# 資産のカテゴリを考慮したポートフォリオ最適化問題

M2018SS015 梅村一輝

指導教員：福嶋雅夫

## 1 はじめに

社会の IT 化に伴い，誰もが手軽に投資できる時代となった．現金，預金，株式，債券，不動産など，投資家が保有している金融商品の一覧や，その組み合わせの内容のことをポートフォリオという．複数の資産があるなかで，どれだけの資産にどれだけ投資すればよいかを数学的手法を用いて分析する問題をポートフォリオ最適化問題といい，複数の資産に投資することでリスクが軽減されることが知られている．なぜ分散投資をすることによってリスクが減少するかというと，一つの資産に資金の全てを投資している場合，その資産の価値が下がると，大きな損失を被ってしまうが，複数の資産に分散投資をしている場合，一つの資産の価値が下がったとしても，他の資産でカバーできる可能性がある．分散投資をしても，投資をしたすべての資産の価値が下がり，損失を被ってしまう可能性もあるが，その可能性は一つの資産の価値が下がる可能性よりも小さくなる．

ポートフォリオ最適化問題はリスクとリターンという二つの尺度を用いて考える．ポートフォリオのリスク尺度として様々なものが提唱されており，その中に分散や標準偏差，絶対偏差 [1] といったものから，下方リスク尺度と呼ばれている，下方分散や下方標準偏差，下方絶対偏差，下方部分モーメント [6]，バリュー・アット・リスク (Value-at-Risk，VaR)，条件付きバリュー・アット・リスク (Conditional Value-at-Risk，CVaR) がある．分散は値のばらつきを表していて，一般的にポートフォリオ最適化問題のリスク尺度として使われている [2]．しかし，分散は利益のばらつきもリスクと捉えていることから，分散をそのままリスク尺度に用いることに疑問が上がっている．VaR はあるポートフォリオの損失が $\alpha$ 以下である確率が $\beta$ 以上となるときの最小の $\alpha$ として定義され，CVaR はあるポートフォリオの損失が VaR を超える場合の損失の期待値として定義される [5]．VaR は劣加法性と呼ばれる性質を満たしておらず，リスク尺度として好ましい性質であるコヒーレント性を持っていないが，CVaR はコヒーレント性を持つことが知られている [4]．このことから，CVaR は VaR よりも理論的に優れたリスク尺度と言える．リターンの尺度にはポートフォリオの収益率が用いられる．

本研究では，平均・CVaR モデルを改良したモデルを提案する．平均・CVaR モデルでは投資対象の資産を分けずに定式化するが，改良したモデルでは資産を複数のカテゴリに分け，ポートフォリオ全体の CVaR とカテゴリごとの CVaR を考慮するようなモデルを提案する．最後に実際のデータを用いた数値実験を行い，標準的な平均・CVaR モデルと提案モデルから得られた投資比率を用いて，CVaR の値にどのような変化が現れるかを調べる．その結果から，資産のカテゴリ分けの意味を考察する．

## 2 定義

### 2.1 ポートフォリオの収益率

$n$ 個の資産でポートフォリオを構築するとする．資産 $i$ への投資金額を $X_i$，投資金額合計を $X$ とすると，

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = X \tag{1}$$

である．資産 $i$ への投資比率を $x_i$ とすると，$x_i = \frac{X_i}{X}$ と表せるので，式 (1) の両辺を $X$ で割ると，

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

となる．ポートフォリオの収益率を $r_p$，資産 $i$ の収益率を $r_i$ とすると，ポートフォリオの損益は各資産の損益の総和なので

$$r_p X = \sum_{i=1}^{n} r_i X_i$$

となる．両辺を $X$ で割ると，

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$$

となる．したがって，ポートフォリオの収益率は各資産の収益率の投資比率による加重和として表される [3]．

### 2.2 VaR と CVaR

投資対象となる資産を $i = 1, ..., n$ とし，資産 $i$ に対する投資比率を $x_i$，資産 $i$ の収益率を確率変数 $y_i$ で表す．以下では $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)^T$，$\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)^T$ と表し (太字はベクトル)，$\mathbf{x}$ をポートフォリオと呼ぶ．損失関数を $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ とし，$\mathbf{y}$ は確率分布関数 $F(\mathbf{y})$ をもつと仮定する．そのとき，損失が $\alpha$ を超えない確率は

$$\Psi(\mathbf{x}, \alpha) = \int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le \alpha} dF(\mathbf{y})$$

で与えられる．ポートフォリオ $\mathbf{x}$ が与えられたとき，VaR はポートフォリオ $\mathbf{x}$ の損失が $\alpha$ 以下となる確率が $\beta$ 以上になるような最小の $\alpha$，すなわち

$$\mathrm{VaR}_\beta(\mathbf{x}) = \min\{\alpha | \Psi(\mathbf{x}, \alpha) \ge \beta\}$$

となる．また，CVaR はポートフォリオの損失が VaR を超える場合の損失の期待値であり，

$$\mathrm{CVaR}_\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{1-\beta}\int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y})\geq \mathrm{VaR}_\beta(\mathbf{x})} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dF(\mathbf{y})$$

と表される (図 1 参照)．ここで関数 $\phi_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ を

$$\phi_\beta(\mathbf{x},\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\int_{\mathbf{y}\in R^n} [f(\mathbf{x},\mathbf{y})-\alpha]^+ \, dF(\mathbf{y}) \tag{2}$$

と定義する．ただし，$[t]^+ = \max\{t, 0\}$ である．損失関数 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ が $\mathbf{x}$ に関する凸関数ならば，関数 $\phi_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ は変数 $(\mathbf{x},\alpha)$ に関する凸関数になる．このとき，$\mathrm{CVaR}_\beta(\mathbf{x})$ と関数 $\phi_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ に対して次式が成り立つ [5]．

$$\mathrm{CVaR}_\beta(\mathbf{x}) = \min_{\alpha\in R}\phi_\beta(\mathbf{x},\alpha) \tag{3}$$

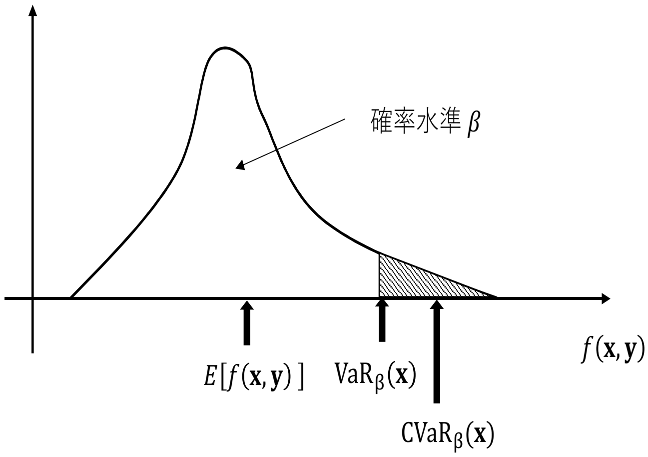


図 1　VaR と CVaR

## 3　標準的な平均・CVaR モデル

VaR はそれ自身の値より大きい損失を評価できず，確率水準を超えるようなの大きな損失をリスクとして認識できないという問題が生じる．VaR のみを考慮したポートフォリオを組んでいるとすると，リーマンショックのような金融危機が起きた場合，大きな損失を被ってしまう可能性が高い．そこで VaR を上回る損失を評価することができる CVaR を用いてモデルを構築することで，収益率分布の裾が長い，すなわち，起こる確率は低いが大きな損失を被る可能性が高い収益率分布にも対応できる．本研究では CVaR を使ってモデルを構築していく．

CVaR を式 (3) で表すとき，$\phi_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ の定義式 (2) に含まれる積分は計算が難しいので，シナリオデータを用いて近似する．シナリオデータとは，各シナリオ $t$ における各資産 $i$ の収益率 $r_{it}$ からなるものであり，関数 $\phi_\beta(\mathbf{x},\alpha)$ は

$$\tilde{\phi}_\beta(\mathbf{x},\alpha) = \alpha + \frac{1}{T(1-\beta)}\sum_{t=1}^{T}\left[f\left(\mathbf{x},\mathbf{y}_{[t]}\right)-\alpha\right]^+ \tag{4}$$

で近似できる．ここで，$T$ はシナリオ数，$\mathbf{y}_{[t]} = (r_{1t}, r_{2t}, ..., r_{nt})^T$ はシナリオ $t$ における各資産の収益率からなるベクトルであり，$f\left(\mathbf{x},\mathbf{y}_{[t]}\right) = -\sum_{i=1}^n r_{it}x_i$ とする．

資産 $i$ の収益率の平均を $\bar{r}_i$ とし，投資家の要求期待収益率を $r_E$ とする．CVaR のパラメータである確率水準を $\beta$ とする．そのとき，要求期待収益率を確保し，CVaR で表されるリスクを最小化する通常の平均・CVaR モデルは以下のように定式化される．

$$\text{min.} \quad \alpha_\beta + \frac{1}{(1-\beta)T}\sum_{t=1}^{T}u_t \tag{5}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} r_{it}x_i + \alpha_\beta + u_t \geq 0 \quad (t=1,...,T) \tag{6}$$

$$u_t \geq 0 \quad (t=1,...,T) \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i x_i \geq r_E \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{9}$$

$$x_i \geq 0 \quad (i=1,...,n) \tag{10}$$

ここで決定変数は $x_i\,(i=1,...,n)$，$\alpha_\beta$，$u_t\,(t=1,...,T)$ である．式 (5) は CVaR 最小化を表す目的関数である．式 (6) は期待収益率と $\alpha_\beta$ に関する式で，最適解において $\sum_{i=1}^n r_{it}x_i + \alpha_i$ が負なら $u_t$ は正，$\sum_{i=1}^n r_{it}x_i + \alpha_\beta$ が非負なら $u_t$ は 0 になる．式 (7) は $u_t$ の非負制約である．式 (8) はポートフォリオの期待収益率が投資家の要求期待収益率以上になることを表す制約である．式 (9)，(10) は投資比率の総和は 1 でそれぞれの値は 0 以上になるという制約である．

## 4　カテゴリ分け平均・CVaR モデル

近年起こった金融危機として，リーマン・ショックが挙げられる．米国の投資銀行が経営破綻したことで引き起こった金融危機で，世界の市場が混乱に陥り，株や貴金属，不動産など，あらゆる資産の価格が暴落した．この金融危機により，機関投資家はもちろん，個人投資家も大きな損失を被ったことだろう．損失を事前に回避することは難しく，金融危機が引き起こす経済混乱は誰にも予想できない．そこで，そういったリスクに対応するべく，性質の異なる資産ごとにリスクを管理し，投資家の要求にしたがって柔軟に対応できるようなポートフォリオを構築する必要がある．例えば，ある性質の資産のリスクは許容しつつ，他の性質の資産のリスクは小さくするというような状況だ．本研究では通常の平均・CVaR モデルを改良した資産のカテゴリ分け平均・CVaR モデルを提案する．通常の平均・CVaR モデルでは資産の性質は考慮しないが，カテゴリ分け平均・CVaR モデルでは資産の性質を考慮し，投資対象として株や貴金属，不動産などがある場合，株はカテゴリ 1，貴金属はカテゴリ 2 といった具合に，異なる性質の資産

に対してカテゴリ分けをする．カテゴリ分け平均・CVaR モデルでは，ポートフォリオ全体の CVaR と各カテゴリの CVaR を重みづけして足し合わせたものを最小化することを目的とする．この目的を考えることで，標準的な平均・CVaR モデルよりもカテゴリごとの CVaR を小さくし，投資家の要求に忠実なポートフォリオを構築できると考える．

### 4.1 提案モデル

資産を $M$ 個のカテゴリに分類する．カテゴリ $m$ の資産数を $n_m$ とし，総資産数を $n$，すなわち，$n = \sum_{m=1}^{M} n_m$ とする．また，カテゴリ $m$ に属する資産 $i$ のシナリオ $t$ における収益率を $r_{it}^m$ とし，その平均を $\bar{r}_i^m$ とする．提案モデルでは，ポートフォリオ全体の CVaR に対する重みを $w_0$，カテゴリ $m$ の CVaR に対する重みを $w_m$ とし，ポートフォリオ全体の CVaR とカテゴリ $m$ の CVaR を重みづけして足し合わせたものを最小化することを目的とする．以下のモデルを考える．

$$\min. \quad w_0 \left( \alpha_\beta^0 + \frac{1}{(1-\beta)T} \sum_{t=1}^{T} u_t^0 \right) + \sum_{m=1}^{M} w_m \left( \alpha_\beta^m + \frac{1}{(1-\beta)T} \sum_{t=1}^{T} u_t^m \right) \tag{11}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{n_m} r_{it}^m x_i^m + \alpha_\beta^0 + u_t^0 \geq 0 \quad (t = 1, ..., T) \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n_m} r_{it}^m x_i^m + \alpha_\beta^m + u_t^m \geq 0 \quad (t = 1, ..., T, m = 1, ..., M) \tag{13}$$

$$u_t^0 \geq 0 \quad (t = 1, ..., T) \tag{14}$$

$$u_t^m \geq 0 \quad (t = 1, ..., T, m = 1, ..., M) \tag{15}$$

$$\sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{n_m} \bar{r}_i^m x_i^m \geq r_E \tag{16}$$

$$\sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{n_m} x_i^m = 1 \tag{17}$$

$$x_i^m \geq 0 \quad (i = 1, ..., n_n, m = 1, ..., M) \tag{18}$$

ここで，決定変数は $x_i^m \, (i = 1, .., n_m, m = 1, ..., M)$，$\alpha_\beta^0$，$\alpha_\beta^m \, (m = 1, ..., M)$，$u_t^0 \, (t = 1, ..., T)$，$u_t^m (m = 1, ..., M, t = 1, ..., T)$ である．式 (11) はポートフォリオ全体の CVaR と各カテゴリ $m = 1, ..., M$ の CVaR を重みづけして足し合わせた目的関数である．式 (12) は資産全体の期待収益率と $\alpha_\beta^0$ に関する式で，最適解において $\sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{n_m} r_{it}^m x_i^m + \alpha_\beta^0$ が負なら $u_t^0$ は正，$\sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{n_m} r_{it}^m x_i^m + \alpha_\beta^0$ が非負なら $u_t^0$ は 0 になる．式 (13) はカテゴリごとの資産の期待収益率と $\alpha_\beta^m$ に関する式で，最適解において $\sum_{i=1}^{n} r_{it}^m x_i^m + \alpha_i^m$ が負なら $u_t^m$ は正，$\sum_{i=1}^{n} r_{it}^m x_i^m + \alpha_i^m$ が非負なら $u_t^m$ は 0 になる．式 (14)，式 (15) は $u_t^0$，$u_t^m$ の非負制約である．式 (16) はポートフォリオ全体の期待収益率が投資家の要求期待収益率以上になることを表す制約である．式 (17)，(18) は投資比率の総和は 1 でそれぞれの値は 0 以上になるという制約である．

## 5 数値実験

数値実験では，$M = 2$ として，三菱 UFJFG，大林組，東日本旅客鉄道，富士通，トヨタ自動車，日立製作所，サントリー食品インターナショナル，イオン，電通，東京電力 HD をカテゴリ 1，金，銀，プラチナをカテゴリ 2 と考え，2017 年の実際の株価データを用いる．また各銘柄の収益率を $\frac{\text{当日の株価}-1\text{ 週間後の株価}}{1\text{ 週間後の株価}}$ によって定め，シナリオ数を $T = 239$[*1] とし，$\beta = 0.9$，投資家の要求期待収益率を $r_E = 0.003$ とする．株と貴金属は性質の異なる資産であり，それぞれ異なる動きをするため，数値実験では株カテゴリと貴金属カテゴリを考える．初めに，標準的な平均・CVaR モデルを用いて，最適な投資比率を求める．次に提案モデルを用いて，複数の重みの組み合わせに対して最適な投資比率を求める．ただし，ポートフォリオ全体の CVaR の重みは $w_0 = 1$ に固定する．最後にそれぞれのモデルから得られた投資比率を用いて，カテゴリ 1 の CVaR，カテゴリ 2 の CVaR，ポートフォリオ全体の CVaR を計算し，比較する．

表 1　$w_0 : (w_1 + w_2) = 1 : 1$ の場合

| | 標準的なモデル | $w_1 = 1/3$ $w_2 = 2/3$ | $w_1 = 1/2$ $w_2 = 1/2$ | $w_1 = 2/3$ $w_2 = 1/3$ |
|---|---|---|---|---|
| 三菱 UFJFG | 0.098 | 0.034 | 0.040 | 0.039 |
| 大林組 | 0.012 | 0.004 | 0.005 | 0.017 |
| 東日本旅客鉄道 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 富士通 | 0.057 | 0.073 | 0.061 | 0.066 |
| トヨタ自動車 | 0.017 | 0.012 | 0.009 | 0.008 |
| 日立製作所 | 0.087 | 0.101 | 0.101 | 0.101 |
| サントリー | 0.021 | 0.064 | 0.061 | 0.036 |
| イオン | 0.194 | 0.247 | 0.229 | 0.179 |
| 電通 | 0.000 | 0.010 | 0.000 | 0.000 |
| 東京電力 HD | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 金 | 0.515 | 0.456 | 0.494 | 0.553 |
| 銀 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| プラチナ | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| カテゴリ 1 の CVaR | 0.0132 | 0.0134 | 0.0125 | 0.0114 |
| カテゴリ 2 の CVaR | 0.0134 | 0.0119 | 0.0129 | 0.0144 |
| 全体の CVaR | 0.0123 | 0.0127 | 0.0125 | 0.0125 |

表 1 と表 2 は各銘柄に対する各モデルの投資比率と，その投資比率を用いた場合の CVaR の表である．表 1 においてカテゴリ分け平均･CVaR モデルでは，$w_0 : (w_1 + w_2) = 1 : 1$ としたうえで，$\left(w_1 = \frac{1}{3}, w_2 = \frac{2}{3}\right)$，$\left(w_1 = \frac{1}{2}, w_2 = \frac{1}{2}\right)$，$\left(w_1 = \frac{2}{3}, w_2 = \frac{1}{3}\right)$ と変化させる．また，表 2 においてカ

[*1] 株価収集で参考にした Web ページ（https://kabuoji3.com/）において，休日など株価が変動しない日を除いた 1 年分の株価データが 239 個であったためである．

表 2　$w_0 : (w_1 + w_2) = 2 : 1$ の場合

| | 標準的なモデル | $w_1 = 1/6$ $w_2 = 1/3$ | $w_1 = 1/4$ $w_2 = 1/4$ | $w_1 = 1/3$ $w_2 = 1/6$ |
|---|---|---|---|---|
| 三菱 UFJFG | 0.098 | 0.066 | 0.043 | 0.047 |
| 大林組 | 0.012 | 0.008 | 0.015 | 0.027 |
| 東日本旅客鉄道 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 富士通 | 0.057 | 0.065 | 0.060 | 0.065 |
| トヨタ自動車 | 0.017 | 0.016 | 0.007 | 0.004 |
| 日立製作所 | 0.087 | 0.087 | 0.100 | 0.096 |
| サントリー | 0.021 | 0.039 | 0.059 | 0.052 |
| イオン | 0.194 | 0.233 | 0.205 | 0.172 |
| 電通 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 東京電力 HD | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 金 | 0.515 | 0.487 | 0.511 | 0.536 |
| 銀 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| プラチナ | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| カテゴリ 1 の CVaR | 0.0132 | 0.0131 | 0.0123 | 0.0119 |
| カテゴリ 2 の CVaR | 0.0134 | 0.0127 | 0.0133 | 0.0140 |
| 全体の CVaR | 0.0123 | 0.0124 | 0.0124 | 0.0124 |

テゴリ分け平均・CVaR モデルでは，$w_0 : (w_1 + w_2) = 2 : 1$ としたうえで，$\left(w_1 = \frac{1}{6}, w_2 = \frac{1}{3}\right)$，$\left(w_1 = \frac{1}{4}, w_2 = \frac{1}{4}\right)$，$\left(w_1 = \frac{1}{3}, w_2 = \frac{1}{6}\right)$ と変化させる．

表 1 と表 2 の両方で，一貫して投資比率が 0 となっている銘柄がある．この銘柄は収益率が低く，その銘柄単体のリスクが高いような銘柄である．通常，ポートフォリオ最適化問題ではポートフォリオに組み込む銘柄が多いほど，ポートフォリオ全体のリスクを小さくできることが知られているが，銘柄の収益率とリスクによっては，ポートフォリオに組み込まないほうが良いものも存在する．また，貴金属カテゴリの銀とプラチナの投資比率が 0 になっている．これはカテゴリで，性質の異なる資産を分けているものの，銀とプラチナの値動きが株カテゴリの中の銘柄と似たものがあり，そちらに投資をしたほうがより良いポートフォリオを構築できると判断されたため，銀とプラチナの投資比率が 0 になっていると考えられる．ここで，各カテゴリの CVaR を足し合わせたものが全体の CVaR にはならないことに注意する．これは，損失の起こるシナリオが各カテゴリで異なるためである．

表 1 において，$\left(w_1 = \frac{1}{3}, w_2 = \frac{2}{3}\right)$ のときのカテゴリ 1 の CVaR は標準的なモデルのカテゴリ 1 の CVaR より 0.0002 だけ大きくなり，$\left(w_1 = \frac{2}{3}, w_2 = \frac{1}{3}\right)$ のときのカテゴリ 2 の CVaR は標準的なモデルのカテゴリ 2 の CVaR より 0.001 だけ大きくなるのに対して，$\left(w_1 = \frac{1}{2}, w_2 = \frac{1}{2}\right)$ のときのカテゴリ 1 の CVaR とカテゴリ 2 の CVaR は，標準的なモデルのカテゴリ 1 の CVaR とカテゴリ 2 の CVaR よりも小さくなる．また，表 2 において，$\left(w_1 = \frac{1}{3}, w_2 = \frac{1}{6}\right)$ のときのカテゴリ 2 の CVaR は標準的なモデルのカテゴリ 2 の CVaR より 0.0006 大きくなるのに対して，$\left(w_1 = \frac{1}{6}, w_2 = \frac{1}{3}\right)$ と $\left(w_1 = \frac{1}{4}, w_2 = \frac{1}{4}\right)$ のときのカテゴリ 1 の CVaR とカテゴリ 2 の CVaR は標準的なモデルのカテゴリ 1 の CVaR とカテゴリ 2 の CVaR よりも小さくなる．このことから，適切な重みづけをすることで，標準的な平均・CVaR モデルから得られた各カテゴリの CVaR よりも，カテゴリ分け平均・CVaR モデルから得られた各カテゴリの CVaR の方が小さくなることが確認できた．

また，表 1 の $\left(w_1 = \frac{1}{2}, w_2 = \frac{1}{2}\right)$ に対する結果と表 2 の $\left(w_1 = \frac{1}{4}, w_2 = \frac{1}{4}\right)$ に対する結果を比較すると，$\left(w_1 = \frac{1}{4}, w_2 = \frac{1}{4}\right)$ の全体の CVaR は標準的なモデルの全体の CVaR よりも 0.0001 だけ大きくなるものの，$\left(w_1 = \frac{1}{4}, w_2 = \frac{1}{4}\right)$ のカテゴリ 2 の CVaR は標準的なモデルのカテゴリ 2 の CVaR よりも 0.0001 しか小さくならなかった．一方で $\left(w_1 = \frac{1}{2}, w_2 = \frac{1}{2}\right)$ の全体の CVaR は標準的なモデルの全体の CVaR よりも 0.0002 と少し差は大きくなるが $\left(w_1 = \frac{1}{2}, w_2 = \frac{1}{2}\right)$ のカテゴリ 2 の CVaR は標準的なモデルのカテゴリ 2 の CVaR よりも 0.0005 も小さくなった．このことから，$\left(w_1 = \frac{1}{4}, w_2 = \frac{1}{4}\right)$ のほうが全体の CVaR を小さくすることができるが，$\left(w_1 = \frac{1}{2}, w_2 = \frac{1}{2}\right)$ のほうが各カテゴリの CVaR をバランスよく小さくできることが確認できた．

## 6　おわりに

本研究では資産のカテゴリ分けを考慮した平均・CVaR モデルを提案し，過去の収益率データを用いた数値実験により，資産のカテゴリ分けの有用性を示した．カテゴリ数やシナリオ数を増やし，重みづけの組み合わせのバリエーションを変えることなどで，より詳細な数値実験を行うのが今後の課題である．

## 参考文献


[1] H. Konno and H. Yamazaki: *Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market.* Management Science, Vol.37, pp.519-531, 1991.

[2] H.M. Markowitz: *Portfolio Selection.* Journal of Finance, Vol.7, pp.247-257, 1952.

[3] 枇々木規雄: ポートフォリオ最適化入門. オペレーションズ・リサーチ, Vol.61(6), pp.335-340, 2016.

[4] P. Artzner, F. Delbaen, J.M. Eber and D. Heath: *Coherent Measures of Risk.* Mathematical Finance, Vol.9, pp.203-228, 1999.

[5] R.T. Rockafellar and S. Uryasev: *Optimization of Conditional Value-at-Risk.* Journal of Risk, Vol.2, pp.21-41, 2000.

[6] V.S. Bawa and E.B. Lindenberg: *Capital Market Equilibrium in a Mean-Lower Partial Moment Framework.* Journal of Financial Economics, Vol.5, pp.189-200, 1977.