n-同値関係をもとにした逆命題の考察

M2017SS005 坂口晃輔
指導教員:佐々木克巳

1 はじめに

本研究の目的は，証明のフローチャートに現れる条件の関係をn-同値関係により整理し，それをもとに逆命題を考察することである．この研究には次の 2 つの特徴がある．(1) 逆命題の仮定・結論として選ばれる条件の候補は，もとの命題の仮定・結論だけでなく，フローチャートに現れるすべての条件とする．(2) フローチャートの各導出関係に対して，n-同値関係が成り立つか，すなわち，どの 1 つの前件に対しても，それと後件と入れかえた命題が成り立つかがわかる図式(n-同値関係の図式という)を導入し，この図式をもとに逆命題を考察する．(1)の候補は，先行研究(久間・佐々木[1]，庄司[2]，藤城・佐々木[3])では，もとの命題の仮定・結論に注目して抽出されており，(1)のように候補を増やすことにより，より広い意味での逆命題を考察できる．また，(2)により，逆命題の真偽を効率的に判断できる．したがって，この研究は，類似の問題や発展的な問題の作成などの数学教育への応用が期待できる．

本研究では，n-同値関係の図式を導入し，間宮[4]から抽出した 6 つの証明問題に対して上の(1),(2)のように，逆命題を考察した．本稿では，2 節で n-同値関係の図式を導入し，3 節と 4 節で，その図式を用いて，具体的な問題の逆命題を考察する．

2 n−同値関係とその図式

この節では，1 節の(1)，(2)のように逆命題を考察するために必要な n-同値関係の図式を導入する．最初に，「n-同値関係」を定義し，それに対応する図式を定める．

定義 2.1. n 個の条件が n-同値であるとは，n 個の条件からどの 1 個の条件を選択しても残りの n-1 個の条件から最初に選択した 1 個の条件が導かれることである．

系 2.2. 2 条件 P,Q に対して

P と Q が 2-同値である⇔P と Q は同値である．

定義 2.3. 2 条件 P，Q が 2-同値であるとき，P↔Q と表現する．4 条件 P1，P2，P3，P4 が 4-同値であるとき，図 1 のように表現する．同様に，n 個(n≧3)の条件が n-同値であるとき，図 1 の□の中の数と□からでる枝の数を変えた図で表現する．□の中の数を省略する場合もある．

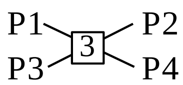


図 1:4-同値関係の図式

次に，n-同値関係の図式を導入する．この図式は，証明のフローチャートをもとに定義されるが，もとになるフローチャートの仮定は，もとの命題の前提のうち，逆命題を作る際に入れかえの対象になるものだけを明記する．それ以外の前提は，本研究では，「大前提」とよび「仮定」とは区別する．また，三角形の合同を示す条件は，三角形のそれぞれの長さ(必要に応じて向きも)，角度におきかえて考える．

定義 2.4. ある証明のフローチャートを次の手順で変換した結果を，その証明(またはフローチャート)の n-同値関係の図式という．

Step 1. 各矢印のすべての始点と終点の条件が n-同値(n は始点の個数+1)であれば，その矢印を定義 2.3 の表現に置きかえる．また，n より小さい k で k-同値であればそのことがわかる表現におきかえる．

Step 2. P1，…，Pn から Q への矢印に対し，P1，…，Pn，Q が n+1-同値でないときで，Pi を終点とする矢印の始点 R1，…，Rkと最初の矢印の始点(Pi を除く)とQの n+k 個の条件に n+k-同値関係が成り立てば，図式から Pi を除き，新しい矢印をその n+k-同値関係の図に置きかえる(図 2 参照)．n+k-同値も成り立たなければ，成り立つよう大前提を強くすることを考える．

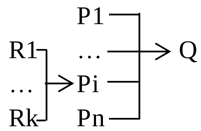


図 2:Step 2 のフローチャート

Step 3. もとの命題に対して，別のフローチャートの証明があるときは，それに対応する矢印も追記して，Step1 に戻る．

Step 4. 図式が単純になるよう調整する．

例 2.5(step 2 の例). 定義 2.5 の step2 では，図 3 で P1，P2，Q が 3-同値でないとき，図 4 か図 5 のどちらかの 4-同値関係が成り立つとき，図 3 を，図 4 か図 5 の成り立つ方に置きかえる．

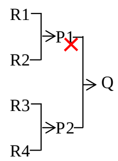


図 3:3-同値でない図式

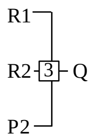


図 4:4-同値関係の図式(1)

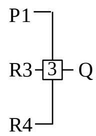


図 5:4-同値関係の図式(2)

なお，定義 2.4 の変換では，n-同値関係の成立・不成立を明確にするだけでなく，考察の対象とする条件の絞り込みも行っている．

3 具体例 1

この節では，[4]より抽出した問題 1 に対して第 2 節で導入した n-同値関係の図式を作成し，逆命題を考察した例を示す．

問題 1 図のように，AB=AC の二等辺三角形 ABC があ

り, 辺 AB 上に, 2 点 A, B と異なる点 D をとる. 辺 BA の延長上に, BD=AF となる F をとる. 点 F から, 辺 BC に垂線を引き, 辺 BC との交点を H とする. 線分 FH と辺 AC との交点を I とするとき, AD=IC であることを証明しなさい.

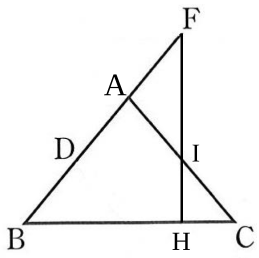


図 6:問題 1 の図

まず, この証明問題の大前提, 仮定, 結論を整理する. ここでは長さ, 角度, 向きに関する前提を仮定, すなわち入れかえの対象とする. 整理した結果は以下のとおりである.

大前提

M1. △ABC がある

M2. 点 D, 点 F は直線 AB 上にある

M3. 点 H は直線 BC 上にある

M4. 点 I は直線 AC と直線 FH の交点である

仮定

A1. AB=AC

A2. BD=AF(BD と AF は向きも等しい)

A3. BC⊥FH

結論

G. AD=IC

すなわち, もとになる命題は A1,A2,A3→G となる. この命題の証明のフローチャートを図 7 に示す.

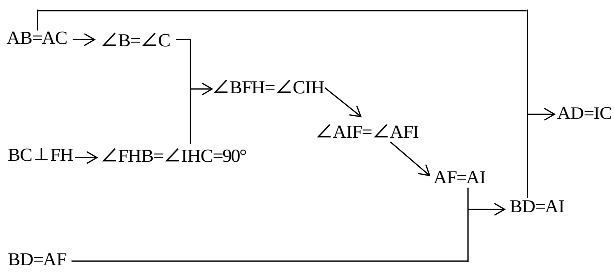


図 7:問題 1 のフローチャート

図 7 に現れた A1,A2,A3,G 以外の条件をそれぞれ次のようにおき, 定義 2.4 の各 step を行うと図 8 のようになる.

C1. ∠B=∠C

C2. ∠BFH＝∠CIH

C3. AIF=∠AFI

C4. AF=AI

C5. BD=AI

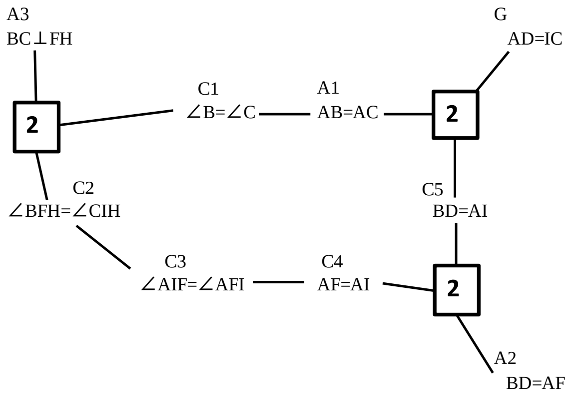


図 8:問題 1 の n-同値関係の図式

図 8 から逆命題を考える. 対象となる条件は, {A1,C1}, {A2},{A3},{C2,C3,C4},{C5},{G}の各集合から 1 つずつ選ぶ. 各集合の要素はどれも互いに同値なので, どれを選んでも本質的な違いはないからである. ここでは, A1,A2,A3,C2,C5,G を選ぶことにする. また, 考察の対象となる逆命題の仮定の個数は, もとの問題の仮定の個数と同じ, すなわち 3 個とする. したがって, 6 条件から 3 個の仮定と 1 個の結論を選んでできる逆命題を考える.

結果, 3 個の仮定が, 図 8 の葉の位置にある A2,A3,G である逆命題以外の逆命題は冗長なものを含む場合を除き, 図 8 の図式の線分をたどることで成立することが分かる.

次に, 図 8 より逆命題の問題文を与える. 本稿では A2, C4, G→A3 の日本語表現を与える.

線分 AB 上に, A, B と異なる点 D をとり, 線分 BA の延長線上に BD＝AF となる点 F をとる. 直線 AB 上にない点 I を AF=AI となるようにとり, 線分 AI の延長線上に AD＝IC となる点 C をとる. 直線 FI と直線 BC との交点を H とするとき, BC⊥FH を証明しなさい.

4 具体例 2

この節では, [4]より抽出した 3 節とは別の問題に対して, 3 節と同様に考察する.

問題 2 図 9 のような△ABC において, ∠CBA の大きさは∠ACB の大きさの 2 倍である. ∠ABC の二等分線に頂点 A から垂線を引き, 交点を D とすると, AC=2BD となることを証明しなさい.

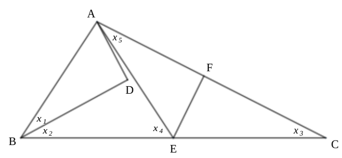


図 9:問題 2 の図

[4]で紹介されている証明では,『辺 BC 上に AB=AE となるような点 E をとり, 点 E から辺 AC に垂線を引き, その交点を F とする. 』のように 2 点 E, F をとり, これを用いている. よって, 本稿は, この E, F の条件も仮定に加えて考えることにする.

この問題の条件を問題 1 と同様に整理すると次のようになる．ただし∠DBA=x_1，∠CBD=x_2，∠ACB=x_3，∠AEB=x_4，∠EAC=x_5 である．

大前提

M1． △ABC がある

M2． 点 E は辺 BC 上にある

M3． 点 F は辺 AC 上にある

仮定

A1． $x_1 + x_2 = 2\,x_3$

A2． $x_1 = x_2$

A3． ∠D=90°

A4． AB=AE

A5． EF⊥AC

結論

G． AC=2BD

すなわち，もとになる命題は A1,A2,A3,A4,A5→G となる．この命題の証明のフローチャートを図 10 に示す．

図 10 に現れた A1,A2,A3,A4,A5,G 以外の条件のいくつかを次のようにおく．

C1． $x_2 = x_3$

C2． $x_1 = x_3$

C3． $x_3 = x_5$

C4． $x_1 = x_5$

C5． AB=EC

C6． FC=FA

C7． BD=AF

C8． BD=CF

上記以外で，図 10 に現れている条件は，次のようにすでに記号が用意されている条件と同値なので，これ以降は，その記号が用意されている条件が代表すると考える．

$x_1 + x_2 = x_4$ ⇔ A4

∠EFC=∠EFA=90° ⇔ A5

EC=EA ⇔ C3

AC=2AF ⇔ AC=2CF ⇔ C6

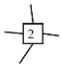
図 10 に対し定義 2.4 の各 step を行うと図 11 のような n-同値関係の図式となる．この図における  は，枝の先にある 4 条件からどの 2 条件を選んでも残り 2 条件が導かれることを表している．つまり，どの 3 条件を選んでも 3-同値であるということである．

図 11 より逆命題を考える．対象となる条件は A1,A2,A3,A4,A5,C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8,G の 14 個である．もとの命題は A1,A2,A3,A4,A5→G であるので，対象となる 14 条件から 5 個の仮定と 1 個の結論を選んでできる逆命題を考える．図 11 の図式を左側のグループ(A1,A2,A4,C1,C2,C3,C4,C5) と右側のグループ(A3,A5,C6,C7,C8,G)に分けて考えることにする．結果，下記の 5 個の条件を選ぶとその 5 個以外のすべての条件を導くことができる．ただし，( ) ，{ }についてはそれぞれ( )内の条件から任意に 1 個を，{ }内の条件から任意に 2 個選ぶとする．*が含まれる組み合わせは図 11 の線分をたどることができないが，同一法により示すことができる．

(1) 左から 1 個，右から 4 個を選ぶ場合

左(A1,A4,C2,C4,C5)

右 A3,A5,{G,C6,C7,C8}

右はこの組み合わせ以外冗長となる．

(2) 左から 2 個，右から 3 個を選ぶ場合

左 A4,C4

右 A3,{G,A5,C6,C7,C8}

左 C2,C5

右 A3,{G,A5,C6,C7,C8}

左 C3,(A1,A4,C2,C4,C5)

右 A3,{G,A5,C6,C7,C8}

左（(3)において左に C3 が含まれている組み合わせから C3 を除いたもの）

右 A5,{C6,C7,C8,G}

左（(3)において左に C3 が含まれている組み合わせから C3 を除いたもの）

右 A3,A5,C6

左(A4, C4), (A1, C2, C3, C5, A2*)

右 A3, A5, C7

左{A1, A4, C3}

右 A3, A5, (C7, C8, G)

左(C2,C5),(A4,C3,C4,A1*,A2*,C1*)

右 A3,A5,C8

左 C3,C4

右 A3,A5,(C7,C8,G)

(3) 左から 3 個，右から 2 個を選ぶ場合

右から 2 個選ぶ組み合わせは次のうちの A3,G の組み合わせ以外である．

{A3,A5,C6,C7,C8,G}

左から 3 個選ぶ組み合わせは以下のとおりである．

A1,A2,(A4,C3,C4,C5*)

A1,A4,(C1,C2,C4,C5*)

A1,C3,(C1,C2)

A1,C4,(C1,C2,C3,C5*)

A2,A4,(C1,C2,C3,C4,C5)

A2,C3,(C1,C2,C5)

A2,C4,(C1,C2,C3,C5*)

A4,C1,(C2,C5)
A4,C2,C5
A4,C3,(C1,C2)
A4,C4,(C2,C3,C5)
C1,C3,(C2,C4,C5)
C1,C4,(C2,C5)
C2,C3,C5
C2,C4,C5
C3,C4,C5

以上の組み合わせの 5 個の条件を選ぶことで残りの 9 条件すべて導かれ, 上記の組み合わせの通り, 逆命題ができる. 具体的な日本語表現は, 割愛する.

参考文献

[1] 久間一輝, 佐々木克已,「フローチャートを用いた逆命題の作成と問題づくり」, 数理解析研究所講究録 2083, RIMS 共同研究(公開型), 証明論と証明活動, 京都大学数理解析研究所, pp.61-75, 2018.

[2] 庄司貞夫,「中等教育数学科における図形の論証指導に関する研究」, 第 41 回数学教育論文発表会論文集, 日本数学教育学会, pp.531-536, 2008.

[3] 藤城佳高, 佐々木克已,「成立しない逆命題から成立する同値命題を作る考え方とその考察」, アカデミア理工学編, 南山大学紀要, 16, 南山大学, pp.7-15, 2016.

[4] 間宮勝己, 山腰政喜,『最高水準特進問題集 数学中学 2 年』, 文英堂, 東京, 2012.

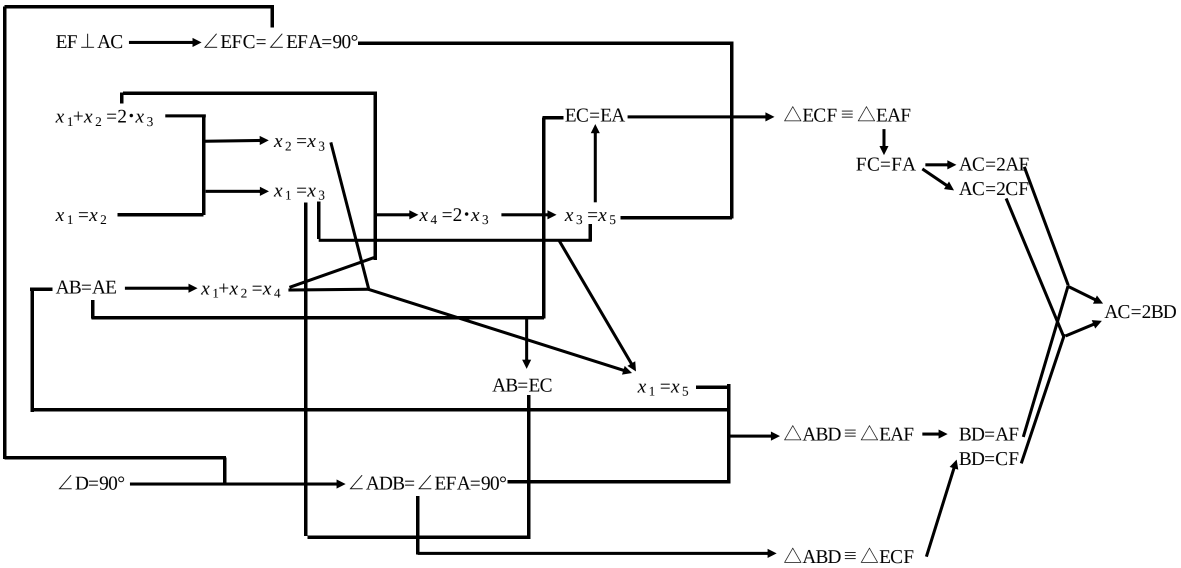


図 10:問題 2 のフローチャート

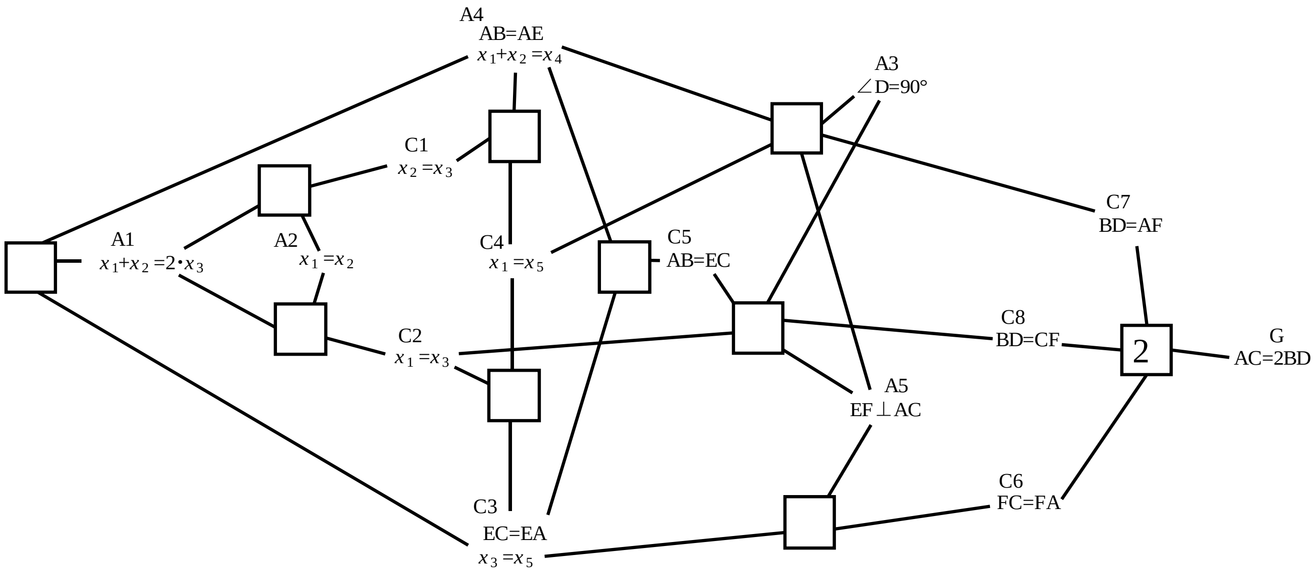


図 11:問題 2 の n-同値関係の図式