メネラウスの定理の証明における多様な見方・考え方の考察

M2017SS001 東恩納 慎

指導教員 佐々木 克巳

1 はじめに

本研究の目的は，メネラウスの定理の証明における多様な見方・考え方を考察し，数学教育における教材開発に活かすことである．

証明の多様な見方・考え方を考察する意義は，例えば，相馬[1]では，1 つの問題に対する，生徒の多様な見方・考え方の例を挙げ，その多様な見方・考え方を取り上げることには，次のようなメリットがあると述べている．

・学習意欲を喚起することにつながる．

・問題解決能力を養うことにつながる．

また，中込[2]では，「既習事項を関係付けて自分なりの解法を見出していくのが数学の学習である」という創造的な活動と関連付けて，児童生徒に次のことを実感させることのできる教材を開発する必要性を述べている．

・多様な解法の存在が確認できる教材

・多様な解法を見出すための数学的手法が獲得できる教材

メネラウスの定理の証明は，中込[2]でも扱われているが，本研究では，さらに多様な見方・考え方を考察する．より具体的には，中込[2]で扱われた一般的な証明より，さらに一般的な証明を挙げ，知られている証明がそこからどのように特殊化されるかを明記すること，その一般的な証明から別の見方・考え方の証明が見い出せることを示す．本稿では，2 節で本稿で扱うメネラウスの定理を具体的に記述し，前提として用いる性質を明らかにする．3 節で中込[2]の概要を示す．4 節で一般性の高い証明を示し，その特殊化により，中込[2]とは別の見方・考え方を考察する．

2 準備

この節では，本稿で扱うメネラウスの定理を具体的に記述し，前提として用いる性質を明らかにする．

本稿で扱うメネラウスの定理は以下のとおりである．この定理に現れる記号は 3 節以降でもその意味で用いる．

【メネラウスの定理】 △ABC の辺 BC の延長線，辺 CA，辺 AB が，△ABC の頂点を通らない直線とそれぞれ点 P，Q，R で交わるとき

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

となる（図 1 参照）．

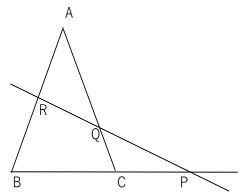

図 1:メネラウスの定理

また，本研究では，次の性質 2.1 と性質 2.2 を前提として用いる．

性質 2.1(平行線と線分の比の性質)．平行な 2 直線 m，n と，m 上にない点 O で交わる 2 直線 k，ℓ がある．k は m，n とそれぞれ，点 A,点 B で交わり，ℓ は m，n とそれぞれ，点 C，点 D で交わる．このとき，以下が成り立つ

(1) OA:OB=OC:OD

(2) OA:OC=AB:CD

性質 2.2(平行線と線分の比の性質)．平行な 3 直線 ℓ,m,n と点 O で交わる 2 直線 j，k がある．j は ℓ,m,n とそれぞれ，点 A，点 B，点 C で交わり，k は ℓ,m,n とそれぞれ，点 D，点 E，点 F で交わる．このとき以下が成り立つ．

(1) AB:AC=DE:DF

(2) AB:BC=DE:EF

3 先行研究の概要

この節では,中込[2]の概要を示す．中込[2]では，メネラウスの定理の証明を次の 3 つの種類に分け，一般化・特殊化を考察している．

(1)面積を用いるもの

(2)A，B，C の各頂点を通る補助線を，その 3 本の補助線が平行で，直線 PR と交わるように引き，それらを用いるもの

(3)直線 PR に平行な補助線を何本か引き，それを用いるもの

本研究の対象は，このうちの(3)である．中込[2]で，(3)の証明

として紹介されているのは，後述する図 15 における証明 1〜証明 7 で，そのうちの証明 4 と証明 7 が一般的な証明として紹介されている．

4 多様な見方･考え方の考察

この節では，前節の(3)のなかで一般性の高い証明を示し，その特殊化により，中込[2]とは別の見方･考え方を考察する．4.1 節で一般性の高い証明を示し，4.2 節で特殊化の方法と，その方法を適用した結果を述べ，4.3 節では，4.2 節の証明と中込[2]の証明との比較から，中込[2]とは別の見方･考え方を考察する．

4.1 一般性の高い証明

この節では，直線 PR に平行な補助線を何本か引き，それを用いる証明で一般性の高い証明を示す．その証明は 3 つあり，具体的には以下の証明 9，証明 10，証明 11 である．ただし，証明 10，証明 11 は，証明 9 の数式の部分のみを変えて得られるので，その変えた数式の部分のみを示す．

【証明 9】直線 PR と平行でない直線 ℓ と，直線 PR と平行な(一致しない)直線ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3を任意にとる．ℓ_1と ℓ，直線 CA，直線 AB との交点をそれぞれ S, X, W，ℓ_2と ℓ，直線 CA，直線 BC との交点をそれぞれ U, N, O，ℓ_3と ℓ，直線 BC，直線 AB との交点をそれぞれ T, Y, Z，直線 PR と ℓ の交点を V とすると，

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\left(\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PY}}\cdot\frac{\mathrm{PY}}{\mathrm{PC}}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QN}}\cdot\frac{\mathrm{QN}}{\mathrm{QA}}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{WR}}\cdot\frac{\mathrm{WR}}{\mathrm{RB}}\right)$$

$$=\left(\frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{RZ}}\cdot\frac{\mathrm{PY}}{\mathrm{PC}}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{PO}}\cdot\frac{\mathrm{QN}}{\mathrm{QA}}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{QX}}\cdot\frac{\mathrm{WR}}{\mathrm{RB}}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{PY}}{\mathrm{PO}}\cdot\frac{\mathrm{QN}}{\mathrm{QX}}\cdot\frac{\mathrm{WR}}{\mathrm{RZ}}=\frac{\mathrm{TV}}{\mathrm{UV}}\cdot\frac{\mathrm{UV}}{\mathrm{VS}}\cdot\frac{\mathrm{VS}}{\mathrm{TV}}=1$$

となる(図 2 参照)．

【証明 10】

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\left(\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PO}}\cdot\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{PC}}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QX}}\cdot\frac{\mathrm{QX}}{\mathrm{QA}}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RZ}}\cdot\frac{\mathrm{RZ}}{\mathrm{RB}}\right)$$

$$=\left(\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PO}}\cdot\frac{\mathrm{QN}}{\mathrm{CQ}}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QX}}\cdot\frac{\mathrm{WR}}{\mathrm{AR}}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RZ}}\cdot\frac{\mathrm{PY}}{\mathrm{BP}}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{PY}}{\mathrm{PO}}\cdot\frac{\mathrm{QN}}{\mathrm{QX}}\cdot\frac{\mathrm{WR}}{\mathrm{RZ}}=\frac{\mathrm{TV}}{\mathrm{UV}}\cdot\frac{\mathrm{UV}}{\mathrm{VS}}\cdot\frac{\mathrm{VS}}{\mathrm{TV}}=1$$

【証明 11】

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\mathrm{PY}}{\mathrm{PO}}\cdot\frac{\mathrm{QN}}{\mathrm{QX}}\cdot\frac{\mathrm{WR}}{\mathrm{RZ}}=\frac{\mathrm{TV}}{\mathrm{UV}}\cdot\frac{\mathrm{UV}}{\mathrm{VS}}\cdot\frac{\mathrm{VS}}{\mathrm{TV}}=1$$

ここで，証明 9 は

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PY}}\to\frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{RZ}},\ \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QN}}\to\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{PO}},\ \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{WR}}\to\frac{\mathrm{QA}}{\mathrm{QX}}$$

のように辺の比を変えて証明しているのに対し，証明 10 は

$$\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{PC}}\to\frac{\mathrm{QN}}{\mathrm{CQ}},\ \frac{\mathrm{QX}}{\mathrm{QA}}\to\frac{\mathrm{WR}}{\mathrm{AR}},\ \frac{\mathrm{RZ}}{\mathrm{RB}}\to\frac{\mathrm{PY}}{\mathrm{BP}}$$

のように辺の比を変えて証明している．つまり，証明 9 と証明 10 は逆の手順を辿って証明していることがわかる．また，証明 9 と証明 10 が性質 2.1 の(1)を用いているのに対し，証明 11 は性質 2.1 の(2)を用いている．この(2)は中学校数学の教科書では紹介されていないが，それを用いることで，証明 9，証明 10 より単純になっている．

証明 9 と証明 10 は手順が逆の関係，証明 11 は性質 2.1 の(2)を用いて証明 9 を単純化した形なので，3 つの証明は本質的に同じである．したがって，これ以後は，これらを同一視し，証明 11 に統一する．

4.2 特殊化

この節では，証明 11 の特殊化の方法を考察し，その方法を適用した結果を示す．その方法は，具体的には，4 つの補助線の位置を次の特別な位置に限定することである．

(i)ℓ が AB に一致する場合：証明 11 における(T, V, S)を(Z, R, W)とできるので，第 2 式の 3 番目の分数が第 3 式の 3 番目の分数と一致する．つまり，第 2 式から第 3 式への変形の手間が 1 つ減る．

(ii)ℓ が BC または CA に一致する場合：(i)と同様である．

(iii)ℓ が AP に一致する場合：証明 11 における V を P とできるが，証明は単純化できない．

(iv)ℓ が BQ または CR に一致する場合：(iii)と同様である．

(v)ℓ_1が A を通る場合：証明 11 における(X, W)を(A, A)とできるので，第 1 式の 2 番目の分母と 3 番目の分子が第 2 式の 2 番目の分母と 3 番目の分子と一致する．つまり，第 1 式から第 2 式への変形の手間が 1 つ減る．

(vi)ℓ_2が C を通るかℓ_3が B を通る場合：(v)と同様である．

(vii)$\ell_1=\ell_2$の場合：証明 11 における(N, U)を(X, S)とできるので，第 2 式の真ん中の分数の分子分母が一致して第 3 式の真ん中の分数が消える．

(viii)$\ell_2=\ell_3$または$\ell_3=\ell_1$の場合：(v)と同様である．

(ix)$\ell_1=\ell_2=\ell_3$の場合：(vii)と(viii)を踏まえると証明 11 にお

ける第 2 式の 3 つの分数は，どれも分子分母が一致し，第 3 式は不要となる．証明から S，T，U，V が消えるので，ℓ は不要となる．

単純になるのは，(i),(ii),(v),(vi),(vii),(viii),(ix)の場合であり，これらを考察の対象とする．(iii),(iv)の場合は単純にはならないが，中込[2]で扱っているので，これらの場合も考察の対象とする．

次に，上の方法による特殊化の結果を示す．具体的には，図 15 に示す．図 15 に現れる具体的な証明で扱う図のいくつかを抽出して図 3～図 14 に示す．

4.3 先行研究との比較

この節では，4.2 節の証明と中込[2]の証明との比較から中込[2]とは別の見方・考え方を考察する．

中込[2]の証明（証明 1～証明 7）は，すべて図 15 に現れており，本研究で示した証明 11（証明 9，証明 10）は中込[2]よりも一般的な証明といえる．

また，中込[2]では，証明 7 も証明 1，証明 2，証明 3 の一般化として紹介されているが，図 15 から，証明 7 は厳密には証明 2 や証明 3 の一般化ではないとわかる．厳密には証明 2 の一般化は証明 27，証明 3 の一般化は証明 20 である．証明 20 と証明 27 で用いた図は証明 7（証明 13）と同じであるが，ℓ の解釈が異なっている．ただし，補助線の引き方のみに注目した場合は証明 7（の補助線の引き方）は，証明 2 や証明 3（の補助線の引き方）の一般化になっている．

上で示した証明 13，証明 20，証明 27 のように，同じ図を使っていても異なる証明になる場合がある．そのような証明も図 15 から見つけることができる．たとえば，証明 14，証明 23，証明 29 は同じ図を用いている．

さらに，図 15 から中込[2]にはない見方・考え方を見い出すことができる．たとえば，$\ell_1=\ell_2=\ell_3$の場合の証明 18，証明 25，証明 32，ℓ＝BC の場合の証明 21， ℓ＝AP の場合の証明 39 などである．

参考文献

[1]相馬一彦，多様な見方や考え方と指導法，日本数学教育学会誌，Vol.43 No.3・4 pp.27-35，1992

[2]中込雄二，「多様な解法を引き出す数学教材の研究」，宮城学院女子大学発達科学研究，No.16，pp.13-22，2016

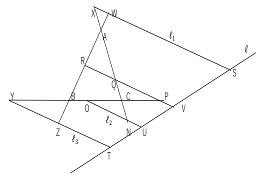

図 2:証明 11 の図

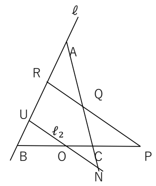

図 3:証明 13 の図

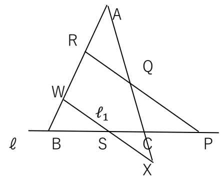

図 4:証明 20 の図

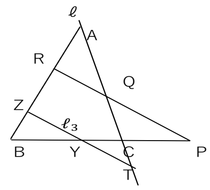

図 5:証明 27 の図

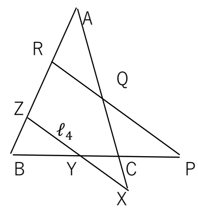

図 6:証明 57 の図

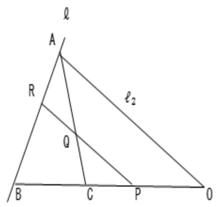

図 7:証明 14 の図

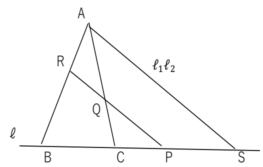

図 8:証明 23 の図

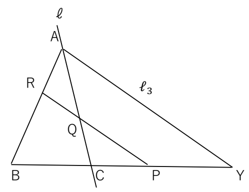

図 9:証明 29 の図

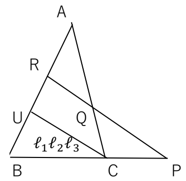

図 10:証明 18 の図

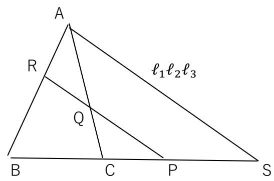

図 11:証明 25 の図

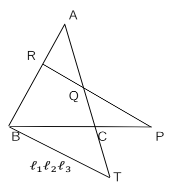

図 12:証明 32 の図

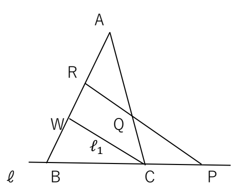

図 13:証明 21 の図

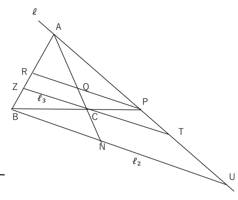

図 14:証明 39 の図

証明11	┬ ℓ_1がA, ℓ_2がC, ℓ_3がBを通る	証明4	┬ ℓ =AB	証明1		
	│		├ ℓ =BC	証明2		
	│		├ ℓ =CA	証明3		
	│		├ ℓ =AP	証明5		
	│		├ ℓ =BQ	証明6		
	│		└ ℓ =CR	証明8		
	├ ℓ =AB	証明12	┬ ℓ_1がA, ℓ_3がBを通る	証明13(証明7)	┬ ℓ_2がAを通る	証明14
	│		│		├ ℓ_2がBを通る	証明15
	│		│		└ ℓ_2がCを通る	証明1
	│		├ ℓ_1, ℓ_2がC, ℓ_3がBを通る	証明16		
	│		├ ℓ_1がA, ℓ_2, ℓ_3がCを通る	証明17		
	│		└ ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3がCを通る（ℓは不要）	証明18		
	├ ℓ =BC	証明19	┬ ℓ_2がC, ℓ_3がBを通る	証明20	┬ ℓ_1がCを通る	証明21
	│		│		├ ℓ_1がBを通る	証明22
	│		│		└ ℓ_1がAを通る	証明3
	│		├ ℓ_1, ℓ_2がA, ℓ_3がBを通る	証明23		
	│		├ ℓ_2がC, ℓ_1, ℓ_3がAを通る	証明24		
	│		└ ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3がAを通る（ℓは不要）	証明25		
	├ ℓ =CA	証明26	┬ ℓ_1がA, ℓ_2がCを通る	証明27	┬ ℓ_3がCを通る	証明28
	│		│		├ ℓ_3がAを通る	証明29
	│		│		└ ℓ_3がBを通る	証明2
	│		├ ℓ_1, ℓ_3がB, ℓ_2がCを通る	証明30		
	│		├ ℓ_1がA, ℓ_2, ℓ_3がBを通る	証明31		
	│		└ ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3がBを通る（ℓは不要）	証明32		
	├ ℓ =AP	証明33	┬ ℓ_1がA, ℓ_2, ℓ_3がBを通る	証明34		
	│		├ ℓ_1がA, ℓ_2, ℓ_3がCを通る	証明35		
	│		├ ℓ_1, ℓ_2がA, ℓ_3がBを通る	証明36		
	│		├ ℓ_1, ℓ_2がA, ℓ_3がCを通る	証明37		
	│		├ ℓ_1, ℓ_3がA, ℓ_2がBを通る	証明38		
	│		├ ℓ_1がA, ℓ_2がB, ℓ_3がCを通る	証明39		
	│		├ ℓ_1, ℓ_3がA, ℓ_2がCを通る	証明40		
	├ ℓ =BQ		└ ℓ_1がA, ℓ_2がC, ℓ_3がBを通る	証明6		
	│	証明41	┬ ℓ_1, ℓ_2がA, ℓ_3がBを通る	証明42		
	│		├ ℓ_1, ℓ_2がC, ℓ_3がBを通る	証明43		
	│		├ ℓ_1がA, ℓ_2, ℓ_3がBを通る	証明44		
	│		├ ℓ_1, ℓ_3がB, ℓ_2がAを通る	証明45		
	│		├ ℓ_1, ℓ_3がB, ℓ_2がCを通る	証明46		
	│		├ ℓ_1がC, ℓ_2がA, ℓ_3がBを通る	証明47		
	│		├ ℓ_1がC, ℓ_2, ℓ_3がBを通る	証明48		
	│		└ ℓ_1がA, ℓ_2がC, ℓ_3がBを通る	証明8		
	├ ℓ =CR	証明49	┬ ℓ_1, ℓ_3がA, ℓ_2がCを通る	証明50		
	│		├ ℓ_1, ℓ_3がB, ℓ_2がCを通る	証明51		
	│		├ ℓ_1がA, ℓ_2, ℓ_3がCを通る	証明52		
	│		├ ℓ_1がB, ℓ_2がC, ℓ_3がAを通る	証明53		
	│		├ ℓ_1がB, ℓ_2, ℓ_3がCを通る	証明54		
	│		├ ℓ_1, ℓ_2がC, ℓ_3がAを通る	証明55		
	│		├ ℓ_1, ℓ_2がC, ℓ_3がB通る	証明56		
	│		└ ℓ_1がA, ℓ_2がC, ℓ_3がBを通る	証明5		
	└ $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3$（ℓは不要）	証明57	┬ ℓ_4がCを通る	証明18		
			├ ℓ_4がAを通る	証明25		
			└ ℓ_4がBを通る	証明32		

図 15: 証明 11 の特殊化