

# 複素円板算術による多項式補間の精度保証付き計算

M2017SS007 柴田葉里

指導教員：杉浦洋

## 1 はじめに

現代のコンピュータにおいて、高速な数値計算ができるのは、実数を浮動小数点数で近似して計算を行うからである。しかし、近似であるため厳密に正しいことが保証されていない。そこで、計算結果がどのくらい正しいか検算することが重要になってくる。これを精度保証付き数値計算という。

多項式補間は数値計算の基礎であり、とりわけ精度の高い Chebyshev 多項式補間が多用される。そこで、本論文では円板演算システムを用いて、解析関数の Chebyshev 多項式補間の効率的な精度保証付き計算を目指す。

正則関数の Chebyshev 多項式補間について、近似区間を囲む積分路上の周回積分による誤差公式がある。この公式による誤差上界は他の方法に比べて小さいことが知られている。しかし、積分路内の被近似関数の正則性を保証する必要があるが、プログラムによる自動的な運用が困難であった。

これを克服するために、正則性フラグ付き円板演算システム (加藤 [1], 柴田 [3]) を利用した、任意の正方形領域内の特異点を自動検出する高棹 [4] のアルゴリズムを用いることができる。

同じ円板システムにより、上記誤差評価式の周回積分を精度保証付きで計算する効果的なアルゴリズムを確立し、Chebyshev 多項式補間の精度保証を行うことを目指した。

そして、Chebyshev 多項式補間の精度保証付き計算アルゴリズムを開発し、それに基づいて、Mathematica のプログラムを作成し、数値実験により有効性を確認した。

## 2 区間解析

### 2.1 区間

区間解析では、区間を数の拡張と考える。ここで、区間とは、閉区間

$$[\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R} | \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$$

である。区間を  $[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$  と表すこともある。区間全体の集合を  $\mathbb{IR}$  と書く。また、 $\underline{x} = \bar{x}$  となる区間  $[x]$  は点区間という。

### 2.2 区間関数

関数  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を領域  $D$  で連続な関数とする。関数  $f$  を区間関数

$$f([x]) = \{f(x) | x \in [x]\} \quad ([x] \subset D)$$

により  $\mathbb{IR}$  上の関数に拡張できる。これは四則演算などの、2変数関数でも同様である。Mathematica には基本的な実数関数の区間関数が実装されている。

標準関数と四則演算による合成関数を  $f$  とする。 $f$  を構成する標準関数と四則演算をすべてその区間関数で置き換えたものを  $f$  の区間拡張といい  $[f]([x])$  で表す。このとき

$$f([x]) \subseteq [f]([x])$$

が成立する。

## 3 正則性フラグ付き円板算法

Petković[2] に従って、複素円板演算システムの基礎を紹介する。また、円板に付加する正則フラグ (加藤 [1], 柴田 [3]) について解説する。円板に正則フラグを付加することにより、円板演算システムは初等関数の正則性を判定する機能を得る。

### 3.1 円板の定義

中心  $c \in \mathbb{C}$ 、半径  $r \in \mathbb{R}$  の複素閉円板領域を

$$Z = \langle c; r \rangle = \{z \in \mathbb{C} | |z - c| \leq r\}$$

と表し、以後これを単に円板と呼ぶ。また、円板全体の集合を  $\mathbb{KC} = \{\langle c; r \rangle : c \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}, r \geq 0\}$  と書く。

### 3.2 円板関数

1変数複素関数  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  に対して、円板関数  $\hat{f} : \mathbb{KC} \rightarrow \mathbb{KC}$  が  $f(Z) \subset \hat{f}(Z)$  ( $Z \in \mathbb{KC}$ ) を満たすとき、 $\hat{f}$  は  $f$  の円板関数であるという。多変数複素関数に関しても同様である。

$\langle d; s \rangle = \hat{f}(\langle c; r \rangle)$  を計算することにより、 $|z - c| \leq r \Rightarrow |f(z) - d| \leq s$  を知ることができる。範囲  $|z - c| \leq r$  のみが知られた  $z$  に対する関数値  $f(z)$  の範囲が分かる。すなわち、 $f(z)$  の精度が分かる。

### 3.3 正則性フラグ

正則性フラグ Rflag とは、基本関数が入力円板で正則かどうか知らせるものである。これは円板のデータに付加する。入力円板で Rflag = True のとき、入力円板が関数の特異点を含まないと言えるなら、Rflag = True、含まないと言えないなら Rflag = False を出力円板に付加する。入力円板で Rflag = False ときは、無条件に出力円板に Rflag = False を付加する。

このように基本関数を構成することにより、基本関数の合成関数についても、入力円板の Rflag = True として関数計算すれば、その出力円板の正則性フラグを見ることにより、入力円板で関数が正則かどうか判定できる。

基本関数の合成円板関数  $\hat{f}$  において、出力円板の Rflag が True なら、入力円板において  $f$  は必ず正則である。「 $f$  は入力円板で正則である」は、数学的に真の命題である。出力円板の Rflag が False でも、入力円板において  $f$  は正則である可能性はある。合成円板関数  $\hat{f}$  の計算の途中

結果において要素となる基本円板関数の値域は、円板で包囲され大きめに扱われるからである。

## 4 Chebyshev 多項式補間と補間誤差

### 4.1 Chebyshev 多項式

$n$  次 Chebyshev 多項式 (第 1 種) は

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) \quad (1)$$

で定義される  $n$  次多項式である。また、 $n$  次第 2 種 Chebyshev 多項式は、

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1) \cos^{-1} x)}{\sin(\cos^{-1} x)} \quad (2)$$

で定義される  $n$  次多項式である。

ここで、 $n$  次多項式

$$\begin{aligned} W_n(x) &= T_n(x) - T_{n-2}(x) \\ &= 2(x^2 - 1)U_{n-2}(x) \quad (n \geq 2) \end{aligned} \quad (3)$$

を定義する。

[命題 4.2]  $W_{n+1}(x)$  の零点 (Chebyshev 点) は、

$$\xi_l = \cos \frac{\pi l}{n} \quad (0 \leq l \leq n) \quad (4)$$

である。

### 4.2 Chebyshev 多項式補間

区間  $[-1, 1]$  の関数  $f(x)$  に対する Chebyshev 点 (4) 上の補間多項式を、Chebyshev 多項式で展開した、

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=0}^n a_k T_k(x), \\ f_n(\xi_l) &= f(\xi_l) \quad (0 \leq l \leq n) \end{aligned}$$

を  $n$  次 Chebyshev 補間多項式という。ここで、記号  $\sum''$  は初項と末項を  $1/2$  した総和である。

[定理 4.1] 複素平面上の実区間  $[-1, 1]$  を囲む単純閉曲線を  $C$  とする。  $C$  の境界と内部で  $f(z)$  が正則であるとき、 $n$  次 Chebyshev 多項式補間の誤差は、

$$\begin{aligned} e_n(x) &= f(x) - p_n(x) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{W_{n+1}(x)f(z)}{W_{n+1}(z)(z-x)} dz \\ &= \frac{W_{n+1}(x)}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{W_{n+1}(z)(z-x)} dz \end{aligned} \quad (5)$$

と表せる。

### 4.3 Chebyshev 補間の誤差評価

積分路として、 $-1, 1$  を焦点とする楕円

$$E_\rho : |z-1| + |z+1| = \rho + \rho^{-1} \quad (\rho > 1)$$

を考える。

[定理 4.2]  $f(z)$  が  $E_\rho$ 、 $\rho > 1$  を含む領域  $D$  で解析的

であるなら、 $f(x)$  に対する  $n$  次 Chebyshev 多項式補間  $p_n(x)$  の誤差は、

$$\begin{aligned} |e_n(x)| &\leq \frac{|W_{n+1}(x)|}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z)|}{m(x)(\rho^n - \rho^{-n})} d\theta \\ &= \frac{|W_{n+1}(x)|}{2\pi m(x)(\rho^n - \rho^{-n})} \int_0^{2\pi} |f(z)| d\theta, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} m(x) &= \min_{0 \leq \theta < 2\pi} |z-x| \\ &= \min_{0 \leq \theta < 2\pi} \left| \frac{\rho e^{i\theta} + \rho^{-1} e^{-i\theta}}{2} - x \right| \\ &= \begin{cases} \frac{\rho - \rho^{-1}}{2} \sqrt{1-x^2} & \left( \left| \frac{x(\rho + \rho^{-1})}{2} \right| < 1 \right), \\ \frac{\rho + \rho^{-1}}{2} - |x| & \left( \left| \frac{x(\rho + \rho^{-1})}{2} \right| \geq 1 \right) \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

で評価される。

## 5 精度保証付き Chebyshev 多項式補間

正則性フラグ付き円板演算システムを用いて、定理 4.2 による、精度保証付き Chebyshev 多項式補間のアルゴリズムを構成する。まず、楕円  $E_\rho$  を境界とする領域を多数の小さな円板で覆い尽くす。それらの円板内で  $f(z)$  が正則であることが正則性フラグ付き円板演算システムで確かめられたら、Chebyshev 補間の精度保証を行う。

評価計算の中心部は、定理 4.2 で示した誤差評価公式 (6) の右辺の因子

$$F_1 = |W_{n+1}(x)|, \quad (8)$$

$$F_2 = 1/m(x), \quad (9)$$

$$Q = \int_0^{2\pi} |f(z)| d\theta \quad (10)$$

の評価である。

以下にアルゴリズムの概要を示す。

#### 1. 特異点の発見

近似区間  $[-1, 1]$  を含む領域  $W : -2 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, -2 \leq \operatorname{Im} z \leq 2$  上で、高棹 [4] のアルゴリズムにより特異点を含む小円板をすべて見付ける。

次に、特異点を含む小円板の内部と共有点をもたない最大の楕円パラメタ  $\rho_{Max}$  を求める。  $E_{\rho_{Max}}$  は特異点と近すぎる可能性がある。従って、式 (10) の積分評価が大きくなりすぎる可能性がある。そこで、実際の楕円パラメタとして、 $\rho_{Max}$  より少し小さい

$$\rho = 0.99\rho_{Max}$$

を選んだ。

#### 2. $F_1$ の計算

式 (8) から従って、 $F_1$  を計算する。  $F_1$  は  $x$  と  $n$  の関数  $F_1(x, n)$  として構成する。

#### 3. $F_2$ の計算

式 (7) から従って、式 (9) の  $F_2$  を計算する。  $F_2$  は  $x$  と  $\rho$  の関数  $F_2(x, \rho)$  として構成する。

#### 4. 積分 $Q$ の精度保証付き計算

式 (10) の積分  $Q$  を精度保証付き区分求積法で計算する。初期分割数を 10 として、精度の低い小区間は 2 等分

し、それを十分な精度が得られるまで繰り返す。これにより区間  $[Q] \supset Q$  を計算する。

### 5. 補間誤差の上界の計算

定理 4.2 の式 (6) に従って、補間誤差の絶対値  $|e_n(x)|$  の上界を、 $x, n, \rho$  の関数

$$EM(x, n, \rho) = \left( \frac{F_1(x, n) F_2(x, \rho) [Q]}{2\pi(\rho^n - \rho^{-n})} \right)$$

として計算する。 $\bar{\phantom{x}}$  は区間の上限である。

## 6 数値実験

第 5 節のアルゴリズムに従って、数値実験を行う。使用機種は FUJITSU のノートパソコン FMVWB3S17(CPU: Intel Core i5-8250U 1.60GHz 1.80GHz, メモリ: 8.00GB), OS は Windows10, 使用言語は Mathematica 11.1.1 である。

第一種 Chebyshev 多項式の母関数, ピーク関数, 双曲線余弦関数を被近似関数とした実験を行った。本予稿では第一種 Chebyshev 多項式の母関数に関する結果のみを紹介する。

我々のアルゴリズムにおいては、ユーザは被近似関数  $f(z)$  の円板拡張関数を用意する必要がある。それは、 $f(z)$  の特異点の発見と、定理 4.2 の不等式右辺積分の精度保証付き計算に用いられる。

### 6.1 第一種 Chebyshev 多項式の母関数

第一種 Chebyshev 多項式の母関数

$$f(x) = \frac{1 - r^2}{1 - 2rx + r^2}, \quad r = \frac{3}{10}$$

の 15 次 Chebyshev 補間  $f_{15}(x)$  の精度保証を行う。

#### 1. 特異点の発見

近似区間  $[-1, 1]$  を含む領域

$$W : -2 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, \quad -2 \leq \operatorname{Im} z \leq 2$$

上で、高樺 [4] のアルゴリズムにより特異点を含む小円板を見付ける。図 1 の小さい赤丸が発見された特異点である。これらは、 $f(x)$  の特異点  $z = (1+r^2)/(2r) = 1.81 \dots$  を包囲している。2 つの赤丸外部で  $f(z)$  は正則であることが保証される。

次に、赤丸内部と共有点をもたない最大の楕円パラメータ  $\rho_{Max}$  を求めると、

$$\rho_{Max} = 3.29 \dots$$

であった。青い楕円は、

$$E_{\rho_{Max}} : |z - 1| + |z + 1| = \rho_{Max} + \rho_{Max}^{-1}$$

である。 $E_{\rho_{Max}}$  は特異点と近すぎる可能性があるので、式 (10) の積分評価が大きくなりすぎる可能性がある。そこで、実際の楕円パラメータとして

$$\rho = 0.99\rho_{Max} = 3.26 \dots$$

を選んだ。黒い楕円が  $E_\rho$  である。

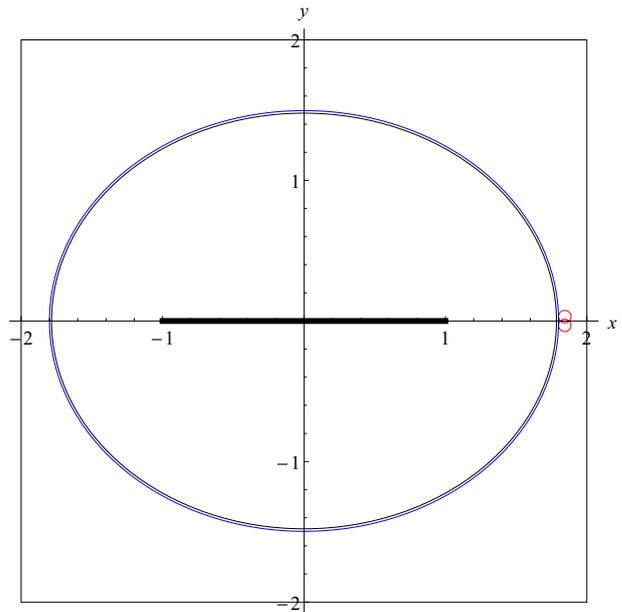


図 1 特異点を含む円板 (赤) と最大楕円 (青), 計算楕円 (黒)

#### 2. $F_1$ の計算

式 (8) に従って、 $F_1$  を計算する。 $F_1$  は  $x$  と  $n$  の関数  $F_1(x, n)$  として構成する。この実験では  $n = 15$  であるから、 $F_1(x, n)$  のグラフは図 2 のようになる。

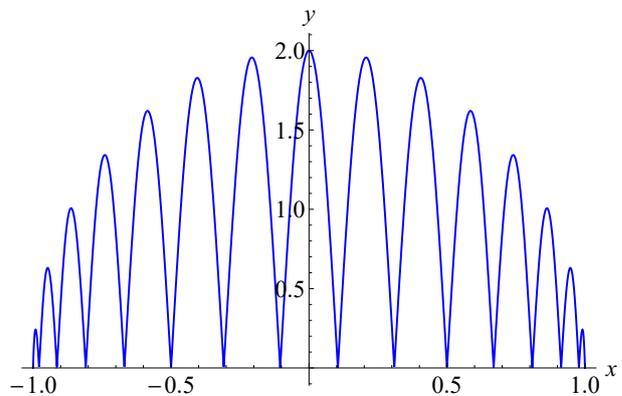


図 2 因子  $F_1(x, n)$

#### 3. $F_2$ の計算

式 (7) に従って、式 (9) の  $F_2$  を計算する。 $F_2$  は  $x$  と  $\rho$  の関数  $F_2(x, \rho)$  として構成する。 $\rho = 3.26 \dots$  のときの  $F_2(x, \rho)$  のグラフを図 3 に示す。また 2 つの因子の積  $F_1(x, n)F_2(x, \rho)$  のグラフを図 4 に示す。

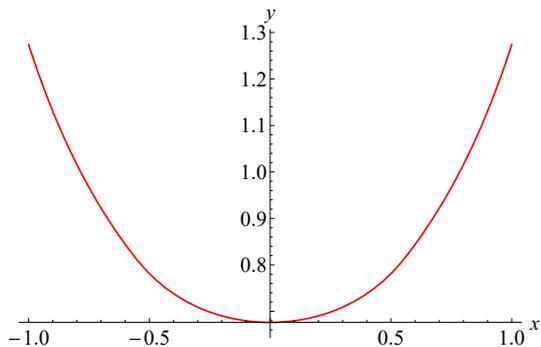


図 3 因子  $F_2(x, \rho)$

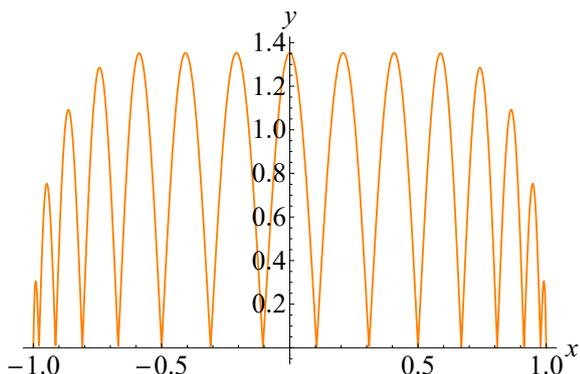


図 4  $F_1(x, n)F_2(x, \rho)$

#### 4. 積分 $Q$ の精度保証付き計算

式 (10) の積分  $Q$  を精度保証付き区分求積法で計算する。初期分割数を 10 として、精度の低い小区間は 2 等分し、それを十分な精度が得られるまで繰り返す。

最終分割数は 32,  $Q$  の保証範囲は,

$$[Q] = [9.39 \dots, 15.13 \dots]$$

となった。要求精度を高くすれば、保証範囲幅はもっと狭くできるが、最終分割数が増大する。被積分関数を、図 5 の青線で示す。また、定積分値  $Q$  をオレンジの面積で示す。Mathematica で近似計算した値は  $Q = 11.64 \dots$  であり、精度保証が成功していることを示している。

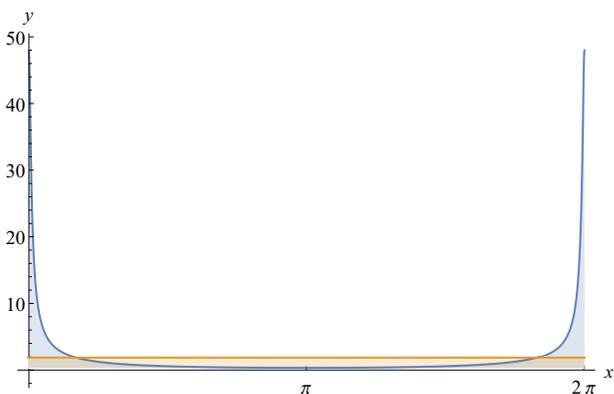


図 5 被積分関数 (青) と定積分 (オレンジ面積)

#### 5. 補間誤差の上界の計算

定理 4.2 の式 (6) に従って、補間誤差の絶対値  $|e_n(x)|$  の上界を,  $x, n, \rho$  の関数

$$EM(x, n, \rho) = \left( \frac{F_1(x, n)F_2(x, \rho)[Q]}{2\pi(\rho^n - \rho^{-n})} \right)$$

として計算する。— は区間の上限である。図 6 に、補間誤差  $e_n(x)$  を青い曲線で、上界関数  $\pm EM(x, n, \rho)$  を黄色の曲線で示す。グラフは

$$-EM(x, n, \rho) \leq e_n(x) \leq EM(x, n, \rho)$$

を示している。精度保証は成功した。

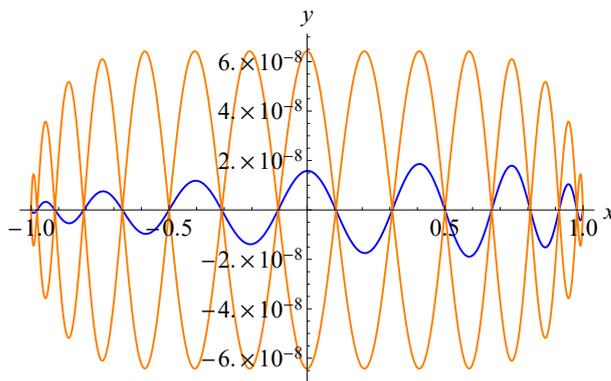


図 6 補間誤差 (青) と上界関数 (黄)

## 7 おわりに

本研究では、Chebyshev 補間の精度保証付き計算アルゴリズムを開発した。それに基づいて、Mathematica のプログラムを作成し、数値実験により有効性を確認した。

中心的な定理は、定理 4.2 であり、 $x \in [-1, 1]$  ごとに Chebyshev 補間の誤差評価ができる。それをを用いるためには、被近似関数の特異点の位置を知り、楕円パラメタを設定する必要がある。我々のアルゴリズムでは、特異点の位置は正則性フラグ付き円板演算システムにより自動的に計測される (高棹 [4])。そして定理 4.2 の誤差評価に必要な数値も、円板演算システムにより精度保証付きで計算される。

## 参考文献

- [1] 加藤里奈：複素円板法による初等関数の正則性判定システムの構築, 南山大学情報理工学部卒業論文 (2016).
- [2] Petković, M. and Petković, L. D.: Complex Interval Arithmetic and Its Applications (Mathematical Research), Wiley-VCH(1998).
- [3] 柴田菜里：複素円板法による初等関数の正則性判定システムとその応用, 南山大学情報理工学部卒業論文 (2017).
- [4] 高棹義裕：複素解析関数の特異点の探索と留数の計算法, 南山大学理工学部卒業論文 (2018).