数理的考察力を養う数学教育
ー図形を題材とした授業の検討ー

M2018SS003 川瀬諒治
指導教員：小藤俊幸

1　はじめに

現在，IT 技術の発達や AI の一般企業への導入など社会が大きく変化する中で，様々な場面において数学ができる人材が求められている．この数学ができる人材とは単に大学入試問題のような与えられた問題について答えを求めることができる人材ではなく，現実の事象から問題点を見つけ出し，得られた問題点を数理的に捉えて数学的な思考をもって解決できる人材のことであると考えられる．また，平成 30 年 3 月に告示された高等学校学習指導要領 [1] によると，数学教育の目標として，

(1) 数学における基本的な概念や原理・法則を体系的に理解するとともに，事象を数学化したり，数学的に解釈したり，数学的に表現・処理する技能を身に付けるようにする．

(2) 数学を活用して事象を論理的に考察する力，事象の本質や他の事象との関係を認識し統合的・発展的に考察する力，数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を養う．

(3) 数学のよさを認識し積極的に数学を活用しようとする態度，粘り強く考え数学的論拠に基づいて判断しようとする態度，問題解決の過程を振り返って考察を深めたり，評価・改善したりしようとする態度や創造性の基礎を養う．
が挙げられ，平成 29 年 3 月に告示された中学校学習指導要領 [2] においても数学教育の目標として，

(1) 数学における基本的な概念や原理・法則を体系的に理解するとともに，事象を数学化したり，数学的に解釈したり，数学的に表現・処理する技能を身に付けるようにする．

(2) 数学を活用して事象を論理的に考察する力，事象の本質や他の事象との関係を認識し統合的・発展的に考察する力，数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を養う．

(3) 数学のよさを認識し積極的に数学を活用しようとする態度，粘り強く考え数学的論拠に基づいて判断しようとする態度，問題解決の過程を振り返って考察を深めたり，評価・改善したりしようとする態度や創造性の基礎を養う．

が挙げられている．これらのことから，現在の数学教育の目標は数学的な知識や表現力を用いて実際の問題を解決することができる力を身に付けさせることであると分かる．このように，社会的な需要や明確な目標ががあるにも関わらず，私が非常勤講師として勤務している高等学校の生徒や別の学校で働く同僚の教師や先輩教師の話によると，実際にはそれをまったく無視していると言ってもよい授業が展開されている場合があるということを聞く．このことに対して私は問題意識を持ち，現状を改善していく必要があると考える．そのために，私は自分が持つ問題意識について具体的に何が問題なのか，問題点を明白にし，それを踏まえた上で，数学ができる人材が欲しいという社会的需要に応え，数学的な知識や表現力を用いて実際の問題を解決することができる力を身に付けさせるという数学教育の目標を果たそうと考える．そこで本研究では，現在の数学教育にある問題点について明確にすることから始まり，それを解消し，現在求められている数学ができる人材を育てていくという観点から必要な数学教育の内容について考察する．また，考察した内容を踏まえて実際に授業を実践する場合どのような教育活動を行うべきかについても考察する．また，授業については実際に社会で用いられている数学について取り扱うという側面から，生徒が実際に問題意識を持って取り組む必要があり，数理モデルを作成するなどして問題を身近に感じられるようにする必要があると思われる．そこで，生徒が数理モデルを作成するなどして視覚的に理解しやすくなると思われる図形を題材にした授業についてに考察する．そうすることで生徒にとって馴染みのない社会で用いられる数学を題材としてもそれほど理解することが困難になることはないと考えられる．そして，そのような授業について考察を深めていく中で分かったことから考察されることについて最後にまとめる．

2　現在の数学教育と数理的考察力

2.1　現在の数学教育の問題点

前章で述べたように，現在の数学教育の目標は数学的な知識や表現力を用いて実際の問題を解決することができる力を身に付けさせることである．しかし，現在の数学教育の状況でそれを達成することは非常に困難であると思われる．なぜならば，現在の数学教育は 2 つの問題点を持っていると言えるからである．

1 つ目の問題点は現在の教科書の構成において応用数学に当てられている分量があまりにも少なすぎるという点である．例えば，参考文献 [3] を見ると，教科書全体のペー

ジ数が目次とさくいんを除いて 155 ページあるのに対して，数学が現実のどのような場面で用いられているのかについて触れられているのは P61 の前書きの部分，P105 の前書きの部分，P135 のコラムの部分の 3 ページ分しか取り上げられていない．残りの部分は定理や公式の証明や例題，練習問題，章末問題など問題演習が教科書の内容のほとんどである．定理や公式，問題演習が大切でないとは考えないが，やはり数学ができる人材が欲しいという社会的需要に応えるという点において内容が十分であるとは到底考えられないと言える．

2 つ目の問題点は 1 つ目の問題と関係があるが，学校での授業が公式や定理を証明し，それらを用いていかに問題を解くかということに重点をおいた授業がなされているという点である．先ほども述べた通り，私はそういった授業が大切でないとは考えない．むしろ，生徒の数学に対する習熟度に応じてそういった授業を実際にすることもある．しかし，数学に対する習熟度が十分に高く，社会で用いられている数学を題材にして数学的な思考力を高めていくことができる段階にある生徒に対してひたすら問題演習を課している学校やクラスがあるという話を生徒や他の教師から聞くことがある．中には授業中に学外の業者が実施している模擬試験の過去問を生徒に解かせて解説する『模試対策』を行っている学校もあると聞く．本来模擬試験というものは日頃の学習の成果を発揮し，今後の学習の指針とするべきものであるが，その模擬試験の対策の学習をすることは本末転倒と言わざるを得ない．このような授業がはびこっている数学教育の現状は明らかにおかしいと私は考える．

これらの問題点を解決するために考えられる方法は，教科書に縛られない自由な発想で教育内容を考えることであると私は考える．教科書から教える内容を考えるのではなく，生徒にどのような数学を教えていくべきかということを考察の出発点とし，そこから実際に何を教えるべきか教育内容を考えるということである．そこで次の節では具体的にどのようなことを教えていくべきかについて考察を深める．

2.2 数理的考察力

生徒にどのような数学を教えるべきか考えると，社会と数学を結びつけて生徒が問題に直面した際に自ら対応できる力が身に付くような数学を教えるべきだと私は考える．社会とのつながりを意識した数学教育は以前から日本の数学教育の目標として長らく掲げられてきたものであると言え，参考文献 [4] によると，昭和 10 年代には数理思想の涵養が主張されたことがはじまりであり，その後参考文献 [5] によると昭和 20 年代の生活単元学習，昭和 20 年後半から昭和 30 年代にかけては「数学的な考え方」の育成，昭和 50 年代からは「問題解決能力」の育成を目指した教育と様々な目標が掲げられてきたがその根幹には，「事象に数理を見出し，数理的に発展創造させる」数理思想があると考えられる．そのことを踏まえて，私は社会と数学を結びつけて生徒に『現実にある問題を数理的に捉え，数学的に表現し，数学的手法を用いて解を得て，現実の問題を解決する助けとなる数理的解釈を得ることができる力』を身につけさせたいと考える．本研究では，そのような力を数理的考察力と定義する．

社会とのつながりを意識した社会で用いられる数学とは何か，それらを題材とした数学をどのように授業に反映させることで数理的考察力が身に付けられるかについて，次の節以降で考察を深めていく．

2.3 社会で用いられる数学

数理的考察力を養うために社会で活用される数学を題材として何を教えるかについて考えると，真っ先に思い浮かぶものが OR(operations research) である．OR とは 20 世紀半ばにイギリスがドイツの空からの攻撃に警戒するために数学者や物理学者を集めてレーダーの効率的な運用について研究に取り組んだことが始まりであるとされ，その後高射砲の運用や対潜水艦用爆雷の効率的な設置場所の決定など軍事的な学問として発展した経緯をもつ学問である．[6] 始まりは軍事目的であったが，戦争終結後に軍人たちが企業などに OR のノウハウを持ち込み，現在では企業のマネジメントや工場の効率的な稼働について研究する経営の科学となっている．私が大学，大学院と OR について学びを深めてく中で，よく取り扱ったものとして挙げられる内容は数理計画問題と施設配置問題である．

数理計画問題とは，与えられた条件のもとで目的に応じて立てられた目的関数の最小値あるいは最大値を求めるという最適化問題の一種である．数理計画問題は与えられた条件によっていくつかの問題に分類される．例えば条件を表す制約条件と目的関数について線形に記述されている線形計画問題，非線形に記述されている非線形計画問題，変数が整数値をとるという制約条件がつく整数計画問題がある．これらの問題は主に工場の生産管理や倉庫の在庫管理，流通計画などの場面でよく現れている．そのため，社会で用いられる数学として違和感無く取り上げることができると思われる．しかし，数理計画問題の中で非線形計画問題は線形でないすべての関数が対象と範囲が広すぎるため教材として取り上げることは難しいと思われる．そのため教材として考えられるものは線形計画問題と整数計画問題であると思われる．

施設配置問題とは，平面または空間において与えられた条件を満たすような範囲においてある施設の最適な設置場所を決定する最適化問題の一種である．施設配置問題において代表的なものはメディアン問題とセンター問題であ

る．メディアン問題とは顧客から最も近い施設への距離の総和を最小化するように施設の位置を決定する問題である．センター問題とは顧客から最も近い施設への距離の最大値が最小となるように施設を配置する問題である．この他にも条件を変えることによって様々なタイプの問題が考えられる．これらの問題は主に倉庫や工場，ゴミ処理場や発電所など生活に関わる様々な施設の配置問題に現れるため，社会で用いられる数学として違和感無く取り上げることができ，教材として考えられると思われる．

このように社会で活用される数学はいくつも存在する．以上の内容を踏まえて，次の節では数理的考察力を養う授業について考察する．

2.4　数理的考察力を養う授業

実際に問題解決するために必要なことを考えると，与えられた情報から問題解決のために必要な要素を抽出し数理モデル化する，その数理モデルを解析して結果を得る，得られた結果を現実の問題に置き換えたときに有用な意味を見出し問題を解決する，この 3 段階に分けられる．これらをできるようになれば数理的考察力が身に付いていると言える．数理的考察力を養うための教育として私は問題解決型授業の展開が有効であると考える．私の想定する問題解決型授業とは次の構成からなる授業のことである．

1. 問題の提示
2. 問題解決
3. 問題の検討
4. まとめ

1．問題の提示においては，教師が問題を提示し，生徒に問題を数理的に捉えさせる教育活動を行う．

2．問題解決においては，実際に数理的に捉えた問題を数学的に表現し，数学的手法を用いて解を得ることを行う．

3．問題の検討においては，2．において用いた手法以外に解決する方法はないか，問題の条件を変えた場合どのようなことを考慮する必要があるのかといったことを考察する教育活動や，ICT(Information and Communication Technology：情報通信技術) を用いて実際に問題を解いてみること，実社会のどのような場面で同様のことが考えられるかを調べるといった教育活動を行う．

4．まとめにおいては，これまで行ってきた活動の中でどのようなことが発見できたか，分かったことは何だったか，疑問に思ったことがあればどのようなことかを生徒自身にまとめさせ，次の教育活動のための思考の練り上げを行う．

この構成の授業であれば，実際に生徒が問題解決の過程を体験することができ，そこから派生する新たな知識や考え方を得られ，それをまとめることでそれらを生徒に定着させることができる．教師が黒板で一斉に説明をする従来の授業よりも効果があると思われる．ここで重要になるのは生徒がどのような環境で授業に取り組むことができるかということである．授業の中で生徒が数理的に考察し，数学的に表現し，数理的に解釈する機会が求められるため，生徒が積極的に学習に取り組めるような環境を教師が整える必要がある．そのために，生徒の状況を適切に把握し，教室環境 (ICT の整備状況など) に応じて適切な教材選びや教育活動の選択をする必要がある．

次の章では，前節で挙げた社会で用いられる数学を実際の授業に活かした具体例を考え，数理的考察力を養う授業についてさらに考察を深める．

3　授業例

3.1　施設配置最適化問題を題材とした授業

3.1.1　多角形と円の関係に注目する授業

まず生徒に，公共的な建物は建築する際に，その用途に応じて適切な位置に建てられるように建築計画を立てる必要があることを話す．最終的にどこに建築するのか決める際に，その決め方について数学的な根拠を持たせることが重要になることもあることを話す．その上で，生徒に次のような課題を考えさせる．

課題 1：
A，B，2 つの町がある．そのどちらからも距離が等しい所に役所を作りたい．そのような場所があるか考えてみよう．

課題 2：
A，B，C，3 つの町がある．そのいずれからも距離が等しく，その距離が最短となる場所に役所を作りたい．そのような場所があるか考えてみよう．

課題 3
A，B，C，D，4 つの町がある．そのいずれからも距離が等しく，その距離が最短となる場所に役所を作りたい．そのような場所はあるか考えてみよう．

詳しい授業の展開については本稿に記載するが，大まかな流れは問題を提示し，生徒に考えさせる．その後，他の生徒と答えを比較し，さらに問題の条件を変えるなどして問題への考えを深めていくというものである．そして，最後にまとめとしてこれまでの授業で扱った内容についてももう一度振り返る．これらの活動を通して，普段の生活の中

では意識していない所で図形の性質が利用されていること，役に立っていることを実感させることで生徒の数学に対する興味・関心を高められると思われる．

3.1.2　多角形の重心に注目する授業

現実において何か施設を建設する際に，いくつか候補地が存在するとき，どこを選択するか，決定する基準として考えられるものを生徒に答えさせる．予想される生徒の答えは,「お金がなるべくかからないように決める」,「多くの人が得をするように決める」といったものが考えられる．この授業では現実で何かを決定する際の決め手となる要素，特に人口について注目した授業を展開する．次のような課題を生徒に考えさせる．

課題 1：
A，B，2 つの町がある．あるデパートがその 2 つの町の住民が利用することを想定した店舗の出店を考えている．どこに出店すれば多くの人がやってくるか考えよう．ただし，2 つの町の人口比率は 1 : 4 とする．

課題 2：
A，B，C，3 つの町がある．あるデパートがその 3 つの町の住民が利用することを想定した店舗の出店を考えている．どこに出店すれば多くの人がやってくるか考えよう．ただし，3 つの町の人口比率は 3 : 5 : 2 とする．

詳しくは本稿に記載するが，これらの課題おいては数理モデルを作成し，実験を行うことで問題を解決するシミュレーションを主に行うことを想定している．また，数理モデルを用いたシミュレーションについてインターネットで検索する調べ学習を取り入れることも想定しており，これにより新たな疑問・問題を発見することができれば更に数理的考察力を高める機会を設けることが可能であると思われる．

3.1.3　ボロノイ図を題材とした授業

現実において，複数の施設の配置を計画することが多い．例えば，電柱や街灯，コンビニエンスストアの出店などが考えられる．この授業では配置する施設の数を 2 つ以上に増やした場合はこれまでのように考えることができるのかということについて考察を深める．詳しくは本稿に記載するが，この授業についても現実にある問題を用いて数理モデルを作成し，シミュレーションを行う．本授業では題材として生徒にとって馴染みのないボロノイ図について取り扱うため，簡単な例から考察を深めていく．また，最後にこれまでの授業で扱った内容について振り返る．点と点の距離に注目し，領域を考えるボロノイ図は様々な場面で用いられている．実際にどのように用いられているか興味のある生徒に対しては，インターネットの活用を指導するなど，数学に対する関心を高める良い機会を提供できるように心掛けたい．これらの活動の中で得られた新たな疑問・問題が，更に数理的考察力を高める機会となると思われる．

3.2　数理計画法を題材とした授業

会社で製品の製造数を決定するとき，何を重視するかを考えるとやはり売上で何を多く製造するか決めていると考えられる．しかし，工場において在庫数などで生産する量などは変わってくることがある．この授業ではこのような場面において，決定するための方法について取り上げる．
課題 1：
ある工場では製品 X，Y を製造している．それらを製造するには原料 a, b が必要である．X，Y を 1kg 製造するために必要な原料の量と原料の在庫量は下の表の通りである．

	原料 a	原料 b
X	10kg	20kg
Y	30kg	20kg
在庫量	300kg	400kg

また，X，Y の 1kg あたりの利益はそれぞれ 1 万円，2 万円である．原料の在庫量の範囲で最大の利益を得るには X，Y それぞれ何 kg 製造すれば良いだろうか．

詳しくは本稿に記載するが，この課題を考えさせることを出発点に線形計画問題や整数計画問題を視覚的に解く方法について考察を深める．また，最後に授業で扱ったことを振り返る．授業で扱った課題は線形計画問題と整数計画問題であり社会の様々な場面で現れる問題である．いくつかの変数の満たす条件式から求める解を得るというものであるが，変数が 3 つ以上になると授業で取り組んだように図示して数理モデルを作成し，視覚的に考えることが難しくなる．実際には視覚的な要素に頼らない方法が広く用いられている．これらのことを生徒と確認し，具体的にどのようなところでこの問題が現れるのか，インターネットを用いて調べ，まとめるという教育活動を行うことも考えられる．また，今回取り上げなかった非線形計画問題についても，教師が具体例を示すことや生徒自身に調べさせることで，新たな疑問・問題の発見が期待され，更に数理的考察力を高める機会を設けることが可能であると思われる．

3.3　授業で配布する教材

詳しくは本稿に記載する．

4　おわりに

この研究で現在数学教育に求められている生徒に身につけさせるべき力を数理的考察力と定義し，そのための授業内容について考察した．その過程で現在の教育について考えさせられることがあった．

1 つ目は ICT を活用した教育を充実させることの重要性

である．本研究においては図形を題材とした授業内容について検討したが，ICT を活用することが非常に重要であると考える．数学に限った話ではないが，視覚的な理解は未習の分野を学ぶ際に非常に有効な補助になりうる．そのためには正確な図を見る必要があるが，図形を扱う授業を従来どおり黒板に教師が板書する形式で行った場合，教師によって図形の完成度が異なり，生徒の理解度に差が生じるということが考えられる．その点，ICT を活用することで，本研究でも取り上げた『GRAPES』，その他に『GeoGebra』など図形を描くために効果的なソフトウェアの利用が可能になる．他には表計算ソフトウェアの Excel を用いた数理計算やシミュレーションなど教科書だけでは十分に行えない教育活動や，インターネットを活用して教科書に載っていない内容を生徒が興味を持って探すこともできる．生徒 1 人ずつ PC を用意する，インターネット回線の設置など環境面において容易に行うことはできない場合も考えられるが，可能であるならば今日の数学教育において ICT を活用することは積極的に行うべきであると私は考える．

2 つ目は現在の数学教育は入学試験に縛られているのではないかということである．現在の教科書が内容面において定理や公式の証明を示した後に例題，練習問題を解かせるという構成であることが多いことは，入学試験に内容を合わせた結果であると考えられる．入学試験の性質上，答えが 1 つに決まらない問題や答えがあるか分からない問題は出題できない．このことから，定理や公式を駆使し問題を解くことに重点をおいた問題がほとんどの大学で出題せざるを得ないため，教科書の内容もそれに倣ったものとなると考えられる．また，学校側も進学実績をあげなければならないことから，入学試験に直接つながる内容を授業で取り扱うことが多くなり，結果として授業での問題演習時間の増加や『模試対策』といった授業を展開してしまう状況に陥るのではないかと考えられる．このように入学試験に縛られた教育構造がある限り，現在の例題，練習問題を繰り返す教育から抜け出すことはできず，数学教育の目標が達成されることはないと思われる．ただ，平成 29 年 3 月 31 日に改訂された学習指導要領において理数教育の充実が挙げられていることから，現状の改善が見込めるのではないかと私は考える．例えば，小・中学校では日常生活等から問題を見出す活動・見通しをもった観察・実験等の充実，必要なデータを収集・分析し，その傾向を踏まえて課題を解決するための統計教育の充実が挙げられている．[12] また，高等学校でも日常生活や社会との関連を重視するとともに見通しをもった観察・実験を行うことなどの科学的に探求する学習活動の充実，必要なデータを収集・分析し，その傾向を踏まえて課題を解決するための統計教育の充実が挙げられている．[13] これらのことから教科書の内容が現状よりも社会で用いられる数学を取り扱いが大きくなり，大学入試改革などと合わさることで大きな変化が期待される．また，各学校におけるカリキュラムマネジメントの確立についても改善するということがかかれている [12][13] ため，今後は教科書の内容に左右されない授業の展開が容易になるのことが期待される．

本研究を通して，考察した数理的考察力，それを養うことが期待される授業内容について，実際にどのような効果があり，生徒がどのような反応を示すかなど未知な部分が多い．教育は考えるだけでなく実際に行うことが大切であると私は考えるため，今後の教師生活の中で機会を見つけて行いたいと考える．そうすることで数理的考察力の捉え方や授業の内容についての改善点が見つかることはもちろんのこと，生徒の反応から新たな数学的な発見を期待できると考える．教師として，今回研究で得られたことを活かして生徒のために本当に必要なことを見極め，実践できるようになりたいと考えている．

参考文献

[1] 高等学校学習指導要領 (平成 30 年告示), 文部科学省,2018, https://www.mext.go.jp/content/1384661_6_1_3.pdf

[2] 中学校学習指導要領 (平成 29 年告示), 文部科学省,2017, https://www.mext.go.jp/content/1413522_002.pdf

[3] 大矢雅則他, 新編数学 A, 数研出版,2011.

[4] 片桐重男, 数学的な考え方の具体化, 明治図書,1988.

[5] 長崎栄三, 数理的問題解決能力をいかに育むか,2015, http://hdl.handle.net/10297/9341

[6] 森雅夫, 松井知己, オペレーションズ・リサーチ, 朝倉書店,2004.

[7] 國友正和他, 改訂版　高等学校　物理 I, 数研出版,2006.

[8] 関根章道, 人に話したくなる数学おもしろ定理, 技術評論社,2006.

[9] Zvi.Drezner Horst.W.Hamacher: *FacilityLocation-ApplicationsandTheory*,Springer,2001.

[10] 杉原厚吉, なわばりの数理モデル, 共立出版,2009.

[11] GRAPES ダウンロードサイト，http://www.kn-makkun.com/MakkunWp/grapes.html,2015.

[12] 小・中学校学習指導要領の改訂のポイント, 文部科学省, https://www.mext.go.jp/content/1421692_1.pdf,2017.

[13] 高等学校学習指導要領の改訂のポイント, 文部科学省, https://www.mext.go.jp/content/1421692_2.pdf,2017

[14] 数学教育研究会, 新訂数学教育の理論と実際, 聖文新社,2015.

[15] 高橋陽一郎他, 詳説　数学 II, 啓林館,2011.