

# 周期的な入力によるコントロールモーメントジャイロ스코ープの制御

M2017SC011 渡辺 悠介

指導教員：大石 泰章

## 1 はじめに

コントロールモーメントジャイロ스코ープ (Control Moment Gyroscope, CMG) は、人工衛星の姿勢制御に使われる装置である。CMG は回転するホイールの軸を傾けることによってジャイロトルクを発生させ、宇宙空間での姿勢制御を実現する。CMG は従来の姿勢制御装置であるリアクションホイールよりも強力なトルクを発生させることができ、国際宇宙ステーション (ISS) やアメリカのスカイラブなどの特に大型の宇宙船に搭載されている [1]。

本研究では地上で CMG のふるまいを模擬する実験機である、ECP 社製の CMG Model-750 を用いる。この CMG は図 1 のように 4 つの剛体で構成されており、そのうちの 2 つであるロータ 1 とジンバル 2 をモータによって駆動することにより、反作用とジャイロトルクを発生させ、モータがない残りの 2 つの剛体であるジンバル 3 とジンバル 4 を駆動する仕組みとなっている。従来はジンバル 3 を固定し、システムを簡略化してから制御系設計を行うことが多かった [2, 3]。これに対して文献 [4] では、ジンバル 3 を固定しない場合の制御を考えているが、そのアイデアはロータ 1、ジンバル 2、ジンバル 3 の 3 つの剛体の角速度を仮想的に入力とみなし、特にジンバル 2 とジンバル 3 の角速度を周期的に変化させることでホロノミーの原理を使うというものである。ここで角速度を変化させる際は、対応する角度の空間に閉軌道を考え、これに沿って角度が変化するように行う。しかし、実際には、駆動源はロータ 1 とジンバル 2 のみにあるにもかかわらず、文献 [4] ではロータ 1 の動きを無視し、ジンバル 2 とジンバル 3 をシステムの入力として扱っている。したがって、この方法には本質的な困難がある。

本研究では、文献 [4] とは異なり、ジンバル 3 の角速度を入力とせず、駆動源を持つロータ 1 とジンバル 2 の角速度を変化させることで駆動源のないジンバル 3 とジンバル 4 の姿勢制御を行うことを考える。具体的には、ロータ 1 とジンバル 2 の角速度を入力と見なして、制御を考える。しかし、文献 [4] と同様の入力を加えると、入力印加後にジンバル 3 とジンバル 4 が静止しない。そこで入力のもとになる閉軌道を修正することによってジンバル 3 とジンバル 4 が静止するようにする。この新しい入力を周期的に繰り返し適用することによって、ジンバル 4 の制御が可能である。ただし、この方法では、入力印加前にジンバル 3 の角度と角速度が零になっている必要がある。そこでロータ 1 とジンバル 3 の間の相互作用を活かし、ジンバル 3 の角度と角速度を零にしてから入力を印加することを考える。以上によりロータ 1、ジンバル 2、ジンバル 3、ジンバル 4 のすべてを制御することを考

える。

## 2 CMG

### 2.1 CMG の概略

図 1 に CMG の概略図を示す。CMG は入力トルク  $T_1$  [kg·m] によって回転するロータ 1 と入力トルク  $T_2$  [kg·m] によって回転するジンバル 2 および、駆動源のないジンバル 3 とジンバル 4 によって構成される。 $q_1$  はジンバル 2 から見たロータ 1 の相対角度を表し、 $q_2$  はジンバル 3 から見たジンバル 2 の相対角度を表し、 $q_3$  はジンバル 4 から見たジンバル 3 の相対角度を表し、 $q_4$  はジンバル 4 の角度を表す。ただし、図 1 のように各剛体が互いに垂直になっているとき  $q_i = 0$  であるものとする。また各剛体の角速度  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) を、 $\omega_i = \frac{dq_i}{dt}$  で定義する。入力トルク  $T_1, T_2$  に許容される値はそれぞれ  $-0.6 \leq T_1 \leq 0.6$ 、 $-2.4 \leq T_2 \leq 2.4$  である。

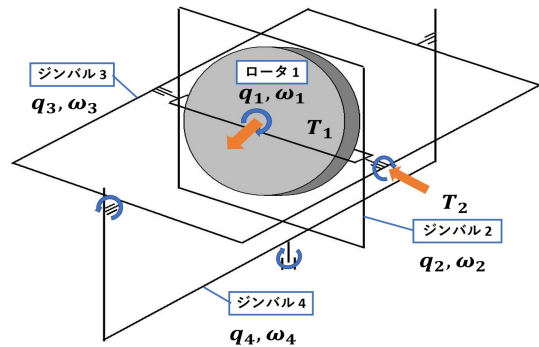


図 1 CMG の概略図

### 2.2 CMG の数学モデル

各剛体の運動方程式を導出するためのラグランジアン  $L$  は

$$L = \frac{1}{2}(K_4\omega_4^2 + I_3\omega_3^2 + I_3\omega_4^2 \sin^2 q_3 + K_3\omega_4^2 \cos^2 q_3 + (I_1 + I_2)(\omega_2 - \omega_4 \sin q_3)^2 + (J_1 + J_2)(\omega_3 \cos q_2 + \omega_4 \sin q_2 \cos q_3)^2 + (K_1 + K_2)(-\omega_3 \sin q_2 + \omega_4 \sin q_2 \cos q_3)^2 + J_1(\omega_1^2 + 2\omega_1(\omega_3 \cos q_2 + \omega_4 \sin q_2 \cos q_3))) \quad (1)$$

となる。ただし  $K_4, I_3$  などはロータやジンバルの主軸回りの慣性モーメントであり、その値を表 1 に示す。オイラー・ラグランジュの方程式  $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \omega_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = T_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) を用いて各剛体の運動方程式が導出できる。なお、 $T_3 = T_4 = 0$  である。ここでラグランジアン  $L$  は状態変数  $q_4$  を含まないので、 $\frac{\partial L}{\partial \omega_4}$  は時間によらず一定であ

表 1 各剛体の慣性モーメント [kg・m<sup>2</sup>]

ロータ 1			ジンバル 2		
$I_1$	$J_1$	$K_1$	$I_2$	$J_2$	$K_2$
0.0148	0.0273	0.0148	0.0092	0.023	0.022
ジンバル 3			ジンバル 4		
$I_3$	$J_3$	$K_3$	$K_4$		
0.0119	0.0178	0.0297	0.067		

り、特に初期状態においてジンバル 4 が停止しているとき、 $\frac{\partial L}{\partial \omega_4} = 0$  が成り立つ [2, 3, 4, 8]。これは、ジンバル 3 を固定しているときも成り立つ性質であり、以下これを角運動量保存則と呼ぶ。

### 3 制御戦略

本研究では CMG の姿勢制御問題として、初期時刻  $t = 0$  ではすべてのロータとジンバルが静止しており、特に  $q_1(0) = 0$ ,  $q_2(0) = 0$  であるものとして、任意の  $q_3(0)$ ,  $q_4(0)$  の値から、 $q_2(t)$ ,  $q_3(t)$ ,  $q_4(t)$  を零に収束させることを考える。なお、ロータ 1 の角度  $q_1(t)$  については、その値がいくつであろうとも CMG の見かけは変わらないのでその値の制御は考えず、ただ一定値になる（ロータ 1 が静止する）ことだけを要請することにする。手順は 2 段階で、まずジンバル 3 の角度と角速度を零にし、その後でジンバル 4 の角度と角速度を零にすることを考える。具体的には、ジンバル 3 を動かす制御はロータ 1 の角速度に正弦波の一部を加え、ジンバル 4 を動かす制御はロータ 1 とジンバル 2 の角速度にやはり正弦波の一部を入力する。

以下では、例として、ジンバルの初期状態は  $q_2(0) = 0$ ,  $q_3(0) = \pi$ ,  $q_4(0) = \pi$  であるとして、目標状態  $q_2(t) = 0$ ,  $q_3(t) = 0$ ,  $q_4(t) = 0$  にすることを考える。また、 $\omega_1$  と  $\omega_2$  は入力であり、その値が任意に指定できるものとするが、実際にはトルク  $T_1$ ,  $T_2$  を適切に定めることで  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  を目標値に制御しなくてはならない。本研究では、文献 [4] に従って PD 制御に基づいて  $T_1$ ,  $T_2$  を定める。詳細は省略する。

### 4 ジンバル 3 を動かすための制御

ここでは、ロータ 1 とジンバル 3 の間の相互作用を活かし、ジンバル 3 の角度と角速度を零にすることを考える。初期状態を  $q_1(0) = 0$ ,  $q_2(0) = 0$ ,  $q_3(0) = \pi$  とし、ロータ 1 の角速度  $\omega_1$  に正弦波の一部を加えることでジンバル 3 の角度と角速度を制御する。そこで、ロータ 1 の角速度を以下のように動かすことを考える：

$$\omega_1 = \pi r \sin \pi t \quad (0 \leq t < 1). \quad (2)$$

ただし  $r$  は任意の定数である。 $r = 1$  [rad/s] のとき、 $\omega_1$  と  $\omega_3$ ,  $q_1$  と  $q_3$  のふるまいは図 2, 図 3 のようになる。

図 2 から入力印加後の  $\omega_1$  と  $\omega_3$  は共に零となっていることがわかる。式 (2) の入力を印加後のジンバル 3 の変位を  $\Delta q_3$  とする。図 3 より  $r = 1$  のときの  $\Delta q_3$  は  $-0.802$  である。様々な  $r$  に対して、 $\Delta q_3$  を求めると図 4 のようになる。

ここから、目標値として  $\Delta q_3$  を決めれば、それに対応する  $r$  が決定でき、ジンバル 3 の角度を任意の値に制御で

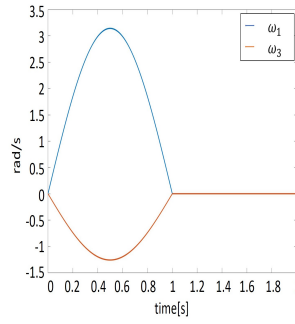


図 2  $\omega_1$  と  $\omega_3$  の変化

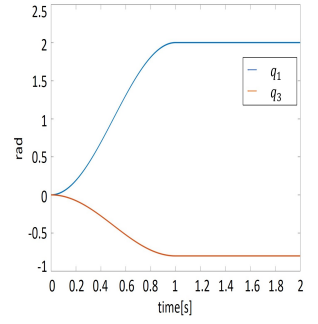


図 3  $q_1$  と  $q_3$  の変化

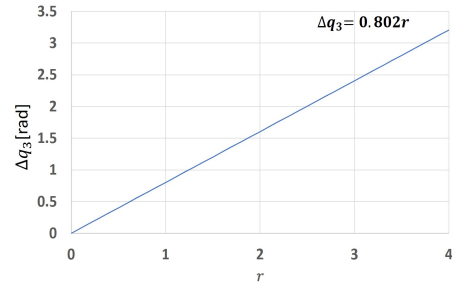


図 4 様々な  $r$  に対する  $\Delta q_3$

きる事がわかる。これはジンバル 2 の角度が  $q_2(t) = 0$  をみだし、トルクが  $T_2(t) = 0$  であるとき、ロータ 1 とジンバル 3 が駆動してもジンバル 2 とジンバル 4 は動かないことを利用している。また、図 4 の関係は、ジンバル 3 の初期角度がいくつであっても変わらない。

### 5 ジンバル 4 を動かすための制御

ここでは、4 章の次の段階として、周期入力を用いてジンバル 4 の角度と角速度を零にすることを考える。なお、4 章の操作によって変動したロータ 1 の角度  $q_1$  をあらためて零として扱うこととする。

#### 5.1 入力波形

角速度  $\omega_1$  と  $\omega_2$  を、対応する角度  $q_1$  と  $q_2$  が図 5 のような閉軌道に沿って動くように動かすことを考える。ただし閉軌道は原点を中心とし、各辺が  $q_1$  軸,  $q_2$  軸に平行な正方形であり、1 辺の長さを  $2R$  とする。

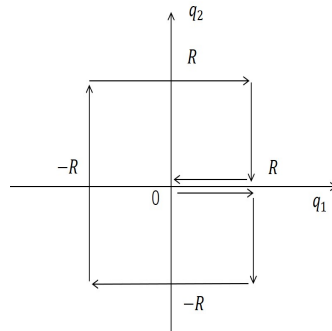


図 5  $q_1, q_2$  の閉軌道

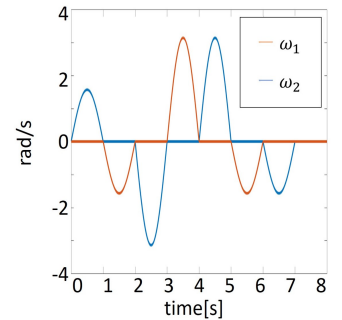


図 6 入力  $\omega_1, \omega_2$  の波形

具体的には、角速度  $\omega_1, \omega_2$  は適当な振幅と周波数の正弦波に沿って変化させる。すなわち、

$$(\omega_1, \omega_2) = \left(\pi \frac{R}{2} \sin \pi t, 0\right) \quad (0 \leq t < 1), \quad (3)$$

$$(\omega_1, \omega_2) = \left(0, \pi \frac{R}{2} \sin \pi t\right) \quad (1 \leq t < 2), \quad (4)$$

$$(\omega_1, \omega_2) = (-\pi R \sin \pi t, 0) \quad (2 \leq t < 3), \quad (5)$$

$$(\omega_1, \omega_2) = (0, -\pi R \sin \pi t) \quad (3 \leq t < 4), \quad (6)$$

$$(\omega_1, \omega_2) = (\pi R \sin \pi t, 0) \quad (4 \leq t < 5), \quad (7)$$

$$(\omega_1, \omega_2) = \left(0, \pi \frac{R}{2} \sin \pi t\right) \quad (5 \leq t < 6), \quad (8)$$

$$(\omega_1, \omega_2) = \left(-\pi \frac{R}{2} \sin \pi t, 0\right) \quad (6 \leq t < 7) \quad (9)$$

である。

図6の入力を加えたときの  $q_3, q_4$  のふるまいはそれぞれ図7, 8のようになる。図7, 8から、入力印加後の角

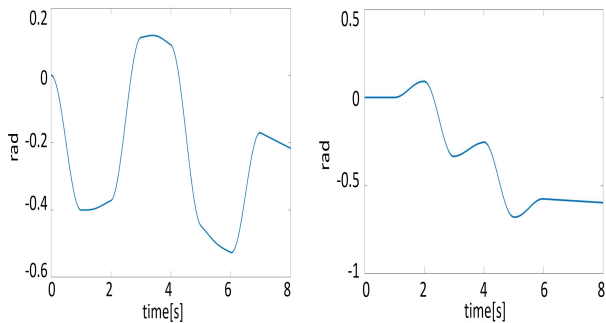


図7 式(3)～(9)の入力を加えたときの  $q_3$  の変化  
図8 式(3)～(9)の入力を加えたときの  $q_4$  の変化

速度  $\omega_3, \omega_4$  は零ではないことがわかる。この状態のままでは同じ入力を繰り返し印加しても期待するような効果は得られない。入力印加のたびに  $\omega_3, \omega_4$  は零になっている必要がある。そのための方法を次節で述べる。

## 5.2 入力波形の修正

図9のような、 $q_1$  軸に平行な辺の長さを  $2R$ 、 $q_2$  軸に平行な辺の長さを  $2xR$  とする長方形の閉軌道を考える。ただし、 $x$  はある正の数である。図9の閉軌道は  $x$  の値と

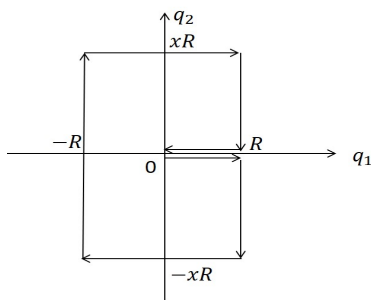


図9 修正した閉軌道

$R$  の値によって決まる。角速度  $\omega_1, \omega_2$  を式(4), (6), (8) の  $R$  を  $xR$  でおきかえることによって定めれば、角度  $q_1,$

$q_2$  は図9の閉軌道に沿って変化する。 $R = 1$  とし、 $x$  のみを変化させた結果、 $(x, R) = (1.185, 1)$  のときに入力印加後の角速度  $\omega_3, \omega_4$  がともに零となった。図10, 11はそのときの  $q_3, q_4$  のふるまいである。図10から、入力印加後の  $\omega_3$  が零となっているだけでなく、 $q_3$  も同時に零となっていることがわかる。

閉軌道を図9のように修正することで、なぜ入力印加後の  $\omega_3, \omega_4$  を零にできるかを考える。修正前の閉軌道によるジンバル3の角度  $q_3$  のふるまいである図7と修正後のふるまいである図10を比較する。両図の  $2 \leq t < 3$  に着目すると図7に比べて図10の方が  $q_3$  の変化が小さい。このように、 $q_2$  を一定にしたまま  $q_1$  のみを動かしたとき、そのときの  $q_2$  の値が大きくなるほど  $q_3$  の変化は小さくなると考えられる。したがって  $x$  をうまく選ぶことで、入力の間時刻である  $t = 3.5$  において  $q_3$  が零になるようにすることができる。このとき、 $t = 3.5$  を中心として入力は左右対称になり、閉軌道全体の入力印加後には  $q_3$  は零で一定となる。すなわち  $\omega_3 = 0$  となり、角運動量保存則から  $\omega_4$  も零となる。また図11から、入力印加後の  $\omega_4$  は零であり、印加前からの  $q_4$  の変位である  $\Delta q_4$  は  $-0.7428$  であることがわかる。

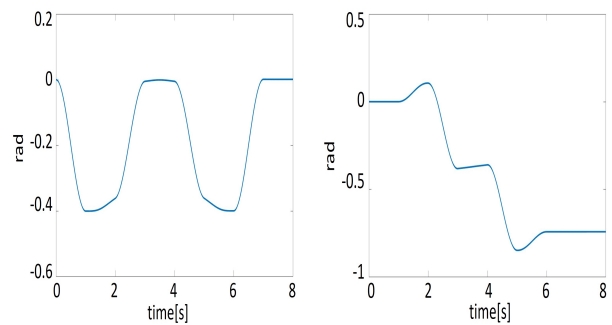


図10  $x = 1.185$  のときの  $q_3$  の変化  
図11  $x = 1.185$  のときの  $q_4$  の変化

$R = 1$  以外の  $R$  に対して、入力印加後に  $\omega_3$  と  $\omega_4$  が零になるような  $x$  の値を実験的に求める。結果を図12に示す。なお、いずれの場合も入力印加後の  $q_3$  の値は零になった。与えられた  $R$  に対して、 $x$  の値を図12に基づい

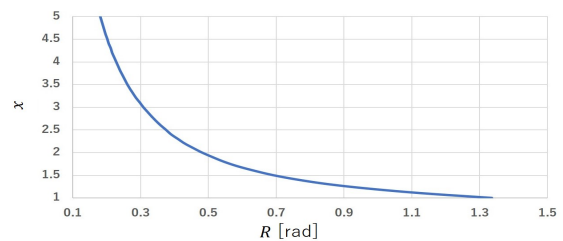


図12 入力印加後に  $\omega_3$  と  $\omega_4$  が零になるような比率  $x$  の値

て定め、対応する入力を加えるときの  $q_4$  の変位量  $\Delta q_4$  を図13に示す。図13から、 $R$  と  $\Delta q_4$  の関係は一意的であることがわかる。このことから、目標値として  $\Delta q_4$  を決

めれば、それに対応する閉軌道の形と大きさ  $(x, R)$  も決められることがわかる。次節ではこのことを使って、本節で考えた入力を繰り返し印加し、毎周期後に  $q_3, \omega_3, \omega_4$  を零に保ちながら、 $q_4$  を任意の位置へ制御することを考える。

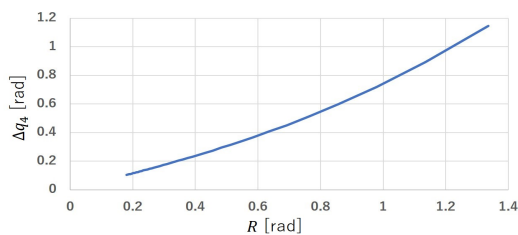


図 13 図 12 に従って比率  $x$  を定めた場合の  $q_4$  の変化量  $\Delta q_4$

### 5.3 ジンバル 4 の制御手法

ジンバルの初期状態を  $q_1(0) = 0, q_2(0) = 0, q_3(0) = 0, q_4(0) = \pi$  とし、また、すべての剛体は静止しているとするとき、角度  $q_3, q_4$  が零になるようにレギュレーションすることを考える。まず、 $\Delta q_4$  が十分大きくなるような  $\bar{R}$  を選び、その  $\bar{R}$  に対応する  $x$  を  $\bar{x}$ 、 $\Delta q_4$  を  $\overline{\Delta q_4}$  とする。次に  $\bar{R}, \bar{x}$  によって定められる入力を繰り返し適用する。そして、 $q_4 < \overline{\Delta q_4}$  になったとき、図 13 に基づき、現在の  $q_4$  の値に対応する  $R$  を求め、また  $x$  を図 12 から求め、導いた入力を最後に加える。

## 6 シミュレーション結果

各ジンバルの初期状態を  $q_1(0) = 0, q_2(0) = 0, q_3(0) = \pi, q_4(0) = \pi$  とする。まず、4章で述べた方法により、角度  $q_3$  を零にする。そして、5.3 節で述べた手法を適用する。このとき、最初に用いる閉軌道を  $(\bar{R}, \bar{x}) = (1, 1.185)$ 、 $\overline{\Delta q_4} = -0.7428[\text{rad}]$  と設定して、シミュレーションを実行した。

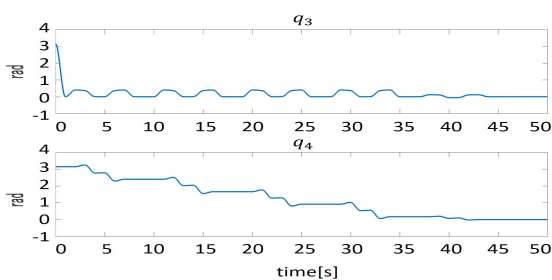


図 14 ジンバルの角度  $q_3, q_4$  の変化

図 14 に見るように、ジンバル 3 とジンバル 4 の角度を零に収束させることに成功した。また図 15 により、入力制限  $(-0.6 \leq T_1 \leq 0.6, -2.4 \leq T_2 \leq 2.4)$  を超えていないことがわかる。

## 7 おわりに

本研究では、ジンバル 3 を固定しない CMG に対して、ロータ 1 に対するトルクの反作用を用いてジンバル 3 の

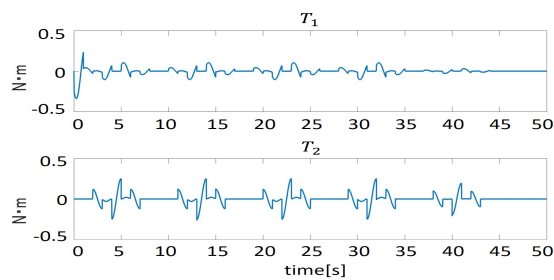


図 15 入力トルク  $T_1, T_2$

角度  $q_3$  を目標値零に収束させ、また同じ入力を繰り返し印加することでジンバル 3 の角度と角速度を零に保ち、ジンバル 4 の角度  $q_4$  を目標値零に収束させることに成功した。

現在の制御方法では、最後の閉軌道を決定する際、 $q_4$  が  $0.1[\text{rad}]$  以下になる場合、図 13 を使ったのでは対応できない。そのため、 $0.1[\text{rad}]$  以下の  $q_4$  に対応する制御手法が必要である。

## 参考文献

- [1] STS-114: 「コントロール・モーメント・ジャイロ (CMG)」。http://sts-114.jaxa.jp/mission/payload/cmng.html, 参照日 2018 年 9 月 13 日。
- [2] Jasper van de Loo: Control of a nonholonomic control moment gyroscope. *DCT Report*, Vol. 2006.053, Department of Mechanical Engineering, Technische Universiteit Eindhoven, The Netherlands, May 2006.
- [3] 佐野 椋一: 「時間軸状態制御形に基づく Control Moment Gyroscope の制御」。第 58 回システム制御情報学会研究発表講演会予稿集, pp. 342–346, 2014.
- [4] 佐野 椋一: 「閉軌道の繰り返しを用いた Control Moment Gyroscope の姿勢制御」。第 3 回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム, 2016.
- [5] Masato Ishikawa: Development and control experiment of the trident snake robot. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 15, No. 1, February 2010.
- [6] 石川 将人: 「三叉ヘビ型ロボットの推進原理と周期入力による制御」。計測自動制御学会論文集, Vol. 42, No. 5, pp. 520–528, 2006.
- [7] 芦田 正治・石川 将人: 「入力特性に制約を持つ非ホロノミックシステムの周期入力制御」。第 48 回自動制御連合講演会, 2005.
- [8] 石川 和男・坂本 登: 「コントロールモーメントジャイロの最適姿勢制御—中心安定多様体アプローチ—」。計測自動制御学会論文集, Vol. 50, No. 10, pp. 731–738, 2014.