

座標変換を用いた状態制約付き非線形最適制御器設計

— 磁気浮上システムによる検証 —

M2018SC001 橋本 龍司

指導教員：坂本 登

1 はじめに

航空機やロボットアームのように、加速度の変化が少ないシステムに対して、速度に制約を課すことで安全性を確保することができると考えられる。制約を考慮した制御系設計は非線形性を含むため、複雑な計算が必要とされている。非線形最適制御器の設計は Hamilton-Jacobi 方程式を解くことと等価であるが、一般的に困難とされている。近年 Hamilton-Jacobi 方程式の近似解を求めることができる安定多様体法が提案された [1]。不等式制約を課す手法の例としてラグランジュの未定乗数法が挙げられる [2][3]。その他には、近年開発された座標変換を用いる方法がある [4][5]。この手法は自動車エンジンモデルのノッキング制約のように、制約式に入力が含まれていない対象でも対応できるという利点がある。

本研究では、座標変換を用いた方法で制約付き非線形最適制御器設計を行い、磁気浮上システムに適用する。制御対象としている磁気浮上実験機は、上に取り付けられたコイルで鉄球を吸引することによって、上下に浮上させることができる。磁気浮上は不確かなシステムであり、浮上時に発生するオーバーシュートを小さくするために状態に制約を課すことが必要とされている。先行研究として鉄球の加速度に制約を課す方法があるが [2][3]、速度に制約を加えることによって鉄球の位置に対してのロバスト性がさらに増すと考えられる。線形最適制御は浮上しているときに制約を超えるのに対して、速度制約を考慮している非線形最適制御器は制約内に収めた状態で浮上すると予想されている。実際に磁気浮上システムを対象としたフィードバックシミュレーションを行い、線形最適制御と比較することで提案手法の有用性を検証する。

2 磁気浮上モデル

本節では制御対象である磁気浮上のモデルについて示す。表 1 に磁気浮上システムの物理パラメータを示す [3][6]。

表 1 磁気浮上パラメータ

名称 (記号)	値
重力加速度 (g)	9.81 [m/s ²]
質量 (m)	0.0661[kg]
電磁定数 (C)	1.22×10^{-4} [Nm ² /A ²]
コイル抵抗 (R_c)	10[Ω]
電流検知抵抗 (R_s)	1[Ω]
インダクタンス (L_c)	0.4125[H]
アクチュエータパラメータ (d)	5.71×10^{-3} [m]

この磁気浮上システムは、鉄球を上下に持ち上げることができる電磁石ベースの装置である。上のコイルの下面を原点としたときの鉄球の位置を x_{b1} 、速度を $x_{b2} = \dot{x}_{b1}$ とする。また、電流は i_{cb} 、電圧は V_{cb} としている。磁気浮上システムの概略図を図 1 に示す。

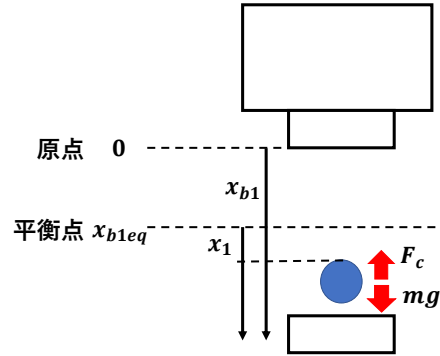


図 1 磁気浮上実験機概略図

磁気浮上システムの運動方程式を式 (1) に示す。

$$m\dot{x}_{b2} = mg - F_c = mg - C \frac{i_{cb}^2}{(x_{b1} + d)^2} \quad (1)$$

電流と電圧の関係を表す微分方程式を式 (2) に示す。

$$\frac{d}{dt} i_{cb} = -\frac{R_c + R_s}{L_c} i_{cb} + \frac{V_{cb}}{L_c} \quad (2)$$

3 座標変換を用いた状態制約付き非線形最適制御器設計

3.1 問題設定

物理的意味を持つ元空間のシステムを以下の式 (3) に示す。

$$\Sigma_x : \dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x = [x_1 \ \dots \ x_n]^T \quad (3)$$

$f \in \mathbb{R}^n$, $g \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $u \in \mathbb{R}^m$ としている。システム (3) に対しての制約条件を以下の (4) に示す。 $C(x)$ は制約式であり、制約を課す対象の式である。

$$r_{min} < C(x) < r_{max} \quad (4)$$

3.2 制約式を含むシステムの導出

状態量の上下限に制約を有するときの解法で進める。新たな座標系を $\xi = [\xi_1 \ \dots \ \xi_n]^T$ と置いたとき以下のような式 (5) になる。

$$\xi = \phi(x) \quad (5)$$

n 次元目の式を $\xi_n = C(x)$ としたとき微分方程式を式 (6) に示す.

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \dot{x} \quad \left(\det \left\{ \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \right\} \neq 0 \right) \quad (6)$$

式 (6) より, 制約式を組み込んだ新たなシステムを以下の式 (7) に示す.

$$\Sigma_{\xi} : \dot{\xi} = \hat{f}(\xi) + \hat{g}(\xi)u \quad (7)$$

3.3 状態制約を満たす非線形システムの導出

式 (7) は制約式を組み込んだ関数であり, 不等式制約を考慮したことになっていない. そこで, \tan の関数を座標変換した \arctan 関数を式 (7) に導入することで状態制約を満たすシステムを導出する. 以下の式 (8) に \arctan 関数を示す.

$$\xi_n = \eta(\nu) = \eta_{c1} \arctan(\eta_{c2} \nu) + \eta_{c3} \quad (8)$$

\arctan 関数の η_{c1} は制約の上限に影響を与える. η_{c2} は原点近傍の立ち上がりの角度に影響を与える. η_{c3} はグラフを上下への平行移動に影響を与える.

制約式を組み込んだ新たなシステム (7) の n 番目の式を式 (9) とする. 尚, 式 (7) の n 番目の式には元空間での入力 u が含まれていないとする.

$$\dot{\xi}_n = \hat{f}_n(\xi) \quad (9)$$

不等式制約を考慮した入力 \bar{u} と元システムの入力 u との関係式を求めるために, 式 (9) の中に元システムの入力 u の項が存在する必要がある. 入力 u が出現するまで, 制約式に関係している微分方程式の $\rho - 1$ 階微分を行う. 制約式に関係している微分方程式 (9) の $\rho - 1$ 階微分を行ったときに現れる入力 u の項を \hat{g}'_n , それ以外の項を \hat{f}'_n とすると導出された式は以下ようになる.

$$\xi_n^{(\rho)} = \hat{f}'_n(\xi) + \hat{g}'_n(\xi)u \quad (10)$$

また, \arctan 関数に関して ρ 階微分を行う. 不等式制約を考慮した入力を $\bar{u} = \nu^{(\rho)}$ とすると以下の式 (11) を得る.

$$\xi_n^{(\rho)} = f_{\eta}(\nu \cdots \nu^{(\rho-1)}) + \frac{\partial \eta(\nu)}{\partial \nu} \bar{u} \quad (11)$$

$f_{\eta}(\nu \cdots \nu^{(\rho-1)})$ は \arctan 関数の微分を行ったときに現れる関数である. 式 (10), (11) より, 不等式制約を考慮した入力 \bar{u} と元のシステムの入力 u の関係式は以下の式 (12) となる.

$$u = \psi_1(\xi, \nu) + \psi_2(\xi, \nu) \bar{u} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \psi_1(\xi, \nu) = \frac{(f_{\eta}(\nu \cdots \nu^{(\rho-1)}) - \hat{f}'_n(\xi))}{\hat{g}'_n(\xi)} \\ \psi_2(\xi, \nu) = \frac{\frac{\partial \eta(\nu)}{\partial \nu}}{\hat{g}'_n(\xi)} \end{cases}$$

制約式を組み込んだシステム (7) に不等式制約を考慮した入力 \bar{u} と元システムの入力 u との関係式を導入する. また, $\xi_n = \eta(\nu)$ としたとき, 以下のようなシステムを得る.

$$\dot{\bar{\xi}} = \bar{f}(\bar{\xi}) + \bar{g}(\bar{\xi})\bar{u} \quad (13)$$

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_{n-1} & \nu & \cdots & \nu^{(\rho-1)} \end{bmatrix}^T$$

$$\bar{f}(\bar{\xi}) = \begin{bmatrix} \hat{f}_1(\bar{\xi}) + \hat{g}_1(\bar{\xi}) \psi_1(\bar{\xi}) \\ \vdots \\ \hat{f}_{n-1}(\bar{\xi}) + \hat{g}_{n-1}(\bar{\xi}) \psi_1(\bar{\xi}) \\ \nu^{(1)} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{g}(\bar{\xi}) = \begin{bmatrix} \hat{g}_1(\bar{\xi}) \psi_2(\bar{\xi}) \\ \vdots \\ \hat{g}_{n-1}(\bar{\xi}) \psi_2(\bar{\xi}) \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.4 状態制約付き非線形システムに対する評価関数

状態制約付き非線形システム (13) に対する評価関数を式 (14) に示す [4].

$$\bar{J} = \int_0^{\infty} (\bar{\xi}^T \bar{Q} \bar{\xi} + u^T R u + \bar{u}^T \bar{R} \bar{u}) dt \quad (14)$$

$$\bar{Q} = \text{diag}([\bar{q}_1 \cdots \bar{q}_n \bar{q}_{n+1} \cdots \bar{q}_{n+\rho}])$$

重み \bar{Q} , R , \bar{R} は対角行列で $\bar{Q} \geq 0$, $R > 0$, $\bar{R} > 0$ としている. 新しい変数である ν の 1 階微分から ρ 階微分以外の変数は元システムの変数と関係している.

評価関数 (14) を最小化するために動的計画法を適用し, Hamilton-Jacobi 方程式を導出する. さらに安定多様体法 [1] を適用することで制御器を設計する.

4 Neural Network 補間の提案

4.1 背景と目的

非線形システムに対して, 安定多様体法を適用することにより, ハミルトン系に現れる閉ループ軌道を得ることができる. 求められた軌道はデータ列であるため, 実装するときは制御入力として扱うことができない. そのため, 求めた軌道に対してフィードバック関数を導出する必要がある.

従来では多項式近似を用いてフィードバック関数を導出していた. 多項式近似はデータ点に近い点を通る近似であるため, データ全体のバランスが考慮されて関数に反映される. 制約問題で取り扱うような急な曲線を描く軌道に対して近似を行う場合, 高い精度での再現を行うために, 曲線の部分に関するデータ数を増やし, 近似次数を上げることが行われていた. しかし, 多項式近似はデータ全体のバランスが考慮されて関数に反映される近似であるため, 高い精度での再現に限度があることが考えられる. また, 近似次数を過度に上げた場合, 本来直線として再現してほしい部分に関して, 周りのデータとの関係から意図しない形で再現されるという問題が生じる.

Neural Network [7][8] は, 多項式近似のようなデータ点

に近い点を通る近似ではない。そのため、制約問題で取り扱うような急な曲線を描く軌道に対して近似を行う場合、多項式近似で現れるような問題が生じないことが期待されている。

4.2 Neural Network 補間によるフィードバック関数を導出するプロセス

Neural Network 補間によるフィードバック関数を導出するプロセスを以下に示す。

Step 1: 教師データ (ハミルトン系に現れる閉ループ軌道) を訓練データとテストデータに分割する

Step 2: 訓練データを用いて学習 (プログラムは外注) を行い、テストデータを用いて汎化能力を検証する

Step 3: 格子目状の入力データを作成する

Step 4: 学習された Neural Network を用いて、格子目状の入力データに対する出力データの導出する

Step 5: 格子目状のデータに対して線形補間を行う

4.3 磁気浮上システムへの適用

4.3.1 問題設定

物理的意味を持つ元空間のシステムを式 (15) に示す。

$$\Sigma_x : \dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x = [x_1 \ x_2]^T \quad (15)$$

x_1 は平衡点からの位置, x_2 は平衡点からの速度, u は平衡点からの入力電流とする。また、鉄球の速度に制約 $-0.05 < x_2 < 0.05$ [m/s] を課す。式 (15) を元に導出された状態制約を考慮した磁気浮上システムに対する評価関数を式 (16) に示す。

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (16)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 \times 10^6 & 1 \times 10^{-12} \\ 1 \times 10^{-12} & 1 \times 10^{-6} \end{bmatrix}, \quad R = 700$$

4.3.2 フィードバックシミュレーションによる評価

今回は、電流を入力、状態を位置と速度とする2次元に低次元化された磁気浮上システムに対して、Neural Network 補間によるフィードバック関数の導出を行った。図2に Neural Network 補間によって導出されたフィードバック関数を使用したフィードバックシミュレーションの応答 ($x_{b1}-x_{b2}$) を示す。そのときに得られた応答 (青線) とハミルトン系に現れる閉ループ軌道の基準軌道 (赤線) を重ねてプロットをしている。初期点から平衡点までフィードバックシミュレーションの応答が基準軌道から外れないことが望ましい。初期値は位置を $x_{b1} = 11.27$ [mm], 速度を $x_{b2} = 0$ [m/s] とし、目標値である平衡点は位置を

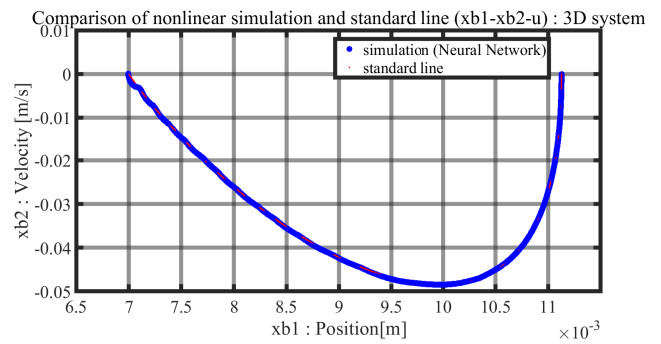


図2 Neural Network 補間によって求めたフィードバック関数を用いたフィードバックシミュレーション ($x_{b1}-x_{b2}$)

$x_{b1} = 7$ [mm], 速度を $x_{b2} = 0$ [m/s] とした。図2より、初期点から平衡点までの間、フィードバックシミュレーションの応答が基準軌道から大きく外れることはなかった。しかし、基準軌道に対してフィードバックシミュレーションの応答が蛇行していることを確認することができる。Neural Network 補間によって求めたフィードバック関数に対して、ハミルトン系に現れる閉ループ軌道における基準軌道のデータを代入し、真値との相対誤差を調べたところ最大で 0.8 % あった。多項式近似によって求められたフィードバック関数の場合、相対誤差は最大でも 3.5×10^{-5} % に抑えられていることも確認した。現在のところ Neural Network 補間によって求められたフィードバック関数の精度は多項式近似によって求められたフィードバック関数の精度に比べて低い。

現在は教師データを訓練データとテストデータに分ける際、ランダムに分割を行っている。ランダムに分割を行った場合、基準軌道などの訓練データとして必要であるデータがテストデータとして扱われる可能性がある。そのため、どのデータが訓練データとして扱うべきか考えていく必要がある。今後の課題として、教師データを訓練データとテストデータに分ける方法について議論することが挙げられる。

5 状態制約付き非線形最適制御器設計と磁気浮上システムへの適用

5.1 問題設定

物理的意味を持つ元空間のシステムを式 (17) に示す。

$$\Sigma_x : \dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T \quad (17)$$

x_1 は平衡点からの位置, x_2 は平衡点からの速度, x_3 は平衡点からの電流, u は平衡点からの入力電圧とする。また、鉄球の速度に制約 $-0.05 < x_2 < 0.05$ [m/s] を課す。式 (17) を元に導出された状態制約を考慮した磁気浮上システムに対する評価関数を式 (18) に示す。

$$\bar{J} = \int_0^{\infty} (\bar{\xi}^T \bar{Q} \bar{\xi} + u^T R u + \bar{u}^T \bar{R} \bar{u}) dt \quad (18)$$

$$\bar{Q} = \text{diag}([1 \times 10^{-7} \ 1 \times 10^{-3} \ 1 \times 10^{-3} \ 1 \times 10^{-6}])$$

$$R = 1 \times 10^2, \quad \bar{R} = 1 \times 10^{-6}$$

5.2 フィードバックシミュレーションの結果

多項式近似により設計した制御器を用いて、フィードバックシミュレーションを行い、状態制約を含む非線形最適制御器 (青線) と状態制約を加えていない線形最適制御器 (赤点線) の比較を行った。(図3, 図4: 時間応答) フィードバックシミュレーションを行う上での位置の初期値は $x_{b1} = 12[\text{mm}]$, 速度の初期値は $x_{b2} = 0[\text{m/s}]$, 電流の初期値は $x_{b3} = 1.6238[\text{A}]$ としている。

図3の下図は速度 x_{b2} の時間応答をプロットしている。

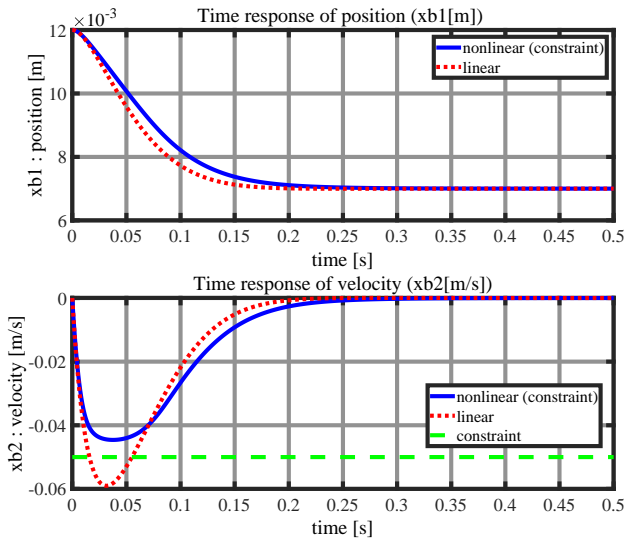


図3 シミュレーション : 位置 (上図), 速度 (下図)

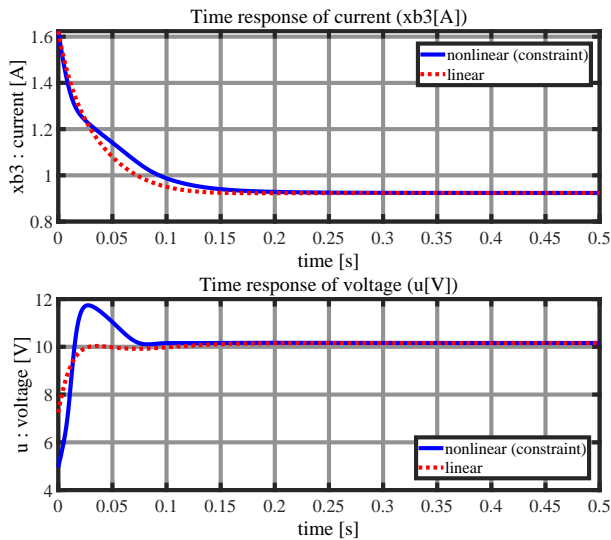


図4 シミュレーション : 電流 (上図), 入力電圧 (下図)

速度制約を含まない線形最適制御器を用いた場合は速度制約 (緑破線) である $-0.05 < x_{b2} < 0.05[\text{m/s}]$ を超えている。それに対して速度制約を考慮した非線形最適制御器を用いた場合は速度制約である $-0.05 < x_{b2} < 0.05[\text{m/s}]$ を超えることなく平衡点に収束している。フィードバックシミュレーションより、設計した状態制約付き非線形

最適制御器が速度制約を満たしていることを確認することができた。

6 おわりに

本研究では、磁気浮上システムを対象として、座標変換を用いた状態制約付き非線形最適制御器設計を行い、フィードバックシミュレーションを行った。速度制約を含んでいない線形最適制御器での応答は制約条件を超えているのに対して、速度制約を含む非線形最適制御器での応答は制約条件をみたして平衡点に収束していることが確認できた。フィードバックシミュレーションより、設計した非線形最適制御器が状態制約を満たしていることを示した。

参考文献

- [1] Noboru Sakamoto, Arjan J. van der Schaft, Analytical approximation methods for the stabilizing solution of the Hamilton-Jacobi equation, IEEE Transactions on Automatic Control, 53-10, 2335/2350, 2008
- [2] Shogo Suzuki, Design and Verification of Nonlinear Optimal Controller Considering Acceleration Constraints Based on Invariant Manifold Calculation, 南山大学大学院 理工学研究科 機械電子制御工学専攻, 修士論文, January 2017
- [3] Anh Tuan Tran, Shogo Suzuki, and Noboru Sakamoto, Nonlinear Optimal Control Design Considering a Class of System Constraints With Validation on a Magnetic Levitation System, IEEE Control Systems Letters, Vol. 1, No. 2, October 2017
- [4] Yoshiki Abe, Gou Nishida, Noboru Sakamoto, Yutaka Yamamoto, Symplectic Numerical Approach for Nonlinear Optimal Control of Systems with Inequality Constraints, International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application, 234-248, 2015. 4
- [5] 大角 隼大, 不等式制約を考慮した積分型非線形最適サーボ制御器の設計と検証, 南山大学大学院 理工学研究科 機械電子制御工学専攻, 修士論文, January 2019
- [6] 中澤 奈美, ポリトープ表現を用いた磁気浮上装置のロバスト安定化, 南山大学 情報理工学部 システム創成工学科, 卒業論文, 2013
- [7] 岡谷 貴之, 機械学習プロフェッショナルシリーズ 深層学習, 株式会社 講談社, 2019. 1. 9
- [8] 斎藤 康毅, ゼロから作る Deep Learning Python で学ぶディープラーニングの理論と実装, 株式会社オーム社, 2019. 5. 31