逆命題と問題づくり

M2016SE005 久間 一輝
指導教員: 佐々木 克巳

1 はじめに

本研究の目的は，逆命題をもとに問題を作成する1つの手法を示し，その手法の効果を例証することである．その手法の特徴は，フローチャートを用いることである．そして，逆命題をもとにした問題づくりにおける，フローチャートの主な効果は，問題づくりを効率的に行えることである．先行研究，すなわち，逆命題をもとにした問題づくりのこれまでの研究では，たとえば，庄司[1]は，逆命題を，N 個の仮定と N 個の結論を入れかえて作成し，そうしてできるすべての逆命題を考察している．ただし，対象とする仮定を適切に選択する必要性(対象としない大前提を適切に選択する必要性)も述べている．また，藤城・佐々木 [2] は，入れかえの対象を，線分の長さ，角の大きさに絞ることで，効率性を意識した逆命題を作成しようとしているが，その手法が効率的であるかどうかは述べていない．本研究の手法は，[2]とは別の視点の複数の効率性を含む効果を意識している．

以下の 2 節では，提案する手法とそれによる効果を述べる．3 節では，4 節と 5 節で取り上げた証明問題の命題および逆命題において，既知として用いる性質を明らかにする．4 節と 5 節では，それぞれ具体的な問題を挙げて，本研究の手法を適用し，その効果を例証する．

2 提案する手法とその効果

この節では，逆命題をもとに問題を作成する1つの手法を示し，その手法の効果を述べる．

本研究で用いる手法は，次の手順に基づく手法である．

手順 2.1.

Step 1. フローチャートを用いて，もとの命題の証明の筋道を明らかにする．

Step 2. Step 1 の筋道から，逆命題を作る際の入れかえの対象となる仮定と結論を適切に選定し，それに基づいて逆命題をつくる．

Step 3. Step2 で選定した仮定と結論を入れかえた逆命題に対し，その証明可能性を，フローチャートから明らかにし，証明不可能であればその逆命題の反例を挙げる．

Step 4. Step 3 の逆命題が証明可能であれば，その逆命題を証明する問題の適切な日本語表現を与える．

本研究で主張するフローチャートの効果は次のとおりである．

効果 2.2.

(1) 手順 2.1 step 2 における選定を，適切かつ効率的に行える．

(2) 手順 2.1 step 3 の証明可能性の判断を，効率的に行える．

(3) もとの命題の証明に用いられている各性質に対し，その性質(と対等な性質)の用いる位置を変えた証明問題の作成を目指して，効率的に手順を進められる．

(4) もとの命題の証明に用いられている各性質に対し，その性質の逆命題を用いる証明問題の作成を目指して，効率的に手順を進められる．

具体的な効果は，4 節と 5 節の例で示す．

3 既知として用いる性質

この節では，次の 4 節以降で既知として用いる性質を明らかにする．まず，中学校 3 学年までに学ぶ図形の性質は既知とする．たとえば，2 つの三角形において，3 辺相等ならば合同(SSS)，2 辺夾角相等ならば合同(SAS)，2 角夾辺相等ならば合同(ASA)などである．加えて，次の性質も既知として用いる．

性質 3.1(SAA). 2 つの三角形において，1 組の辺と対応する 2 組の角がそれぞれ等しいとき，2 つの三角形は合同である．

性質 3.2(SSA). 2 つの三角形において，対応する 2 組の辺とその間にない 1 組の角がそれぞれ等しく，その 1 組の角の対辺が隣辺より長いとき，2 つの三角形は合同である．

性質 3.3. 図 3.1 において，点 E は AD と BC の交点である．このとき，以下がいえる．

(1) $\angle EBA=\alpha, \angle EAB=\angle ECD \Rightarrow \angle EDC=\alpha$

(2) $\angle EBA=\angle EDC=\alpha \Rightarrow \angle EAB=\angle ECD$

性質 3.4. 図 3.2 において，D,C,E は一直線上にある．このとき，以下がいえる．

(1) $\angle BAC=\alpha, \angle ABC=\angle ACD \Rightarrow \angle BCE=\alpha$

(2) $\angle BAC=\angle BCE=\alpha \Rightarrow \angle ABC=\angle ACD$

(3) $\angle BCE=\alpha, \angle ABC=\angle ACD \Rightarrow \angle BAC=\alpha$

性質 3.5. 図 3.3 において，F,C,D,E は一直線上にある．このとき，以下がいえる．

(1) $\angle B=\angle ADE, \angle A=\alpha \Rightarrow \angle BCF=\alpha$

(2) $\angle A=\angle BCF=\alpha \Rightarrow \angle B=\angle ADE$

(3) $\angle B=\angle ADE, \angle BCF=\alpha \Rightarrow \angle A=\alpha$

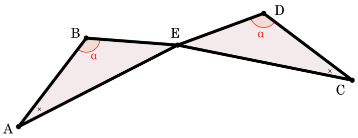
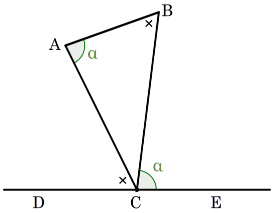


図 3.1：性質 3.3 の図



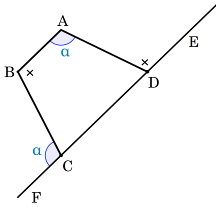


図 3.2：性質 3.4 の図形　図 3.3：性質 3.5 の図形

4　具体例 1

この節では，2 節で提案した手法を具体的な問題に適応した例を示す．まず，4.1 節で手順 2.1 の step 1 と step 2 を行い，4.2 節で step 3, 4.3 節では step 4 を行う．また，これらの各節では，2 節の効果 2.2 の確認も行う．

4.1 逆命題の作成

この節では，次の問題 4.1.1 に対して，手順 2.1 の step 1 と step 2 を行う．すなわち，フローチャートを用いてもとの命題の証明の筋道を明らかにし，さらに，その筋道から，逆命題を作る際の入れかえの対象となる仮定と結論を適切に選定し，それに基づいて逆命題をつくる．なお，問題 4.1.1 は[3]から抽出した問題である．

問題 4.1.1 図 4.1.1 のように，AB=AC,AB>BC である二等辺三角形 ABC がある．頂点 C を中心として，辺 BC が辺 AC と重なるまで△ABC を回転させて作った三角形を△DEC とする．また，頂点 B と点 E を結んだ線分 BE の延長線上に点 F をとる．このとき，∠AEF=∠DEF であることを証明しなさい．

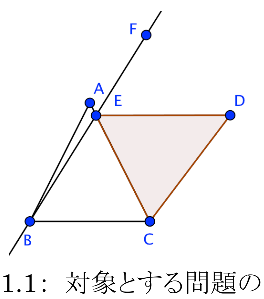


図 4.1.1：対象とする問題の図[3]

まず，フローチャートを用いて，証明の筋道を明らかにする．そのために，条件を整理すると，次の A1,…,A5 が，仮定で G が結論となる．

A1. AB=AC
A2. △ABC≡△DEC
A3. AB > BC
A4. E は直線 AC 上にある．
A5. D は直線 AC に関して B と反対側にある．
G. ∠AEF=∠DEF

本研究では，図 4.1.1 の位置関係は大前提と考える(つまり，A3，A4，A5 を大前提と考える)．すると，問題 4.1.1 で対象とする命題は

(命題 4.1.1) A1, A2⇒ G

となる．このフローチャートを付録 A の図 A.1 に示す．

次に，入れかえの対象となる仮定を選定し，逆命題をつくる．図 A.1 から，入れかえの対象となる条件の候補は，A1, A2, G である．ここで，図 A.1 から，A1 と G を入れかえた逆命題は，成り立つことが推測できるが，A2 と G を入れかえた逆命題は，成り立ちそうにないことが推測できる．図 A.1 では，A2 から 2 つの条件

A2-1. ∠ABC=∠DEC
A2-2. BC=EC

を導いているが，この 2 条件から A2 は導かれないからである．したがって，証明問題を作ることを考えるのであれば，A2 でなく，A2-1, A2-2 を入れかえの対象とした方がよい(効果 2.2(1))．このことから本研究では，A1，A2-1, A2-2, G を入れかえの対象とする. A2-1, A2-2 を仮定としてフローチャートをかきなおすと図 A.2 のようになる．

結果として，逆命題は次の 3 つとなる．

(逆命題 1) A2-1, A2-2, G ⇒ A1
(逆命題 2) A2-1, A2-2, G ⇒ A2-1
(逆命題 3) A1, A2-1 ,G ⇒ A2-2

4.2 逆命題の証明可能性について

この節では，手順 2.1 の step 3 を行う．すなわち，前節の 3 つの逆命題の証明可能性を，フローチャートから明らかにする. Step 3 には，証明不可能であればその逆命題の反例を挙げることも含まれるが，本稿では省略する．

その証明可能性は，図 A.2 の各矢印の逆が成立すればいえる($\begin{smallmatrix}P\\Q\end{smallmatrix}\rfloor\!\!- R$ のような矢印の逆は，$\begin{smallmatrix}P\\R\end{smallmatrix}\rfloor\!\!- Q$ と $\begin{smallmatrix}Q\\R\end{smallmatrix}\rfloor\!\!- P$ と考える)．結果，どの矢印に対してもすべての逆が成立するので，3 つの逆命題はすべて証明可能であり，それらを示すフローチャートは，図 A.3,図 A.4,図 A.5 のとおりである(効果 2.2(2))．

4.3 問題づくり

この節では，手順 2.1 の step 4 を行う．すなわち，4.1 節の 3 つの逆命題を証明する問題の適切な日本語表現を与える．本稿では，図 A.3 に対応する問題のみを示す．

問題 4.3.1. 図 4.1.1 のように，AB>BC である三角形 ABC がある．また，辺 AC 上に BC=CE となる点 E をとり，頂点 B と点 E を結んだ線分 BE の延長線上に点 F をとる．さらに，∠AEF=∠DEF,∠ABC=∠DEC となる点 D をとる．このとき，AB=AC であることを証明しなさい．

5　具体例 2

この節では，2 節で提案する手法を具体的な問題に適応した例をもう 1 つ示す．手順は前節と同様であるが，問題づくりの結果は本稿では省略する．

5.1 逆命題の作成

この節では，次の問題 5.1.1 に対して，手順 2.1 の step 1 と step 2 を行う．すなわち，フローチャートを用いてもとの命題の証明の筋道を明らかにし，さらに，その筋道から，逆命題を作る際の入れかえの対象となる仮定と結論を適切に選定し，それに基づいて逆命題をつくる．なお，問題 5.1.1 は[3]から抽出した問題を一般化したものである．

問題 5.1.1. AB=AE である二等辺三角形 ABE と AC=AD である二等辺三角形 ACD があり，AB>AD，∠BAE=∠CAD である．DB と CE の交点を F とし，$\overrightarrow{DB}$ と $\overrightarrow{CE}$ のなす角を α とする．このとき，∠BAE=∠CAD=α を証明しなさい(∠BAE(=∠CAD)が約 90°のときの図は図 5.1.1 のとおりである)．

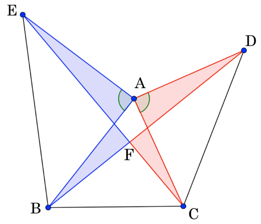


図 5.1.1：問題 5.1.1 の図

まず，フローチャートを用いて，証明の筋道を明らかにする．そのために，条件を整理すると，次の A0,…,A4 が仮定で，G1 と G2 が結論となる．

A0. $\overrightarrow{DB}$ と $\overrightarrow{CE}$ のなす角は α である
A1. AB=AE
A2. AC=AD
A3. ∠BAE=∠CAD
A4. AB＞AD
G1. ∠BAE= α
G2. ∠CAD= α

証明の筋道は，∠DAB の角度により，24 のパターンがある．各パターンは付録に示す，パターン 1 は∠DAB=180°の場合で，パターン 13 が∠DAB= 0°の場合である．それ以外のパターンは，4 点 A,C,F,D を A,C,F,D,A の順で結んだ図形および 4 点 A,B,F,E を A,B,F,E,A の順で結んだ図形の形で区別でき，そのうち図 3.1 のような図形の場合は記号⋈，図 3.2 のような図形の場合は記号△，図 3.3 のような図形の場合は記号◇で表す．以下では，それぞれの筋道のフローチャートを示す．各フローチャートにおける記号⋈△◇は，性質 3.3,性質 3.4,性質 3.5 のいずれかを用いることを示している．また，今回のパターン分けは，A4 を前提に行っているので，A4 は大前提と考える．すると，問題 5.1.1 で対象とする命題は

(命題 5.1.1) A0, A1, A2, A3 ⇒ G1&G2

となる．このフローチャートを図 A.6 に示す．

次に，入れかえの対象となる仮定を選定し，逆命題をつくる．図 A.6 から，入れかえの対象となる条件の候補は，A0, A1, A2, A3, G1, G2 である．ここで，図 A.6 より，A0 と G1 の入れかえた逆命題および A0 と G2 の入れかえた逆命題は，もとの命題とほぼ同じ手順で証明可能とわかるので，以降の対象から外す(効果 2.2(2))．

結果として，逆命題は次の 6 つである．

(逆命題 1) A2, A3, G2 ⇒ A1&G1
(逆命題 2) A2, A3, G1 ⇒ A1&G2
(逆命題 3) A1, A3, G2 ⇒ A2&G1
(逆命題 4) A1, A3, G1 ⇒ A2&G2
(逆命題 5) A1, A2, G2 ⇒ A3&G1
(逆命題 6) A1, A2, G1 ⇒ A3&G2

5.2 逆命題の証明可能性について

この節では，手順 2.1 の step 3 を行う．すなわち，前節の 6 つの逆命題の証明可能性を，フローチャートから明らかにする．また，証明不可能であればその逆命題の反例を挙げたが，本稿では省略する．

ここで，5.1 節の(逆命題 6)は証明不可であり,それ以外は証明可能である．(逆命題 6)以外が証明可能であることを示すフローチャートは図 A.7,図 A.8,図 A.9 のとおりである．(逆命題 1)，(逆命題 3)は，仮定に A3 と G2 があるので，G1 が導かれるのは明らかである．よって，そのフローチャートは省略する．また，(逆命題 1)，(逆命題 3)には 2 つの解法があるが，そのうち 1 つを示す．さらに，(逆命題 2)，(逆命題 4)のフローチャートは，それぞれ(逆命題 1)，(逆命題 3)とほぼ同様であるため，本稿では省略する．次に，(逆命題 5)のフローチャートは，性質 3.5(SSA)を用いるときに A4 を用いているが，そのことを明記している．

ここで，効果 2.2 を確認する．

・図 A.6 の各矢印の逆を考察することで，証明可能性の判断を効率的に行うことができた(効果 2.2(2))．
・図 A.6 より，合同条件を後半に用いる問題を作りたいときは，A1,A2,A3 のいずれかを導く逆命題を作ればよいとわかる(この問題では 5 つすべてが該当する)(効果 2.2(3))．
・図 A.6 より，SAA を用いる問題を作りたいときは，A2,A3,G1 から A1，または A1,A3,G2 から A2 を導く逆命題を作ればよいとわかる．同様に，ASA,SSA を用いる問題を作りたいときの条件もわかる(効果 2.2(4))．

参考文献

[1] 庄司貞夫，「中等教育数学科における図形の論証指導に関する研究」，第 41 回数学教育論文発表会論文集，日本数学教育学会，2008, pp. 531-536.
[2] 藤城佳高，佐々木克巳，「成立しない逆命題から成立する同値命題を作る考え方とその考察」，南山大学大学院理工学研究科システム数理専攻 2015 年度修士論文，2016.
[3] 間宮勝己，山腰政喜，『最高水準特進問題集 数学中学 2 年』．文英堂，東京，2012.

付録 A

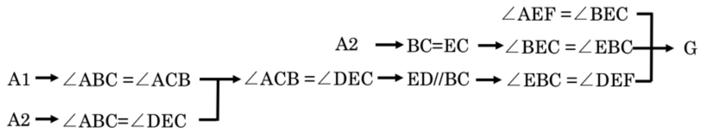


図 A.1：命題 4.1.1 のフローチャート 1

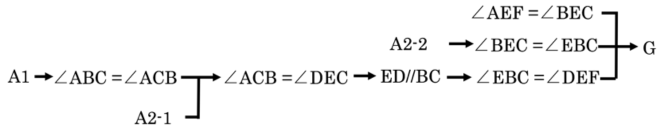


図 A.2：命題 4.1.1 のフローチャート 2

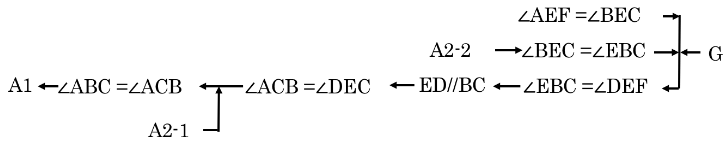


図 A.3：4 節の逆命題 1 のフローチャート

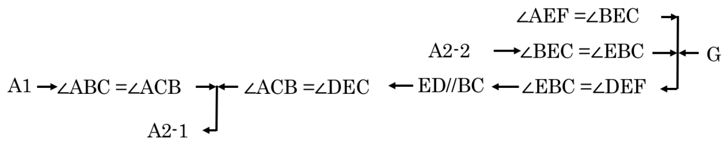


図 A.4：4 節の逆命題 2 のフローチャート

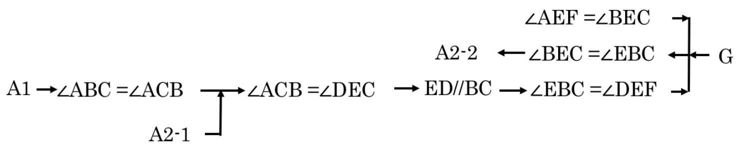


図 A.5：4 節の逆命題 3 のフローチャート

図 A.6：命題 5.1.1 のフローチャート

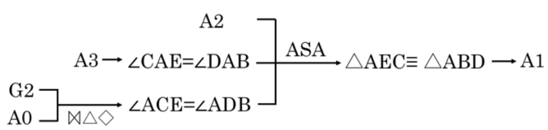


図 A.7：5 節の逆命題 1 のフローチャート

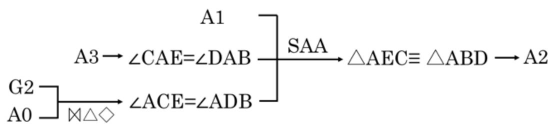


図 A.8：5 節の逆命題 3 のフローチャート

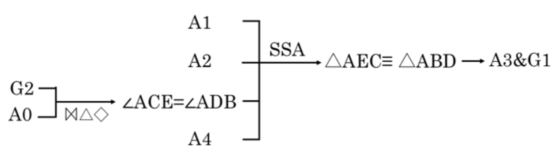


図 A.9：5 節の逆命題 5 のフローチャート