\} = 0$, $E\{r[k]\} = 0$, $E\{v[k_1]r[k_2]\} = 0(\forall k_1, k_2)$ のとき $\hat{\theta}$ は不偏推定値である．$E\{\}$ は期待値を表す．モデル化誤差が $P[q^{-1}] - \hat{P}[q^{-1}]$ が 0 に近似できれば，$\hat{P}[q^{-1}]$ に対する

入力は $S[q^{-1}]r[k]$ となり，外生信号 r に依存する出力 $\hat{y}$ を推定することができる．

本研究で使用する磁気浮上系の構成において，本来 2 入力 2 出力であるが，テイラー展開により得た線形モデルの構造から各軸独立として 1 入力 1 出力と同様に扱うことができる．そこで，線形モデルの取得方法の一つとして，安定化予測誤差法を使用したシステム同定を行う．

4　数値例

連続時間の PD コントローラ $K_x(s) = K_{px} + K_{dx}s$ を離散化した $K_x[q^{-1}] = K_{px} + K_{dx}\frac{1-q^{-1}}{T}$ を x 方向の制御で使用し，$K_y(s) = K_{py} + K_{dy}s$ を離散化した $K_y[q^{-1}] = K_{py} + K_{dy}\frac{1-q^{-1}}{T}$ を y 方向の制御で使用する．物理パラメータを $m = 0.5$，$K_e = 0.04$，$I_{12} = 4$，$I_{34} = 4.5$，$p = 0.05$ と置き，コントローラのゲインを $K_{px} = 160$, $K_{dx} = 0.7906$, $K_{py} = 180$, $K_{dy} = 0.7906$ と置くことで安定化させる．Runge-Kutta 法を使用してサンプリング周期 $2 \times 10^{-4}[s]$ で Case1 の式 (1)，式 (2)，Case2 の式 (7)，式 (9) の数値計算を行ない 11000 個の入出力データを取得した．安定性を考慮に入れ，外生信号 r_x，r_y は平均 0 分散 5 の $E\{r_x[k_1]r_y[k_2]\} = 0(\forall k_1, k_2)$ の M 系列信号を使用した．Case1 における非線形モデルとテイラー展開により得た線形モデルの外生信号に対する応答を図 3 に，Case2 における外生信号に対する応答を図 4 に示す．図 3 において，非線形モデルの応答とテイラー展開により得た線形モデルの応答に大きな差が生じていることがわかる．それに対して図 4 では非線形モデルの応答とテイラー展開により得た線形モデルの応答の差が小さいことが確認できる．図 3，図 4 に示したシミュレーションで用いたで外生信号に対する非線形モデルの応答を使用して，安定化予測誤差法による閉ループ同定を行った．その際に Matlab の lsqnonlin 関数を利用して，式 (21) の目的関数を最小化するような式 (13)，式 (14) のパラメータを取得した．Case1 における非線形モデル，テイラー展開により得た線形モデル，システム同定で得た線形モデルに対して，システム同定の際に使用したものとは異なる外生信号を加えた．システムの応答を図 5，図 6，図 7 に示す．同様に Case2 における非線形モデル，テイラー展開により得た線形モデル，システム同定で得た線形モデルの外生信号に対するシステムの応答を図 8，図 9，図 10 に示す．

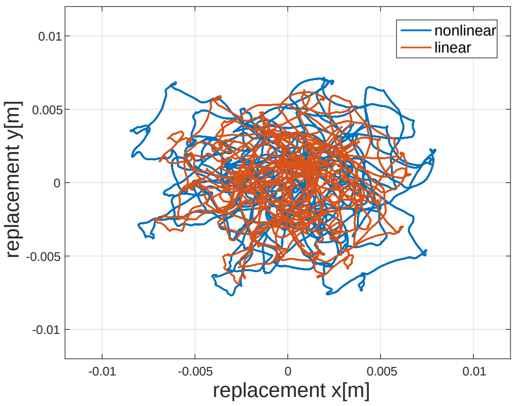

図 3　外生信号に対するシステムの応答（Case1）

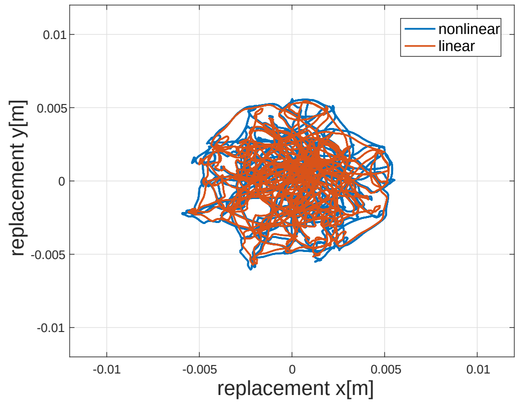

図 4　外生信号に対するシステムの応答（Case 2）

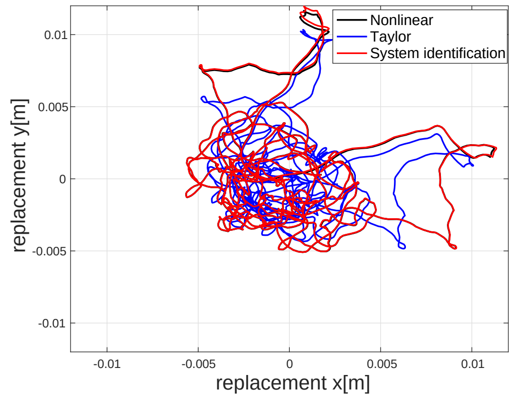

図 5　外生信号に対するシステムの応答（Case1）

Case1，Case2 のどちらにおいてもシステム同定で得た線形モデルはテイラー展開により得た線形モデルと比較して非線形モデルの応答とよく一致していることが確認できる．これより，必ずしもテイラー展開により得た線形モデルが適切ではなく，非線形性が無視できない大きい入力が要求される場面では，システム同定により得た線形モデルを使用することにより，入力の大きさに応じたモデルの改善が可能であることを確認した．

5　おわりに

2 入力 2 出力磁気浮上システムにおいて，磁気軸受の物理モデルとして広く使用されてきた異なる軸に配置された電磁石同士の影響が生じないとした物理モデルと影響が生じるとした物理モデルの導出を行った．また，制御系設計で使用される線形モデルの導出手法として，不安定系に対しても有効とされる安定化予測誤差法による閉ループ同定を行う方法を示した．磁気浮上系に対して必ずしもテイラー展開により得た線形モデルが適切であるとは限らないことをシステム同定により得た線形モデルと比較することで確認した．

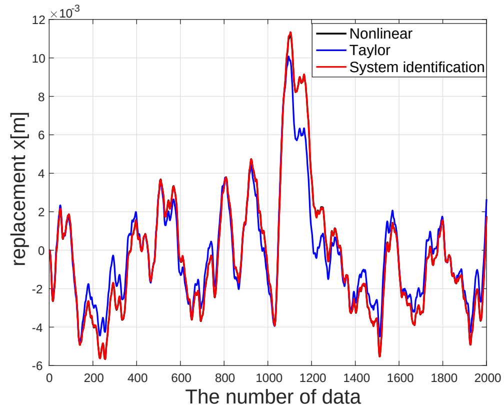

図 6　X 方向における外生信号に対するシステムの応答（Case1）

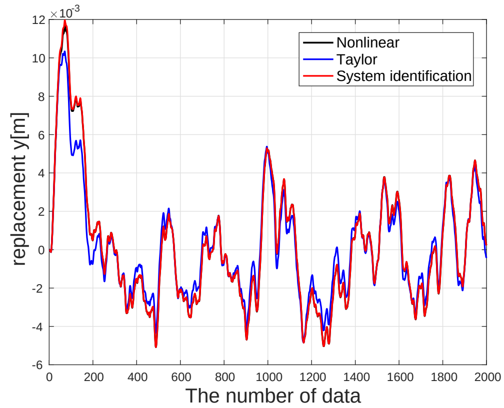

図 7　Y 方向における外生信号に対するシステムの応答（Case1）

参考文献

[1] 水野毅，樋口俊郎：不つり合い補償機能を備えた磁気軸受制御系の構成，計測自動制御学会論文集，20(12)，1095-1101，1984.

[2] 野波健蔵，山中孝司，富永学：磁気軸受で支持された弾性ロータの振動と制御（第一報，ジャイロ効果を無視した場合の制御系の解析と実験），日本機械学会論文集（C 編），54(507)，2661-2668，1988.

[3] Ichiro Maruta，Toshiharu Sugie：Stabilized Prediction Error Method for Closed-loop Identification of Unstable Systems，Automatica，51(15), 479-484，2018.

[4] 岸本紘明，丸田一郎，杉江俊治：Hansen の方法に基づいた非線形系の閉ループ同定，第５９回自動制御連合講演会講演論文集，606-609，2016.

[5] 松井義弘，安田航基，綾野秀樹：閉ループデータを用いた不安定系の同定と制御ゲイン調整，第６０回自動制御連合講演会講演論文集， 721-724， 2017.

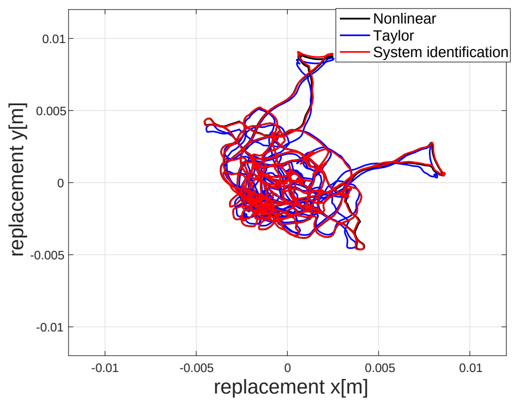

図 8　外生信号に対するシステムの応答（Case ２）

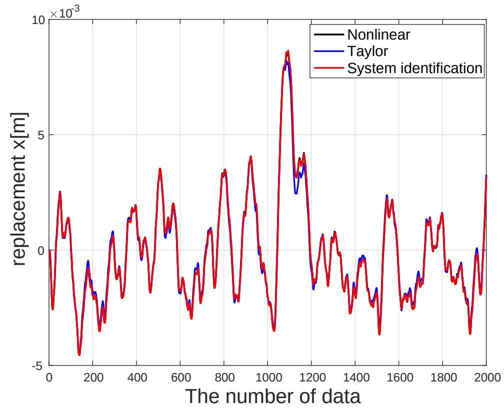

図 9　X 方向における外生信号に対するシステムの応答（Case ２）

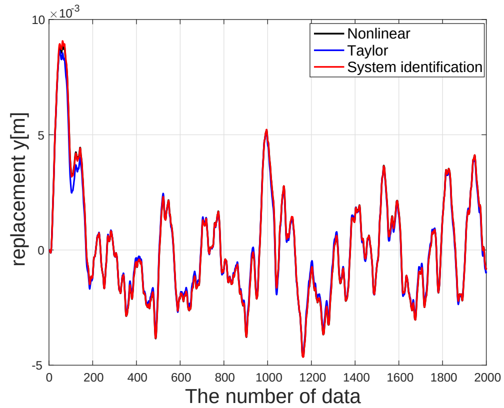

図 10　Y 方向における外生信号に対するシステムの応答（Case ２）