母数に順序制約のある多群ポアソンモデルにおける 対照群との多重比較法

M2017SS003 光田卓矢

指導教員：白石高章

1 はじめに

k 標本正規分布モデルにおける平均母数に順序制約がある場合に, すべての母分散が等しいという仮定の下で, 第 1 群を対照群, 第 2 群から第 k 群までを処理群とし, 第 1 群の母平均と他の $k-1$ 個の群のそれぞれの母平均との対比較を考えるのが Williams の方法 (文献 [1], [2]) である.
本研究では, 平均母数に順序制約がある場合の k 群ポアソンモデルを考える．このポアソンモデルにおいて Williams の方法 (文献 [1], [2]) を基に多重比較法を提案する．また, 松島, 光田 (文献 [3]) で提案した線形の統計量を基に多重比較法を提案し, その提案した線形型の方法と Williams 型の方法の検出力の比較をシミュレーションにより行う.

2 k 標本ポアソンモデル

ある要因 A があり, k 個の水準 $A_1, \cdots, A_k$ を考える．水準は標本とも呼ばれる．水準 A_i における標本の観測値 $(X_{i1}, \cdots, X_{in_i})$ は第 i 標本または第 i 群と呼ばれる．表 1 の X_{ij} は平均 μ_i のポアソン分布 $\mathcal{P}_o(\mu_i)$ に従うものとする．さらに, 全ての X_{ij} は互いに独立であるとする．すなわち,

$$X_{ij} \sim \mathcal{P}_o(\mu_i) \quad (j = 1, \cdots, n_i\ ,\ i = 1, \cdots, k)$$

である.

表 1 k 標本ポアソンモデル

標本	サイズ	データ	平均	分布関数
第 1 標本	n_1	$X_{11}, \cdots, X_{1n_1}$	μ_1	$\mathcal{P}_o(\mu_1)$
第 2 標本	n_2	$X_{21}, \cdots, X_{2n_2}$	μ_2	$\mathcal{P}_o(\mu_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
第 k 標本	n_k	$X_{k1}, \cdots, X_{kn_k}$	μ_k	$\mathcal{P}_o(\mu_k)$

総標本サイズ：$n \equiv n_1 + \cdots + n_k$ (すべての観測値の個数)
$\mu_1, \cdots, \mu_k$ はすべて未知パラメータとする.

$$W_i \equiv X_{i1} + X_{i2} + \cdots + X_{in_i}$$

とする．このとき, μ_i の点推定量は,

$$\widehat{\mu}_i \equiv \frac{W_i}{n_i} \qquad (i = 1, \cdots, k)$$

で与えられる．$n \equiv n_1 + \cdots + n_k$ とおく.

3 線形統計量に基づく多重比較法

3.1 線形型検定法

松島, 光田 (文献 [3]) では, $\left\{ \text{帰無仮説 } H_0 : \mu_1 = \cdots = \mu_k \text{ vs. 対立仮説 } H_A : \mu_1 \leqq \cdots \leqq \mu_k (\text{少なくとも 1 つは} \lneqq \text{である}) \right\}$ に対する検定統計量を

$$\widehat{T}_k = \frac{2\sum_{i=1}^k \left(i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^k jn_j\right) n_i \hat{\sigma}_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^k n_i \left(i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^k jn_j\right)^2}} \tag{1}$$

で定義した．ただし, $\hat{\sigma}_i \equiv \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{W_i+1}{n_i}} + \sqrt{\frac{W_i}{n_i}}\right)$ とする.

3.2 提案する線形統計量に基づく多重比較法 (線形型)

帰無仮説 $H_i : \mu_1 = \mu_i$ vs. 対立仮説 $H_i^A : \mu_1 < \mu_i$ に対する検定統計量を (1) について n と k をそれぞれ $n(\ell)$ と ℓ に置き換えた

$$\widehat{T}(\ell) = \frac{2\sum_{i=1}^{\ell}(i - \frac{1}{n(\ell)}\sum_{j=1}^{\ell} jn_j)n_i\hat{\sigma}_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\ell} n_i(i - \frac{1}{n(\ell)}\sum_{j=1}^{\ell} jn_j)^2}}$$

で定義する．ただし, $n(\ell) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} n_i$ とする.

(I) $\widehat{T}(\ell)$ **に基づく多重比較法**

$i \le \ell \le k$ となる任意の ℓ に対して, $\widehat{T}(\ell) \ge z(\alpha)$ ならば, $\left\{ \text{帰無仮説 } H_i \text{ vs. 対立仮説 } H_i^A \;\middle|\; 2 \le i \le k \right\}$ に対する水準 α の多重比較検定として帰無仮説 H_i を棄却し, 対立仮説 H_i^A を受け入れ, $\mu_1 < \mu_i$ と判定する．ただし, 標準正規分布の上側 $100\alpha\%$ 点を $z(\alpha)$ とする.

定理 (I) の検定方式は水準 α の多重比較検定である.

証明

$$\boldsymbol{\Theta}_0 \equiv \{\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \cdots, \mu_k) | \text{ 1 つ以上の帰無仮説 } H_i \text{ が真 }\}$$

$$= \{\boldsymbol{\mu} | \text{ ある } i \in I \text{ が存在して}, \mu_i = \mu_i\}$$

のとき, 正しい帰無仮説 H_i は 1 つ以上ある．$\mu_i = \mu_1$ を満たす最大の自然数 i を i_0 とする. 事象 D_ℓ を

$$D_\ell \equiv \{\widehat{T}(\ell) \ge z(\alpha)\}$$

とおく．$2 \le i \le i_0$ を満たす整数 i に対して, **(I)** の方法で

正しい帰無仮説 H_i を棄却する事象は, $\bigcap_{\ell=i}^{k} D_\ell$ であるので, **(I)** の方法で 1 つ以上の正しい帰無仮説 H_i を棄却する確率は,

$$P_\mu\left(\bigcup_{i=2}^{i_0}\left\{\bigcap_{\ell=i}^{k} D_\ell\right\}\right) \le P_\mu(D_{i_0}) = P_0(D_{i_0}) \le \alpha$$

である. 故に定理の主張は証明された.

4　東北大震災のデータとその解析結果

4.1　東北大震災以前の震度 1 以上のデータ

東北大震災のデータをもとに, **(I)** の手法で多重比較検定を行った．マグニチュード 9.0 の東北大震災が 2011 年 3 月 11 日 14 時 46 分に発生した．その直前と, 起きる 3 ヶ月前の東北地方で発生した震度 1 以上の回数を表 2 に示す．尚, データは気象庁より引用している．

表 2　東北大震災以前の震度 1 以上のデータ

日付	震度 1	2	3 以上	合計
2010/12/1～2010/12/31	6	6	2	14
2011/1/1～2011/1/31	9	6	5	20
2011/2/1～2011/2/28	14	13	3	30
2011/3/1～2011/3/11	31	13	7	51

4.2　解析結果の例

μ_1 を 2010 年 12 月の一日あたりの震度 1 以上の地震の平均回数, μ_2 を 2011 年 1 月の一日あたりの震度 1 以上の地震の平均回数, μ_3 を 2011 年 2 月の一日あたりの震度 1 以上の地震の平均回数, μ_4 を 2011 年 3 月 1 日から 3 月 11 日の一日あたりの震度 1 以上の地震の平均回数とする．
東北大震災のデータについて, α=0.01 で検定した場合以下のようになる．

ℓ=3 のとき, 統計量 $\widehat{T}(\ell)$=2.748004, 上側 100α% 点の値は 2.326347 となり, **(I)** の手法において帰無仮説 H_4 が棄却された.

4.3　解析結果とその考察

解析を行った結果, 東北大震災のデータについて有意水準 $\alpha = 0.01$ において, $\ell = 3$ のとき, H_4 が棄却された．この結果より, 東北大震災が起こる直前の 2 月から地震の回数が増加していることが統計的に示された．

5　Williams 型の多重比較法の提案

5.1　Williams の多重比較法

$X_{ij} \sim N\left(\mu_i, \sigma^2\right)$ で, 第 2 群以降の標本サイズが等しい

$$n_2 = \cdots = n_k$$

の条件の下で, $2 \le \ell \le k$ となる ℓ に対して, 統計量 T(ℓ) と $\tilde{\mu}_\ell$ を, 第 2 群以降の標本サイズが等しい

$$T(\ell) \equiv \frac{\tilde{\mu}_\ell - \bar{X}_{1\cdot}}{\sqrt{(\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_1})V_E}}, \quad \tilde{\mu}_\ell = \max_{2\le s\le \ell}\frac{\sum_{i=s}^{\ell}\bar{X}_{i\cdot}}{\ell - s + 1}$$

で Williams(1971, 1972) は定義した．ただし,

$$m \equiv n - k, \quad V_E \equiv \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot})$$

で与えられたものとし, $P_0(T(\ell) \le t)$ の上側 100α% 点を $td(\ell, m, n_2/n_1; \alpha)$ とする． すなわち, $P_0\left(T(\ell) \ge td(\ell, m, n_2/n_1; \alpha)\right) = \alpha$ である．

(II)Williams の方法
$i{\le}\ell{\le}k$ となる任意の ℓ に対して, $T(\ell){\ge}\ td(\ell, m, n_2/n_1; \alpha)$ ならば, $\left\{\text{帰無仮説 } H_i \text{ vs. 対立仮説 } H_i^A \;\middle|\; 2 \le i \le k\right\}$ に対する水準 α の多重比較検定として帰無仮説 H_i を棄却し, 対立仮説 H_i^A を受け入れ, $\mu_1 < \mu_i$ と判定する.

5.2　提案する Williams 型の多重比較法

(II) の方法を基に, 表 1 のモデルで, 第 2 群以降の標本サイズが等しい

$$n_2 = \cdots = n_k$$

の条件の下で, $2 \le \ell \le k$ となる ℓ に対して, 統計量 T_ℓ^o と μ_ℓ^o を,

$$T_\ell^o \equiv \sqrt{2n_i}(\mu_\ell^o - \hat{\sigma}_1), \quad \mu_\ell^o = \max_{2\le s\le \ell}\frac{\sum_{i=s}^{\ell}\hat{\sigma}_i}{\ell - s + 1}$$

で定義する．ただし, $\hat{\sigma}_i$ を文献 [4] の

$$\hat{\sigma}_i(1) = \sqrt{\hat{\mu}_i},\ \hat{\sigma}_i(2) = \sqrt{\hat{\mu}_i + 3/8n_i},$$
$$\text{または},\hat{\sigma}_i(3) = (\sqrt{\hat{\mu}_i + 1/n_i} + \sqrt{\hat{\mu}_i})/2$$

で与えられたものとし, $td(\ell; \alpha)$ の値は, 文献 [5], 付表 24 の $m = \infty$ のときの $td_3(\ell, m, 1; \alpha)$ の値とする.

(III)T_ℓ^o に基づく検定法
$i \le \ell \le k$ となる任意の ℓ に対して, $T_\ell^o \ge td(\ell; \alpha)$ ならば, $\left\{\text{帰無仮説 } H_i \text{ vs. 対立仮説 } H_i^A \;\middle|\; 2 \le i \le k\right\}$ に対する水準 α の多重比較検定として帰無仮説 H_i を棄却し, 対立仮説 H_i^A を受け入れ, $\mu_1 < \mu_i$ と判定する.

6　推定量 $\hat{\sigma}_i$ の比較

$i = 1, \cdots, k$ について $\mu_i{\equiv}\mu_0$, $n_i{\equiv}n_0$ とおく．$\alpha = 0.05$, $\mu_0 = 1, 2, \cdots, 10, n_0 = 5(5)30$ として,

$$\hat{\sigma}_i(1) = \sqrt{\hat{\mu}_i},\ \hat{\sigma}_i(2) = \sqrt{\hat{\mu}_i + 3/8n_i},$$
$$\hat{\sigma}_i(3) = (\sqrt{\hat{\mu}_i + 1/n_i} + \sqrt{\hat{\mu}_i})/2$$

の 3 種類について近似の良さを比較する.

(Williams 型における $H_2 \cdots H_k$のどれかを棄却する確率)
$= P_0 \left(T_k^o \geq td(k;\alpha)\right)$,

(提案型における $H_2 \cdots H_k$のどれかを棄却する確率)
$= P_0 \left(\widehat{T}(k) \geq z(\alpha)\right)$

で与えられる．これらの値が, $\alpha \pm 0.001$ 以内のものを近似が良いと判断することにする．本研究では, $k = 4, 5$ の場合のシミュレーションを行った．ただし, 繰り返し回数は $100,000$ 回とした．表 3〜6 は, Williams 型, 線形型の $k = 5, \alpha = 0.05, n_0 = 5, 30$ の場合の結果である.

表 3 Williams 型, $k = 5$, $\alpha = 0.05$, $n_0 = 5$.

μ_0	$\hat{\sigma}_i(1)$	$\hat{\sigma}_i(2)$	$\hat{\sigma}_i(3)$
1	.0655	.0475	.0468
2	.0539	.0513	.0510
3	.0548	.0520	.0517
4	.0525	.0514	.0511
5	.0531	.0513	.0510
6	.0528	.0522	.0520
7	.0533	.0520	.0518
8	.0530	.0519	.0518
9	.0509	.0504	.0503
10	.0509	.0507	.0506

表 4 Williams 型, $k = 5$, $\alpha = 0.05$, $n_0 = 30$.

μ_0	$\hat{\sigma}_i(1)$	$\hat{\sigma}_i(2)$	$\hat{\sigma}_i(3)$
1	.0528	.0521	.0520
2	.0503	.0501	.0501
3	.0516	.0511	.0510
4	.0516	.0512	.0510
5	.0511	.0509	.0509
6	.0518	.0518	.0517
7	.0507	.0506	.0505
8	.0513	.0509	.0509
9	.0525	.0524	.0524
10	.0519	.0519	.0518

表 5 線形型, $k = 5$, $\alpha = 0.05$, $n_0 = 5$.

μ_0	$\hat{\sigma}_i(1)$	$\hat{\sigma}_i(2)$	$\hat{\sigma}_i(3)$
1	.0588	.0491	.0491
2	.0536	.0495	.0486
3	.0532	.0505	.0501
4	.0518	.0501	.0497
5	.0523	.0511	.0506
6	.0520	.0510	.0507
7	.0520	.0509	.0506
8	.0513	.0502	.0500
9	.0509	.0502	.0500
10	.0500	.0492	.0490

表 6 線形型, $k = 5$, $\alpha = 0.05$, $n_0 = 30$.

μ_0	$\hat{\sigma}_i(1)$	$\hat{\sigma}_i(2)$	$\hat{\sigma}_i(3)$
1	.0518	.0509	.0504
2	.0499	.0492	.0491
3	.0487	.0484	.0482
4	.0507	.0505	.0504
5	.0503	.0501	.0500
6	.0503	.0500	.0500
7	.0493	.0491	.0491
8	.0493	.0492	.0492
9	.0498	.0497	.0496
10	.0501	.0499	.0499

$\hat{\sigma}_i(1)$, $n_0 = 5$ のときに値が大きくなり, 近似が良いとは言えない．それと比べ, $\hat{\sigma}_i(2)$, $\hat{\sigma}_i(3)$ では近似が良くなっている．また, n_0 が大きくなれば近似が良くなることが分かった．以上より, 検定を行う際には $\hat{\sigma}_i(2)$, $\hat{\sigma}_i(3)$ を選択したほうが良いことが分かった．この後のシミュレーションでは, $\hat{\sigma}_i(2)$, $\hat{\sigma}_i(3)$ を用いることにする.

7 処理群毎の検出力の比較

繰り返し回数 $100,000$ 回のシミュレーションにより，各検定法の検出力の比較を行う．$i = 2, \cdots, k$ において,

$$NT_i(re) = \begin{cases} 1 & (\text{帰無仮説 } H_i \text{ が棄却される場合}) \\ 0 & (\text{帰無仮説 } H_i \text{ が棄却されない場合}) \end{cases}$$

として，対立仮説 H_i^A の検出力を

$$PT \equiv \frac{1}{rep} \sum_{re=1}^{rep} NT_i(re)$$

とおいた．ただし，rep はシミュレーションの繰り返し回数であり, re は何回目の繰り返しかを表す．$k = 4, 5, n_0 = 5, 15, 30, \alpha = 0.05, rep = 100,000$ として，未知母数 μ_i を文献 [6] の

$$\mu_i(1) = 1 + ic_0,\ \mu_i(2) = 1 + i^2 c_0,$$
$$\mu_i(3) = 1 + \sqrt{i}\, c_0,\ \mu_i(4) = 1 + c_0 \log i$$

と設定し，$\hat{\sigma}_i(2)$, $\hat{\sigma}_i(3)$ の場合のシミュレーションを行った．このとき, 対立仮説 H_{k-1}^A の検出力が 0.7 に近くなるように定めた．表 7, 8 は $\hat{\sigma}_i(3), k = 5, \alpha = 0.05, n_0 = 30$ において, $\mu_i(1)$ と $\mu_i(4)$ の場合の結果である.

表 7 $\hat{\sigma}_i(3), k = 5, \alpha = 0.05, n_0 = 30, \mu_i(1)$.

対立仮説	Williams 型	線形型
H_2^A	0.1764	0.1513
H_3^A	0.4096	0.4211
H_4^A	0.6638	0.7087
H_5^A	0.8672	0.9064

表 8　$\hat{\sigma}_i(3), k=5, \alpha=0.05, n_0=30, \mu_i(4)$.

対立仮説	Williams 型	線形型
H_2^A	0.2726	0.1519
H_3^A	0.6420	0.5147
H_4^A	0.8540	0.7635
H_5^A	0.9596	0.8895

今回この要旨に全ての結果は載せていないが, $k=4$ の場合, 基本的には H_2^A の検出力は Williams 型の方が線形型の検出力より高くなること多かった．　また, H_3^A, H_4^A の検出力は, Williams 型よりも線形型の方が高くなっている場合が多いが, $\mu_i(4)$ のときは逆に Williams 型の方が高くなっていることが多かった. $k=5$ の場合は, H_2^A の検出力は Williams 型の方が線形型の検出力より高くなること多かった．また, H_3^A, H_4^A, H_5^A の検出力は, Williams 型よりも線形型の方が高くなっている場合が多かったが, $\mu_i(4)$ のときは逆に Williams 型の方が高くなっていることが多かった.

8　総対検出力の比較

繰り返し回数 $100,000$ 回のシミュレーションにより，各検定法の総対検出力の比較を行う．$i=2,\cdots,k$ において,

$$NTT_i(re) = \begin{cases} 1 & (\text{帰無仮説 } H_2,\cdots,H_k \text{ が棄却される場合}) \\ 0 & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

とすると，総対検出力は

$$APP \equiv \frac{1}{rep}\sum_{re=1}^{rep} NTT_i(re)$$

である．ただし, rep はシミュレーションの繰り返し回数であり, re は何回目の繰り返しかを表す．$k=4,5, n_0=5,15,30, \alpha=0.05$, 推定量を $\hat{\sigma}_i(2), \hat{\sigma}_i(3)$ として，7 章で設定した未知母数の場合のシミュレーションを行った. このとき, 総対検出力が約 0.5 になるように定めた．また, $k=4, \mu_1<\mu_2<\mu_3<\mu_4$と $k=5, \mu_1<\mu_2<\mu_3<\mu_4<\mu_5$ の場合は, 7 章の H_2^A の検出力と一致する．表 9〜11 は $\hat{\sigma}_i(3), k=5, \alpha=0.05, n_0=30$ において, $\mu_1=\mu_2<\mu_3<\mu_4<\mu_5$ と $\mu_1=\mu_2=\mu_3<\mu_4<\mu_5$ と $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4<\mu_5$ の場合の結果である.

表 9　$\mu_1=\mu_2<\mu_3<\mu_4<\mu_5$.

母数	Williams 型	線形型
$\mu_i(1)$	0.4816	0.5345
$\mu_i(2)$	0.5119	0.5244
$\mu_i(3)$	0.4546	0.5065
$\mu_i(4)$	0.4676	0.5213

表 10　$\mu_1=\mu_2=\mu_3<\mu_4<\mu_5$.

母数	Williams 型	線形型
$\mu_i(1)$	0.4715	0.5103
$\mu_i(2)$	0.5165	0.5422
$\mu_i(3)$	0.4736	0.5134
$\mu_i(4)$	0.4496	0.5375

表 11　$\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4<\mu_5$.

母数	Williams 型	線形型
$\mu_i(1)$	0.5150	0.4979
$\mu_i(2)$	0.5197	0.5051
$\mu_i(3)$	0.5347	0.4859
$\mu_i(4)$	0.5297	0.5297

今回この要旨に全ての結果は載せていないが, $k=4$ の場合でも $k=5$ の場合でも, 線形型の検出力が Williams 型の検出力よりも高くなることが多かった．しかし, 表 11 に示した $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4<\mu_5$ の場合においては, $\hat{\sigma}_i(2)$ の場合も $\hat{\sigma}_i(3)$ の場合も, 逆に Williams 型の検出力のほうが線形型よりも高くなることが多かった.

9　おわりに

本研究では，線形型の多重比較法と Wiliams 型の多重比較法を提案した．そして, 線形型の多重比較法においては, それを地震の解析に役立てることができた．さらに, 線形型の多重比較法の検出力が Williams 型の多重比較法の検出力よりも高くなることが多いことがシミュレーションによって分かった.

参考文献

[1] Williams, D.A. (1971). Atest for differences between treatment means when several dose levels are compared with a zero dose control.
: *Biometrics*, **27**, 103-117.

[2] Williams, D.A. (1972). The comparison of several dose levels are compared with a zero dose control.
: *Biometrics*, **28**, 519-531.

[3] 松島七海，光田卓矢：『多標本ポアソンモデルにおける順序制約がある場合の線形型検定法』.
南山大学情報理工学部情報システム数理学科卒業論文, 2016.

[4] Taka-aki Shiraishi.
MULTIPLE COMPARISON PROCEDURES FOR POISSON PARAMETERS IN MULTI-SAMPLE MODELS.
: Behaviormetrika vol.39, No.2, 2012, 167-182.

[5] 白石高章・杉浦洋：『多重比較法の理論と数値計算』.
共立出版, 東京, 2018.

[6] 野澤慎：『多群ポアソンモデルにおける順序制約がある場合のすべての母数相違に対する多重比較法』.
南山大学理工学研究科システム数理専攻修士論文, 2017.