スライディングモード制御と適応制御を用いた コントロールモーメントジャイロスコープのロバスト制御

M2017SC004 神谷直樹

指導教員:高見勲

1 はじめに

Control Moment Gyroscope (以下, CMG) は, ジャイ ロ効果を利用して回転トルクを発生させる装置であり,国 際宇宙ステーションなどの大型の宇宙機の姿勢制御に用 いられている. CMG は非線形性が強いシステムで、摩擦 外乱があることが知られている. 先行研究では, CMG の非ホロノミック拘束を用いてシステムを Chained Form に変形し、状態に偏差の積分を入れることで、摩擦をは じめとする外乱を補償し、バックステッピング法を用い て駆動源を持たないジンバルの目標値追従制御を行って いる[1]. また、CMGを駆動源として用いている国際宇 宙ステーションは、物資補給等を目的としたパーツをドッ キングしたり、分離したりすることがある. そのため、国 際宇宙ステーションの慣性モーメントが変動することが あると考えられる. その上で, 摩擦を外乱, 慣性モーメ ントを不確かなパラメータとする。そして、CMG に対し て,スライディングモード制御と適応推定機構を用いる. 文献 [2] では、粘性摩擦とクーロン摩擦の係数や、回転す る足の重さを不確かなパラメータとして、不確かなパラ メータに対して,システムに対してロバスト性を補償す るためにスライディングモード制御を適用しており、慣 性モーメントの不確かさを分離して、リアプノフ関数に 入れることで扱いやすくしている.本研究では,バック ステッピングの考えに基づいて制御器を設計し、粘性摩 擦や不確かなパラメータに対して適応推定機構を用いる ことで、粘性摩擦係数や慣性モーメントを推定する.ま た、推定されるパラメータを用いてスライディングモー ド制御で、系の安定化を図り、非線形摩擦に対してロバ スト性を保証する. その上で, 推定値や不確かさを含む リアプノフ関数を定義して、制御器設計を行う.

2 モデリング

図1にCMGの概略図を示す. Rotor1を回転させるモー



図1 CMGの概略図

タ1のトルクを $T_1(t)$, Gimbal2を回転させるモータ2の

トルクを $T_2(t)$ とする. $q_1(t)$ をGimbal2に対するRotor1 の角度をとし、 $q_2(t)$ をGimbal3に対するGimbal2の角度 とし、 $q_4(t)$ をGimbal4の角度とする.また、 $\omega_1(t)$ 、 $\omega_2(t)$ 、 $\omega_4(t)$ を、それぞれ q_1 、 q_2 、 q_4 の角速度とする.本研究では、 Gimbal2の駆動角度を $0 < q_2 < \frac{\pi}{2}$ [rad]とし、Gimbal3を 固定した場合を考える.Rotor1、Gimbal2、Gimbal4の 運動方程式は、式 (1)-(3)になる.

$$I_{R1y}\dot{\omega}_{1} + I_{R1y}\dot{\omega}_{4}\sin q_{2} + I_{R1y}\omega_{2}\omega_{4}\cos q_{2} = T_{1} \quad (1)$$

$$(I_{G2x} + I_{R1x})\dot{\omega}_{2} - I_{R1y}\omega_{1}\omega_{4}\cos q_{2}$$

$$-I_{1}\omega_{4}^{2}\sin q_{2}\cos q_{2} = T_{2} \quad (2)$$

$$I_{R1y}\dot{\omega}_{1}\sin q_{2} + (I_{2} + I_{1}\sin^{2} q_{2})\dot{\omega}_{4}$$

$$+I_{1}\omega_{2}\omega_{4}\sin 2q_{2} + I_{R1y}\omega_{1}\omega_{2}\cos q_{2} = 0 \quad (3)$$

$$I_1 = I_{G2y} + I_{R1y} - I_{R1x} - I_{G2z}$$
$$I_2 = I_{R1x} + I_{G2z} + I_{G3x} + I_{G4x}$$

3 システムの構成

式 (1)-(3) より,摩擦からなる外乱 F_i (i = 1, 2, 4)を加 えた CMG のシステムは,式(4) になる.ここで, q_1 , ω_1 を制御量とすると,2入力3出力のシステムとなり,バッ クステッピング法では扱えないため,式(4) から外す.

$$\begin{split} [T_1, T_2] &= [u_1, u_2] \\ \begin{cases} \dot{q}_2 &= \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= f_2(q, \omega) + \Delta f_2 + g_2 u_2 \\ \dot{q}_4 &= \omega_4 \\ \dot{\omega}_4 &= f_4(q, \omega) + \Delta f_4 + g_4(q) u_1 \\ \end{cases} \\ f_2(q, \omega) &= \frac{I_{R1y} \omega_1 \omega_4 \cos q_2 + I_1 \omega_4^2 \sin q_2 \cos q_2}{I_{G2x} + I_{R1x}} \\ f_4(q, \omega) &= \frac{I_{R1y} \omega_2 \omega_4 \sin q_2 \cos q_2}{I_2 + (I_1 - I_{R1y}) \sin^2 q_2} \\ &- \frac{I_1 \omega_2 \omega_4 \sin 2q_2 + I_{R1y} \omega_1 \omega_4 \cos q_2}{I_2 + (I_1 - I_{R1y}) \sin^2 q_2} \\ g_2 &= \frac{1}{I_{G2x} + I_{R1x}} \\ g_4(q) &= -\frac{\sin q_2}{I_2 + (I_1 - I_{R1y}) \sin^2 q_2} \\ \Delta f_2 &= \frac{F_2}{I_{G2x} + I_{R1x}} \\ \Delta f_4 &= \frac{-F_1 \sin q_2 + F_4}{I_2 + (I_1 - I_{R1y}) \sin^2 q_2} \end{split}$$

外乱 $F_i(i = 1, 2, 4)$ が粘性摩擦と非線形摩擦 $d_i(t)$ から成 り立つと仮定して、粘性摩擦係数を $F_{iv}(i = 1, 2, 4)$ とす ると、 $F_i(i = 1, 2, 4)$ は以下の式となる.

$$F_i = F_{iv}\omega_i + d_i \quad (|d_i| < d_{iN}) \tag{5}$$

そこで、粘性摩擦係数及び慣性モーメントを含む係数を $a_i(i = 1, 2, 3)$ とし、非線形摩擦を含む剰余項を $D_i(i = 1, 2, 2)$ とすると、以下の式で表される.

$$\Delta f_2 = \frac{F_2}{I_{G2x} + I_{R1x}} = a_1 \omega_2 + D_1(t)$$
(6)

$$\Delta f_4 = \frac{-F_1 \sin q_2 + F_4}{I_2 + (I_1 - I_{R1y}) \sin^2 q_2}$$

= $\frac{a_2 \omega_1 \sin q_2}{I_2 + (I_1 - I_{R1y}) \sin^2 q_2}$
+ $\frac{a_3 \omega_4}{I_2 + (I_1 - I_{R1y}) \sin^2 q_2} + D_2(t)$ (7)
 F_{2y}

$$a_{1} = \frac{1}{I_{G2x} + I_{R1x}}$$

$$a_{2} = -F_{1v}$$

$$a_{3} = F_{4v}$$

$$D_{1} = \frac{d_{2}}{I_{G2x} + I_{R1x}}$$

$$D_{2} = \frac{-d_{1} \sin q_{2} + d_{4}}{I_{2} + (I_{1} - I_{R1y}) \sin^{2} q_{2}}$$

Gimbal4 の変動する慣性モーメント \bar{I}_{G4x} は、慣性モーメントの変動を ΔI_{G4x} , 初期値を I_{G4x} とすると、以下の式で表される.

$$\bar{I}_{G4x} = I_{G4x} + \Delta I_{G4x} \tag{8}$$

式 (6), (7), (8) より,式(4) は,慣性モーメントの変動 を含む項を J とすると,以下の式で表される.ただし, $|D_i| < D_{iN}(i = 1, 2)$ である.

$$\begin{bmatrix} T_1, T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1, u_2 \end{bmatrix} \qquad \vec{\mathfrak{x}} (1)$$

$$\begin{cases} \dot{q}_2 = \omega_2 & \dot{\mathfrak{x}} \leq 3 \\ \dot{\omega}_2 = f_2 + g_2 u_2 + a_1 \omega_2 + D_1 \\ \dot{q}_4 = \omega_4 & (9) \\ J\dot{\omega}_4 = f_4 + g_4 u_1 + \frac{a_2 \omega_1 \sin q_2}{I_2 + (I_1 - I_{R1y}) \sin^2 q_2} \\ + \frac{a_3 \omega_4}{I_2 + (I_1 - I_{R1y}) \sin^2 q_2} + D_2 \\ J = 1 + \Delta J \\ \Delta J = \frac{\Delta I_{G4x}}{I_2 + (I_1 - I_{R1y}) \sin^2 q_2} \end{cases}$$

指令軌道をそれぞれ q_{2d}, q_{4d} として, 軌道偏差を以下の 式で定義する.

$$\begin{cases} z_1 = q_2 - q_{2d} \\ z_2 = q_4 - q_{4d} \end{cases}$$
(10)

式(4),(10)より,偏差システムは、以下となる.

$$\Delta_1 : \begin{cases} \dot{z}_1 = \omega_2 - \dot{q}_{2d} \\ \dot{\omega}_2 = f_2 + g_2 u_2 + a_1 \omega_2 + D_1 \end{cases}$$
(11)

$$\Delta_2: \begin{cases} \dot{z}_2 = \omega_4 - \dot{q}_{4d} \\ J\dot{\omega}_4 = f_4 + g_4(q)u_1 + \frac{a_2\omega_1 \sin q_2}{I_2 + (I_1 - I_{R1y})\sin^2 q_2} (12) \\ + \frac{a_3\omega_4}{I_2 + (I_1 - I_{R1y})\sin^2 q_2} + D_2 \end{cases}$$

4 適応推定機構

適応推定機構とは、不確かなパラメータを推定して、不 確かさを打ち消す機構のことである.リアプノフの安定 定理を用いることによって、適応則と呼ばれる推定値の 微分を求め、積分することによって推定値を導出する.具 体的な手順を以下に示す.パラメータ a が不確かなパラ メータであると仮定する.ただし、a は定数である.以下 のような簡単なシステムを考える.

$$\frac{d}{dt}x = f(x) + g(x)u + \bar{a}x_1 \tag{13}$$

 このとき, a の推定値を â(t), 推定値と実際の値の偏差 を ã とすると, ã は以下の式で表される.

$$\tilde{a} = a - \hat{a} \tag{14}$$

また,式(14)より, ãの微分 âは,以下の式となる.

$$\dot{\tilde{a}} = -\dot{\hat{a}} \tag{15}$$

制御入力 u を以下の式で表す.

$$u = -\frac{f + \hat{a}x + cx}{g} \tag{16}$$

適応則 âを以下の式で表す.

$$\dot{\hat{a}} = -\frac{1}{\gamma}x^2 \tag{17}$$

リアプノフ関数を,以下で示すようなãを含む関数の式 で表す.

$$V = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\gamma \tilde{a}^2$$
 (18)

式 (15) より, リアプノフ関数の微分 V は以下のように なる.

$$\dot{V} = x\dot{x} + \tilde{a}\dot{\tilde{a}}$$

$$= x(f + gu + \bar{a}x_1) + \tilde{a}(-\dot{a})$$

$$= x(-cx + (\bar{a} - \hat{a})x) - \tilde{a}\dot{\tilde{a}}$$

$$= -cx^2 + \tilde{a}x^2 - \tilde{a}x^2$$

$$= -cx^2 < 0 \tag{19}$$

したがって、 $\dot{V} < 0$ より、 $x \rightarrow 0$ となる.

5 制御器設計

CMGのシステムを、Gimbal2 と Gimbal4 のシステム としてそれぞれ分離する。その後、各々のシステムに対 して、リアプノフの安定定理を用いて、仮想入力 ω_2^* 、 ω_4^* を求める。切換面 s_1 , s_2 を設計し、スライディングモー ド制御理論より、制御入力 u_1 , u_2 を求める。また、制御 入力 u_1 , u_2 に不確かなパラメータに対する推定値とリ アプノフの安定定理を用いて、適応則と呼ばれる推定値 の微分値を求め、積分することで推定値を不確かなパラ メータに収束させる機構を設計する。以下に、閉ループ 系の概略図を図2に示す。Adaptive algorithm では、適 応則を積分して推定値を導出する。



図2 閉ループ系の概略図

5.1 制御入力 *u*₂ の設計

サブシステム Δ_1 に対して,コントローラを設計する. まず, ω_2 を仮想入力として, $z_1(t) \rightarrow 0(t \rightarrow \infty)$ となる 仮想入力 ω_2^* を求める.リアプノフ関数 $V_1(t)$ を下式で定 義する.

$$V_1 = \frac{1}{2}z_1^2 \tag{20}$$

このとき,式(20)の微分 <u>d</u>_dV₁は,以下となる.

$$\frac{d}{dt}V_1 = z_1\dot{z}_1$$
$$= z_1(\omega_2 - \dot{q}_{2d}) \tag{21}$$

ここで、ω2 が以下の式を満たすものとする.

$$\omega_2^* = -C_1 z_1 + \dot{q}_{2d} \quad (C_1 > 0) \tag{22}$$

よって, $\omega_2 \in \omega_2^*$ に取り替えると, 式 (21) は以下の式と なる.

$$\frac{d}{dt}V_1 = z_1(\omega_2 - \dot{q}_{2d}) = -C_1 z_1^2 < 0$$
(23)

次に, $\omega_2 \rightarrow \omega_2^*(t \rightarrow \infty)$ となる u_2 を求める.切換面を s_1 , a_1 の推定値を \hat{a}_1 とする.ここで,推定値と実測値の 偏差 \tilde{a}_1 と切換面 s_1 を以下で定義する.

$$s_1 = \omega_2 - \omega_2^* \tag{24}$$

$$\tilde{a}_1 = a_1 - \hat{a}_1(t) \tag{25}$$

切換面 s₁ について,変形すると以下になる

$$s_{1} = \omega_{2} - \omega_{2}^{*}$$

= $\omega_{2} + C_{1}z_{1} - \dot{q}_{2d}$
= $\dot{z}_{1} + C_{1}z_{1}$ (26)

よって, 式(26)より, z_1 は以下の式で表される.

$$\dot{z}_1 = -C_1 z_1 + s_1 \tag{27}$$

ここで、リアプノフ関数 V2 を下式で定義する.

$$V_2 = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}s_1^2 + \frac{1}{2}\gamma_1\tilde{a}_1^2 \tag{28}$$

このとき,式(28)の微分 $\frac{d}{dt}V_2$ は,以下となる.

$$\frac{d}{dt}V_2 = z_1\dot{z}_1 + s_1\dot{s}_1 - \gamma_1\tilde{a}_1\dot{\hat{a}}_1$$

= $z_1(-C_1z_1 + s_1) + s_1(\dot{\omega}_2 - \dot{\omega}_2^*) - \gamma_1\tilde{a}_1\dot{\hat{a}}_1(29)$

ここで,推定値の微分 â1 を下式で与える.

$$\dot{\hat{a}}_1 = \frac{1}{\gamma_1} \omega_2 s_1 \tag{30}$$

そのとき、制御入力 u2 は下式で与えられる.

$$u_{2} = -\frac{1}{g_{2}}(\hat{a}_{1}\omega_{2} + z_{1} + f_{2} - \ddot{q}_{2d} + C_{1}(\omega_{2} - \dot{q}_{2d}) + C_{2}s_{1} + \eta_{1}\mathrm{sgn}(s_{1})) \quad (31)$$

式 (29) は、制御入力 u₂ を代入すると、以下の式となる.

$$\frac{d}{tt}V_2 = z_1(-C_1z_1 + s_1) + s_1(\dot{\omega}_2 - \dot{\omega}_2^*) - \gamma_1\tilde{a}_1\dot{\hat{a}}_1
= -C_1z_1^2 - C_2s_1^2 - (\eta_1 - D_1)|s_1|
< -C_1z_1^2 - C_2s_1^2 - (\eta_1 - D_{1N})|s_1|$$
(32)

したがって, $\eta_1 \geq \eta_1 > D_{1N}$ となるように設定すると, リアプノフ関数 V_2 の微分 \dot{V}_2 は $\dot{V}_2 < 0$ となり, $\omega_2 \rightarrow \omega_2^*(t \rightarrow \infty)$ となる.

5.2 制御入力 *u*₁ の設計

サブシステム Δ_2 に対して,コントローラを設計する.) ω_4 を仮想入力として, $z_2(t) \rightarrow 0(t \rightarrow \infty)$ となる ω_4^* を求 める. 同様にして,仮想入力 ω_4^* は,以下の式となる.

$$\omega_4^* = -C_3 z_2 + \dot{q}_{4d} \quad (C_3 > 0) \tag{33}$$

次に, $\omega_4 \rightarrow \omega_4^*(t \rightarrow \infty)$ となる u_1 を求める.切換面を s_2 , a_2 の推定値を \hat{a}_2 , a_3 の推定値を \hat{a}_3 , ΔI_{G4x} の推定 値を \hat{a}_4 とする.ここで,推定値と実測値の偏差 \tilde{a}_2 , \tilde{a}_3 , \tilde{a}_4 と切換面 s_2 を以下で定義する.

$$s_2 = \omega_4 - \omega_4^* \tag{34}$$

$$\tilde{a}_2 = a_2 - \hat{a}_2(t) \tag{35}$$

$$\tilde{a}_3 = a_3 - \hat{a}_3(t) \tag{36}$$

$$\tilde{a}_4 = \Delta I_{G4x} - \hat{a}_4(t) \tag{37}$$

切換面 s₂ について,変形すると以下になる

$$s_{2} = \omega_{4} - \omega_{4}^{*}$$

= $\omega_{4} + C_{3}z_{2} - \dot{q}_{4d}$
= $\dot{z}_{2} + C_{3}z_{2}$ (38)

よって, 式 (38) より, z_1 は以下の式で表される.

$$\dot{z}_2 = -C_3 z_2 + s_2 \tag{39}$$

) ここで,リアプノフ関数 V₄ を下式で定義する.

$$V_4 = \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}Js_2^2 + \frac{1}{2}\gamma_2\tilde{a}_2^2 + \frac{1}{2}\gamma_3\tilde{a}_3^2 + \frac{1}{2}\gamma_4\tilde{a}_4^2 \quad (40)$$

このとき,式(40)の微分 $\frac{d}{dt}V_4$ は,以下となる.

$$\frac{d}{dt}V_4 = z_2\dot{z}_2 + s_2J\dot{s}_1 - \gamma_2\tilde{a}_2\dot{\tilde{a}}_2 - \gamma_3\tilde{a}_3\dot{\tilde{a}}_3 - \gamma_4\tilde{a}_4\dot{\tilde{a}}_4
= z_2(-C_3z_2 + s_2) + s_2(J\dot{\omega}_4 - J\dot{\omega}_4^*)
-\gamma_2\tilde{a}_2\dot{\tilde{a}}_2 - \gamma_3\tilde{a}_3\dot{\tilde{a}}_3 - \gamma_4\tilde{a}_4\dot{\tilde{a}}_4$$
(41)

ここで, 推定値の微分 â₂, â₃, Ĵを下式で表す.

$$\dot{\hat{a}}_2 = \frac{1}{\gamma_2} \frac{\omega_1 s_2 \sin q_2}{I_2 + (I_1 - I_{R1y}) \sin^2 q_2}$$
(42)

$$\dot{\hat{a}}_3 = \frac{1}{\gamma_3} \frac{\omega_4 s_2}{I_2 + (I_1 - I_{R1y}) \sin^2 q_2}$$
(43)

$$\dot{\hat{a}}_4 = -\frac{1}{\gamma_4} \frac{\dot{\omega}_4^* s_2}{I_2 + (I_1 - I_{R1y}) \sin^2 q_2} \tag{44}$$

このとき、制御入力 u1 は以下の式で与えられる.

$$u_{1} = -\frac{1}{g_{4}} (z_{2} + f_{4} - (1 + \frac{\hat{a}_{4}}{I_{2} + (I_{1} - I_{R1y})\sin^{2}q_{2}})\dot{\omega}_{4}^{*} + C_{4}s_{1} + \eta_{2}\mathrm{sgn}(s_{2}) + \frac{\hat{a}_{2}\omega_{1}\sin q_{2}}{I_{2} + (I_{1} - I_{R1y})\sin^{2}q_{2}} + \frac{\hat{a}_{3}\omega_{4}}{I_{2} + (I_{1} - I_{R1y})\sin^{2}q_{2}})$$

$$(45)$$

式(41)は、制御入力 u1 を代入すると、以下の式となる.

$$\frac{d}{dt}V_4 = z_2(-C_3z_2 + s_2) + s_2(J\dot{\omega}_4 - J\dot{\omega}_4^*)
-\gamma_2\tilde{a}_2\dot{\tilde{a}}_2 - \gamma_3\tilde{a}_3\dot{\tilde{a}}_3 - \gamma_4\tilde{a}_4\dot{\tilde{a}}_4
= -C_3z_1^2 - C_4s_2^2 - (\eta_2 - D_2)|s_2|
< -C_3z_1^2 - C_4s_2^2 - (\eta_2 - D_{2N})|s_2|$$
(46)

したがって, $\eta_2 \in \eta_2 > D_{2N}$ となるように設定すると, リアプノフ関数 V_4 の微分 \dot{V}_4 は $\dot{V}_4 < 0$ となり, $\omega_4 \rightarrow \omega_4^*(t \rightarrow \infty)$ となる.

6 実験結果

設計した制御器を用いて,実験を行う.初期値と指令 軌道は,それぞれ以下のように設定する.

$$x_{0} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi}{18} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$q_{2d} = \begin{cases} \frac{\pi}{18} & (t \leq 2) \\ -\frac{5}{36}\pi \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{7\pi}{4} & (2 < t \leq 6) \\ \frac{\pi}{3} & (8 < t) \end{cases}$$

$$q_{4d} = \begin{cases} 0 & (t \leq 2) \\ -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} & (2 < t \leq 8) \\ 1 & (8 < t) \end{cases}$$

各パラメータは、以下の値を与える.

$$C_{1} = 3, C_{2} = 4, \eta_{1} = 1, \gamma_{1} = 0.01$$

$$C_{3} = 3, C_{4} = 4, \eta_{2} = 1, \gamma_{2} = 0.001$$

$$\gamma_{3} = 0.01, \gamma_{4} = 0.01, \Delta I_{G4x} = 0.005$$
(47)

図 3,4 より,Gimbal2 とGimbal4 がともに指令軌道に偏 差なく追従していることが分かる.Motor1,Motor2のそ れぞれのトルクの出力範囲は,それぞれ $|T_1| < 0.6[N \cdot m]$, $|T_2| < 2.4[N \cdot m]$ であるが,図 5,6 より範囲内に収まっ ていることがわかる.また,シミュレーションと実験結果 がほぼ一致していることから,モデルが妥当であるとい える.以上から,設計した制御器の妥当性を確認できる.



7 おわりに

本研究の成果として, 駆動源のない Gimbal4 の角度制 御問題に対して, 適応推定機構を用いて, バックステッ ピングの考え方, スライディングモード制御に基づき制 御器設計を行った. また,実験により設計した制御器の 有用性を確認した.

参考文献

- [1] 村井千夏,中上礼奈: 非ホロノミック拘束を持つCMG の摩擦補償を含む非線形追従制御第3回計測自動制 御学会制御部門マルチシンポジウム,計測自動制御 学会,2B2-4,2016.
- [2] T.Madani, B.Daacji, K.Diouani: Adaptive controller based on uncertainty parametric estimation using backstepping and sliding mode techniques: Application to an active orthosis, European Control Conference, 2014.