非線形最適制御のための射撃法の改良と拡張

M2017SC006 中村拓登

指導教員：大石泰章

1　はじめに

Sakamoto–van der Schaft の安定多様体法 [1, 2] は山下–島の方法 [3] の発展であり，非線形最適制御における有望な方法である．この方法は様々な現実の非線形システムに適用され，有効であることがわかっている [4, 5, 6]．安定多様体法 [1, 2, 3] では制御則の計算を Hamilton 系の安定多様体の計算に帰着させる．安定多様体の計算では，Hamilton 系の微分方程式を逆時間で解く．この際，望ましい終端点までの軌道を生成するような初期点を与える必要があるが，そのための系統的な方法が Oishi–Sakamoto の射撃法 [7] である．すなわち，初期点に微小な摂動を加えたときの終端点の変化を Hamilton 系の線形近似によって求め，これをもとにして終端点が目標点に動くような初期点の摂動を求める．摂動を与えた初期点に対する終端点を再び Hamilton 系の微分方程式を逆時間で解くことによって求め，求めた終端点を目標点に動かすような初期点の摂動を再び線形近似によって求める．以上を繰り返すことで終端点が目標点と一致するような軌道を生成する．

本研究ではまず，射撃法を改良し，回転型倒立振子の振り上げ制御則を求めることについて述べる．射撃法によって繰り返し軌道を更新することで初期点が原点近傍から離れてしまうことがある．射撃法では，原点近傍で安定多様体が Riccati 方程式の正定値解を使って十分良く近似できているという性質を使っているので，初期点が原点近傍から離れてしまうのは問題である．そこで毎回の繰り返しにおいて初期点が一定値以上離れたら原点近傍に初期点を取り直すことについて述べる．

次に，射撃法を拡張し，非線形最適サーボの設計に応用することを考える．非線形最適サーボに対する安定多様体法の拡張については Sakamoto–Rehák の研究 [8] で述べられている．本研究ではこれに，射撃法を適用することを考える．また，具体例として，文献 [9] に基づいて，天体の周りを周回する主衛星の周りの周期軌道に，従衛星を追従させることを考え，線形最適制御では達成できないような性能を非線形最適制御によって実現する．

2　安定多様体法

n 次元の状態 $\boldsymbol{x}(t)$ と m 次元の入力 $\boldsymbol{u}(t)$ を持つ以下の非線形の制御対象を考える：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) + G(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{u}(t). \tag{1}$$

ただし，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ と $G(\boldsymbol{x})$ はそれぞれ n 次元のベクトルと n 行 m 列の行列を値とする滑らかな関数であるとし，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ とする．このとき，Q を n 次の半正定値行列，R を m 次の正定値行列として評価関数を以下のように定める：

$$\int_0^\infty \boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}} Q\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}(t)^{\mathrm{T}} R\boldsymbol{u}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

この評価関数 (2) を最小化するような入力，すなわち，最適入力 $\boldsymbol{u}(t)$ を得ることを考える．安定多様体法 [1, 2, 3] はこの問題を数値的に解くための方法である．以下の Hamilton 関数を考える：

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{4}\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}G(\boldsymbol{x})R^{-1}G(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Q\boldsymbol{x}. \tag{3}$$

ここで，$\boldsymbol{p}$ は随伴変数と呼ばれる．Hamilton 関数 (3) に対する Hamilton 系を考える：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{p}(t)), \tag{4}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{p}(t)). \tag{5}$$

式 (4)，(5) の解軌道 $(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{p}(t))$ のうち $t\to\infty$ で，$\boldsymbol{x}(t)\to\boldsymbol{0}, \boldsymbol{p}(t)\to\boldsymbol{0}$ となるようなものを集めてできる $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ の空間中の多様体を安定多様体という．安定多様体が関数 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ によって $\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) | \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\}$ のように書けるとき，最適入力 $\boldsymbol{u}(t)$ は以下のように求められる：

$$\boldsymbol{u}(t) = -\frac{1}{2}R^{-1}G(\boldsymbol{x}(t))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}(t)). \tag{6}$$

非線形の制御対象 (1) を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の周りで線形化したものを以下のように表す：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t). \tag{7}$$

評価関数 (2) の Q, R と線形システム (7) の A, B を用いて Riccati 方程式

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + Q = O \tag{8}$$

を考え，正定値解 P を求める（(A,B) が可制御で (Q,A) が可観測であれば正定値解 P がただ 1 つ存在する.）．このとき，平面 $\boldsymbol{p} = 2P\boldsymbol{x}$ は原点 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$ で安定多様体に接することが知られている．

安定多様体法 [1, 2, 3] では安定多様体上の原点近傍に初期点 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p}_0)$ を複数選び，これに対する Hamilton 系 (4)，(5) の軌道を Runge–Kutta 法を用いて逆時間で計算し，得られた軌道を補間して関数 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ を求める．

この方法の問題点は初期点を選択するのに試行錯誤をしなければならないということである．つまり，望ましい終端点を通る軌道を生成するための初期点の選択は簡単ではない．そこで次章では，射撃法を用いることで初期点を系統的に求めることについて述べる．

3　射撃法

射撃法とは，軌道が望ましい終端点を通るような適切な初期点を与えるための系統的な方法のひとつである [7]．まず，安定多様体上の原点近傍における初期点は Riccati 方

程式 (8) の正定値解 P を用いて，$(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{p}_0) = (\boldsymbol{x}_0, 2P\boldsymbol{x}_0)$ と近似できることに注意する．初期点 $(\boldsymbol{x}_0, 2P\boldsymbol{x}_0)$ から Runge–Kutta 法を用いて Hamilton 系 (4)，(5) を逆時間で計算し，得られる軌道の終端点を $(\boldsymbol{x}_\mathrm{f}, \boldsymbol{p}_\mathrm{f})$ とする．この軌道を更新して終端点の $\boldsymbol{x}$ 成分が目標点 $\boldsymbol{x}_*$ に一致するようにすることを考える．そのために，まず，初期点に $(\Delta\boldsymbol{x}_0, \Delta\boldsymbol{p}_0)$ だけ摂動を加えることを考える．そして，軌道上の各点に生じる摂動を求め，終端点の摂動の $\boldsymbol{x}$ 成分が $\boldsymbol{x}_* - \boldsymbol{x}_\mathrm{f}$ になるように初期点の摂動 $(\Delta\boldsymbol{x}_0, \Delta\boldsymbol{p}_0)$ を定めればよい．その際に加える摂動は微小であるため，$\Delta\boldsymbol{p}_0 = 2P\Delta\boldsymbol{x}_0$ と近似できる．加える摂動の動特性は以下のように書ける：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{x}\\ \Delta\boldsymbol{p}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial^2 H}{\partial\boldsymbol{p}\partial\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) & \frac{\partial^2 H}{\partial\boldsymbol{p}^2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\\ -\frac{\partial^2 H}{\partial\boldsymbol{x}^2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) & -\frac{\partial^2 H}{\partial\boldsymbol{x}\partial\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{x}\\ \Delta\boldsymbol{p}\end{bmatrix}. \quad (9)$$

$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ は Hamilton 関数 (3) である．これは，線形の微分方程式であり，終端点の摂動 $(\Delta\boldsymbol{x}_\mathrm{f}, \Delta\boldsymbol{p}_\mathrm{f})$ を初期点の摂動 $\Delta\boldsymbol{x}_0$ を用いて以下のように表すことができる：

$$\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{x}_\mathrm{f}\\ \Delta\boldsymbol{p}_\mathrm{f}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}U\\ V\end{bmatrix}\Delta\boldsymbol{x}_0.$$

U, V は上記の微分方程式 (9) を $\Delta\boldsymbol{x}$ の初期値を $[1\ 0\ 0\ \cdots\ 0]^\mathrm{T}, [0\ 1\ 0\ \cdots\ 0]^\mathrm{T}, \cdots, [0\ 0\ 0\ \cdots\ 1]^\mathrm{T}$ とし，$\Delta\boldsymbol{p}$ の初期値を $2P\Delta\boldsymbol{x}$ として解いて得られる行列である．行列 U を用いて $\boldsymbol{x}_* - \boldsymbol{x}_\mathrm{f} = U\Delta\boldsymbol{x}_0$ となるような $\Delta\boldsymbol{x}_0$ を求める．このようにして求めた $\Delta\boldsymbol{x}_0$ を用いて初期点を $(\boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x}_0, 2P(\boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x}_0))$ と更新し，Hamilton 系 (4)，(5) を逆時間で計算すればその終端点は目標点に十分近づく．もし，終端点と目標点が十分近くなければ更新された軌道の初期点に再び摂動を加えて，繰り返し初期点を更新する．

4　射撃法の改良と回転型倒立振子の制御

4.1　射撃法の改良

前章で述べた射撃法で，繰り返し初期点に摂動を加えることで初期点が原点から離れてしまうことがある．そこで本章では，初期点が原点から一定値以上離れた場合，初期点を取り直す方法について述べる [10]．まず，十分小さい正の数 ε を指定する．射撃法の過程で得られた初期点 $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{p}_0)$ に対し，$\varepsilon < \|\boldsymbol{x}_0\|$ のとき，線形化したシステムに対する最適制御を用いて初期点を原点近傍へと移動させる．具体的には，原点近傍の安定多様体上では Riccati 方程式 (8) の正定値解 P を用いて $\boldsymbol{p} = 2P\boldsymbol{x}$ と近似できることを用いて Hamilton 系の $\boldsymbol{x}$ に関する微分方程式 (4) を以下のように書く：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) - G(\boldsymbol{x}(t))R^{-1}G(\boldsymbol{x}(t))^\mathrm{T}P\boldsymbol{x}(t). \quad (10)$$

これは線形化システム (7) に対する最適制御則を元の非線形システム (1) に適用することに相当する．したがって，$\boldsymbol{x}$ が原点に十分近ければ式 (10) を順時間で計算したとき，原点に収束するはずである．

改良した射撃法を回転型倒立振子の振り上げ制御に適用し，さらに複数回振動の振り上げについても述べる．

4.2　回転型倒立振子の制御

回転型倒立振子に改良した射撃法を用いて振り上げ軌道を求める [11]．今回用いるモデルは Quanser 社の Qube-Servo2 である．アームの質量 $m_\mathrm{r} = 0.095\,\mathrm{kg}$，振子の質量 $m_\mathrm{p} = 0.024\,\mathrm{kg}$，アームの長さ $L_\mathrm{r} = 0.085\,\mathrm{m}$，振子の長さ $L_\mathrm{p} = 0.129\,\mathrm{m}$，アームの慣性モーメント $J_\mathrm{r} = \frac{1}{12}m_\mathrm{r}L_\mathrm{r}^2\,\mathrm{kg\cdot m^2}$，振子の慣性モーメント $J_\mathrm{p} = \frac{1}{12}m_\mathrm{p}L_\mathrm{p}^2\,\mathrm{kg\cdot m^2}$，モータの抵抗 $R_\mathrm{m} = 8.4\,\Omega$，トルク定数 $K_\mathrm{T} = 0.042\,\mathrm{N\cdot m/A}$，重力加速度 $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ である．状態変数はモータに取り付けられたアームの角度 ϕ とアームに取り付けられた振子の角度 θ，そしてそれらの時間微分である角速度 $\dot{\phi}, \dot{\theta}$ を用いて $\boldsymbol{x} = [\phi\ \ \theta\ \ \dot{\phi}\ \ \dot{\theta}]^\mathrm{T}$ とする．ただし，角度は $\theta = 0, \phi = 0$ が振子委が倒立した状態を表すように測るものとする．パラメータ J, K, L, M, N を以下のように置く：

$$\begin{aligned}
J &= J_\mathrm{r} + m_\mathrm{p}L_\mathrm{r}^2 + \frac{1}{4}m_\mathrm{p}L_\mathrm{p}^2\sin^2\theta,\\
K &= -\frac{1}{2}m_\mathrm{p}L_\mathrm{p}L_\mathrm{r}\cos\theta,\\
L &= J_\mathrm{p} + \frac{1}{4}m_\mathrm{p}L_\mathrm{p}^2,\\
M &= -\frac{1}{2}(L_\mathrm{p}\dot{\phi}\cos\theta + L_\mathrm{r}\dot{\theta})m_\mathrm{p}L_\mathrm{p}\dot{\theta}\sin\theta,\\
N &= \frac{1}{4}(L_\mathrm{p}\dot{\phi}^2\cos\theta + 2g)m_\mathrm{p}L_\mathrm{p}\sin\theta.
\end{aligned}$$

上記のパラメータを用いて回転型倒立振子のモデルを式 (1) の形で表すと以下のようになる：

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \begin{bmatrix}J & K\\ K & L\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}M - \frac{K_\mathrm{T}^2}{R_\mathrm{m}}\dot{\phi}\\ N\end{bmatrix}\end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$G(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \begin{bmatrix}J & K\\ K & L\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{K_\mathrm{T}}{R_\mathrm{m}}\\ 0\end{bmatrix}\end{bmatrix}. \quad (12)$$

評価関数 (2) の行列 Q, R を $Q = \mathrm{diag}(5, 0, 0, 0), R = 1$ とする. ここで，式 (11)，(12) を線形近似して式 (7) の形にしたとき，(Q, A) は可観測であることに注意する．

改良した射撃法を用いて倒立振子の振り上げ軌道を求める．最初の軌道の初期点を $\boldsymbol{x}_0 = [5.0\times10^{-10}\ \ -1.0\times10^{-10}\ \ 5.0\times-10^{-10}\ \ 1.0\times10^{-10}]^\mathrm{T}$ とし，目標点を振子が吊り下がった状態である $\boldsymbol{x}_* = [0\ \ \pi\ \ 0\ \ 0]^\mathrm{T}$ として数値実験を行った結果を図 1 に示す．今回は $\varepsilon = 0.02$ とした．89 回の軌道の更新ののち，終端点が目標点に十分近い赤色の軌道を得た．軌道の初期点 $\boldsymbol{x}_0$ のノルムは $\|\boldsymbol{x}_0\| = 0.013$ であり，原点に十分近い．このことから，改良した射撃法が有効であることがわかる．

これまで，1 回で振り上げる軌道のみを考えてきたが，複数回振って振り上げる軌道を考えることも可能である [11]．図 2 に 1 回から 9 回まで振って振り上げる軌道を示す．そして，これらの軌道に対する評価関数 (2) の値 J_n

を以下にまとめる．J の添字 n は n 回振ることを表す：

$$J_1 = 13.406, \quad J_2 = 4.6288, \quad J_3 = 2.8040,$$
$$J_4 = 2.1791, \quad J_5 = 1.9012, \quad J_6 = 1.7629,$$
$$J_7 = 1.6939, \quad J_8 = 1.6605, \quad J_9 = 1.6451.$$

多数回振った方が評価関数 (2) の値が小さくなっていることがわかる．これは多数回振った方が最適入力 (6) を小さくできるためであると考えられる．

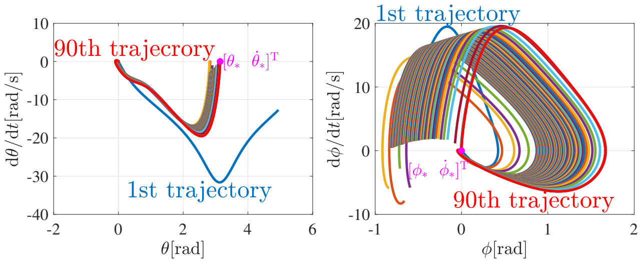

図 1　回転型倒立振子の振り上げ軌道．左図：振子の軌道，右図：アームの軌道

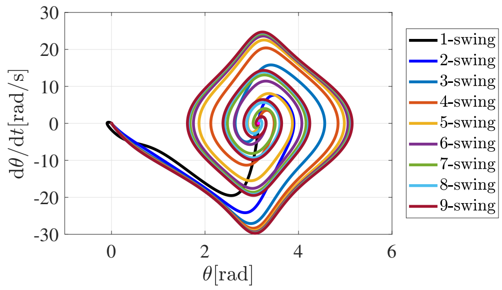

図 2　複数回振って振り上げる場合の振子の軌道

5　非線形最適サーボのための射撃法

5.1　安定多様体法の拡張

本章では，非線形最適サーボのための安定多様体法と射撃法の適用について述べる [12]．

非線形の制御対象 (1) を考える．目標軌道 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{r}}(t)$ は線形システム $\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{r}}(t) = S\boldsymbol{x}_{\mathrm{r}}(t)$ の解で周期 T の周期関数であるとし，同じく周期 T の周期関数である目標入力 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{r}}(t)$ とともに，$\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{r}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{r}}(t)) + G(\boldsymbol{x}_{\mathrm{r}}(t))\boldsymbol{u}_{\mathrm{r}}(t)$ を満たすとする．本章の目的は極限 $t \to \infty$ で $\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_{\mathrm{r}}(t) \to \boldsymbol{0}$ となるような制御則を求めることである．特に，状態の偏差 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_{\mathrm{r}}(t)$ と入力の偏差 $\tilde{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}_{\mathrm{r}}(t)$ を用いて以下の評価関数を最小化する入力 $\tilde{\boldsymbol{u}}(t)$ を得ることを考える：

$$\int_0^{\infty} \tilde{\boldsymbol{x}}(t)^{\mathrm{T}} Q \tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \tilde{\boldsymbol{u}}(t)^{\mathrm{T}} R \tilde{\boldsymbol{u}}(t)\ \mathrm{d}t. \tag{13}$$

ただし，Q は n 次，R は m 次の正定値行列である．この問題は Sakamoto–Rehák[8] が示すように，Hamilton 系の中心安定多様体の計算に帰着できるが，射撃法を適用するため多様体の計算を次のように解釈する．

まず，状態の偏差 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_{\mathrm{r}}(t)$ に関して以下を得る：

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} &= \dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{r}} \\ &= (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + G(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{r}}) + G(\boldsymbol{x}_{\mathrm{r}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{r}}).\end{aligned} \tag{14}$$

式 (14) に $\boldsymbol{x}(t) = \tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{x}_{\mathrm{r}}(t), \boldsymbol{u}(t) = \tilde{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{u}_{\mathrm{r}}(t)$ を代入して，以下のように式を書き換える：

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \tilde{\boldsymbol{f}}\left(\tilde{\boldsymbol{x}}(t), t\right) + \tilde{G}(\tilde{\boldsymbol{x}}(t), t)\tilde{\boldsymbol{u}}(t). \tag{15}$$

ここで，$\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{0}, t) = \boldsymbol{0}$ であるので，$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}, \tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}$ のとき，$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{0}$ となる．関数 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{r}}$ と $\boldsymbol{u}_{\mathrm{r}}$ が周期 T の周期関数であるので，システム (15) も周期 T の周期システムであることに注意する．以下の Hamilton 関数を考える：

$$\begin{aligned}&H(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{p}}, t) \\ &= \tilde{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{f}}(\tilde{\boldsymbol{x}}, t) - \frac{1}{4}\tilde{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}} \tilde{G}(\tilde{\boldsymbol{x}}, t) R^{-1} \tilde{G}(\tilde{\boldsymbol{x}}, t)^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{p}} + \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} Q \tilde{\boldsymbol{x}}.\end{aligned} \tag{16}$$

Hamilton 関数 (16) に対する Hamilton 系を考える：

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \tilde{\boldsymbol{p}}}\left(\tilde{\boldsymbol{x}}(t), \tilde{\boldsymbol{p}}(t), t\right), \tag{17}$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{p}}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}}\left(\tilde{\boldsymbol{x}}(t), \tilde{\boldsymbol{p}}(t), t\right). \tag{18}$$

式 (17)，(18) の解 $\{(\tilde{\boldsymbol{x}}(t), \tilde{\boldsymbol{p}}(t), t)\}$ のうち $t \to \infty$ で $\tilde{\boldsymbol{x}}(t) \to \boldsymbol{0}, \tilde{\boldsymbol{p}}(t) \to \boldsymbol{0}$ となるようなものを集めてできる $(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{p}}, t)$ の空間中の多様体を考える．この多様体が関数 $\tilde{\boldsymbol{p}}(\tilde{\boldsymbol{x}}, t)$ によって $\{(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{p}}, t) | \tilde{\boldsymbol{p}} = \tilde{\boldsymbol{p}}(\tilde{\boldsymbol{x}}, t)\}$ のように書けるとき，$\tilde{\boldsymbol{u}}(t)$ は以下のように求められる：

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(t) = -\frac{1}{2} R^{-1} \tilde{G}(\tilde{\boldsymbol{x}}(t), t)^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{p}}\left(\tilde{\boldsymbol{x}}(t), t\right).$$

2 章と同様に，原点近傍に初期点 $(\tilde{\boldsymbol{x}}_0, \tilde{\boldsymbol{p}}_0, 0)$ を複数選び，これに対する Hamilton 系 (17)，(18) の軌道を Runge–Kutta 法を用いて逆時間で計算し，得られた軌道を補間して関数 $\tilde{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}, t)$ を求める．また，原点近傍では多様体上の点を，線形化システムに対する Riccati 微分方程式の周期解 $P(t)$ を用いて $\tilde{\boldsymbol{p}} = 2P(0)\tilde{\boldsymbol{x}}$ と近似できる．周期解 $P(t)$ の求め方については文献 [13] に従う．そして，3 章で述べた射撃法を用いて，終端点が目標点に十分近くなるような初期点を系統的に求める．

5.2　宇宙機の追従制御

地球の質量中心を中心とした円軌道上に主衛星があり，その主衛星を周回するように従衛星を制御する．地球の質量中心から見た主衛星の位置ベクトルを $\boldsymbol{R}_0$，主衛星から見た従衛星の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とし，地球の質量中心から見た従衛星の位置ベクトルを $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{r}$ と書く．ここで，$R_0 = \|\boldsymbol{R}_0\|$，$R = \|\boldsymbol{R}\|$，$\boldsymbol{u}$ を宇宙機の制御加速度，万有引力定数 G と地球の質量 M の積を $\mu = GM$ とする．ベクトル $\boldsymbol{r}$ を成分表示するため，主衛星の質量中心を原点とし，(x, y, z) の座標をとる．ただし，x 軸は主衛星の軌道の動径方向，y 軸は主衛星の飛行方向，z 軸は面外方向を向き，右手系になるよう決定する．ここでは，xy 平面上に周期軌道を設定し，これに従衛星を追従させる制御を考えるので，常に $z = 0$ であるものとする．x, y が従う微分方程式は，$R = \sqrt{(R_0 + x)^2 + y^2}$，公転角速度 $n = \sqrt{\mu / R_0^3}$ を用いて，式 (1) の形で表すと以下のよ

うになる：

$$
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 2n\dot{y} + n^2(R_0 + x) - \frac{\mu(R_0+x)}{[(R_0+x)^2+y^2]^{3/2}} \\ -2n\dot{x} + n^2 y - \frac{\mu y}{[(R_0+x)^2+y^2]^{3/2}} \end{bmatrix},
$$

$$
G(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

ただし，入力は $\boldsymbol{u} = [u_x \;\; u_y]^{\mathrm{T}}$ であり，u_x, u_y は x 軸および y 軸方向の入力である．目標軌道 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{r}} = [x_{\mathrm{r}} \;\; y_{\mathrm{r}} \;\; \dot{x}_{\mathrm{r}} \;\; \dot{y}_{\mathrm{r}}]^{\mathrm{T}}$ は以下のように与える：

$$
\boldsymbol{x}_{\mathrm{r}}(t) = \begin{bmatrix} x_{\mathrm{r}}(t) \\ y_{\mathrm{r}}(t) \\ \dot{x}_{\mathrm{r}}(t) \\ \dot{y}_{\mathrm{r}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 \cos \omega t \\ -A_0 \sin \omega t \\ -\omega A_0 \sin \omega t \\ -\omega A_0 \cos \omega t \end{bmatrix}.
$$

目標入力 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{r}}$ は $\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{r}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{r}}(t)) + G(\boldsymbol{x}_{\mathrm{r}}(t))\boldsymbol{u}_{\mathrm{r}}(t)$ が成り立つように定める．状態変数 $\boldsymbol{x}$ と目標軌道 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{r}}$ との偏差 $\tilde{\boldsymbol{x}}$，および入力 $\boldsymbol{u}$ と目標入力 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{r}}$ との偏差 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ を，$\tilde{\boldsymbol{x}} = [\tilde{x} \;\; \tilde{y} \;\; \dot{\tilde{x}} \;\; \dot{\tilde{y}}]^{\mathrm{T}}, \tilde{\boldsymbol{u}} = [\tilde{u}_x \;\; \tilde{u}_y]^{\mathrm{T}}$ として式 (15) の形に書き換え，時刻 $t = -NT$ で $\tilde{\boldsymbol{x}}(-NT) = \tilde{\boldsymbol{x}}_*$ から出発して，$t \to \infty$ で $\tilde{\boldsymbol{x}}(t) \to \mathbf{0}$ となる軌道を求める．ただし，N は正の整数である．ここでは，$R_0 = 12000\,\mathrm{km}$，$\mu = 398601\,\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$，$A_0 = R_0/10\,\mathrm{km}$，$\omega = 1.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{rad/s}$，$N = 4$ とする．また，評価関数 (13) の行列 Q, R は $Q = I_{4\times4}, R = 10^{11} \times I_{2\times2}$ とする．従衛星を主衛星と同じ位置から出発するようにするため，目標点は $\tilde{\boldsymbol{x}}_* = \mathbf{0} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{r}}(-NT) = -[A_0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -\omega A_0]^{\mathrm{T}}$ とする．一方，原点近くの初期点は $\tilde{\boldsymbol{x}}_0 = [1.0\times10^{-15} \;\; 1.0\times10^{-15} \;\; 1.0\times10^{-15} \;\; -1.0\times10^{-15}]^{\mathrm{T}}$ とする．数値実験を行なった結果を図 3 に示す．4 回の軌道の更新ののち，終端点が目標点に十分近い赤色の軌道を得た．また，初期点 $\tilde{\boldsymbol{x}}_0$ のノルム $\|\tilde{\boldsymbol{x}}_0\| = 1.22 \times 10^{-11}$ であった．

偏差ではなく，もとの座標 $x(t)$ と $y(t)$ の時間変化を示したものが図 4 である．比較のため線形化システムに対する最適制御を適用したときの座標の変化も示した．この結果から，線形最適制御では目標軌道に追従できないが，非線形最適制御では追従できていることがわかる．

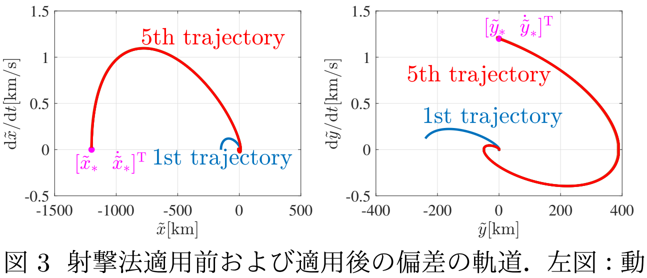

図 3　射撃法適用前および適用後の偏差の軌道．左図：動径方向の偏差の軌道，右図：飛行方向の偏差の軌道

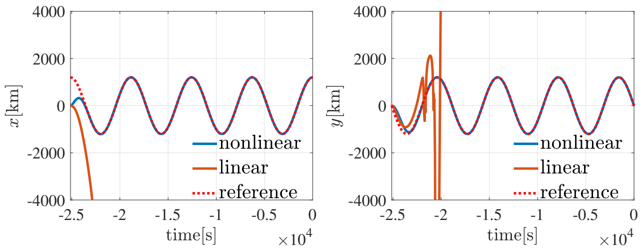

図 4　従衛星の座標の時間変化．左図：動径方向の座標，右図：飛行方向の座標

6　おわりに

非線形最適制御のための射撃法を回転型倒立振子に適用した [11]．これによって，1 回から 9 回まで振ってから振り上げる軌道を生成することができた．また，周期的な目標軌道へ追従させる制御則を得るために射撃法を拡張した [12]．具体例として，宇宙機の軌道追従制御を考え，線形制御よりも優れた制御性能を実現した．

参考文献

[1] N. Sakamoto and A. J. van der Schaft: Analytical approximation methods for the stabilizing solution of the Hamilton–Jacobi equation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 10, pp. 2335–2350 (2008)

[2] N. Sakamoto: Case studies on the application of the stable manifold approach for nonlinear optimal control design, *Automatica*, vol. 49, no. 2, pp. 568–576 (2013)

[3] 山下裕，島公脩： Hamilton–Jacobi 偏微分方程式の一解法，計測自動制御学会論文集，vol. 34，no. 6，pp. 571–576 (1998)

[4] T. Horibe and N. Sakamoto: Optimal swing up and stabilization control for inverted pendulum via stable manifold method, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 26, no. 2, pp. 708–715 (2018)

[5] T. Horibe and N. Sakamoto: Nonlinear optimal control for swing-up and stabilization of the acrobot via stable manifold approach: Theory and experiment, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, to appear (2019)

[6] 藤本理唯宇，坂本登： 非線形最適制御による倒立振子の振り上げ安定化，計測自動制御学会論文集，vol. 48，no. 7，pp. 423–430 (2012)

[7] Y. Oishi and N. Sakamoto: Numerical computational improvement of the stable-manifold method for nonlinear optimal control, In *Proceedings of the 20th IFAC World Congress*, pp. 5264–5269 (2017)

[8] N. Sakamoto and B. Rehák: Iterative methods to compute center and center-stable manifolds with application to the optimal output regulation problem, *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pp. 4640–4645 (2011)

[9] M. Bando and A. Ichikawa: Active formation along a circular orbit by pulse control, *SICE Annual Conference 2013*, pp. 2197–2203 (2013)

[10] 中村拓登，大石泰章，坂本登：安定多様体法における射撃法とその応用，第 5 回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム予稿集 (2018)

[11] 中村拓登，大石泰章，坂本登：安定多様体法と射撃法の回転型倒立振子振り上げへの応用，第 61 回自動制御連合講演会予稿集，pp. 1378–1383 (2018)

[12] 中村拓登，大石泰章，坂本登：安定多様体法と射撃法による宇宙機の軌道追従制御，第 6 回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム，発表予定 (2019)

[13] A. Ichikawa and H. Katayama: *Linear Time Varying Systems and Sampled-Data Systems*, Springer (2001)