

フィードバックのある不確実性下の多期間資源配分問題

M2016SS001 青山貴彦

指導教員：福嶋雅夫

1 はじめに

資源配分問題は非常によく知られた問題である。この問題は、労働力、資金、時間などの限られた資源を用いて最も良い効用を得るために資源をどう配分すればよいかという非常にわかりやすい設定の問題である。資源配分問題は、Koopmans[1]の研究を始まりとし、既に様々なタイプの問題について考えられている。どのタイプの問題においても、基本的に資源の各配分に対し非負制約を与えており、全体の資源量に対し上限を与えている。また、効用を表す目的関数は、分離可能で非減少の凹関数と仮定されることが多い。これにより、資源を多く配分するほど効用は大きくなるが、同時に資源一単位あたりの効用増加量は減少するという現実を即した状況を考えることができる。

資源配分問題の問題例として対象物の検索が考えられる。これは、資源配分問題の手法により定式化し、解を求めることができる。しかし、通常考えられているのは検索までであり、対象物の対処までは考えられていない。

例として、近年話題となっていたヒアリなどの外来種について考える。これら危険な外来種は日本の生物多様性保全に影響を与えるとして環境省および農林水産省により「我が国の生態系等に被害を及ぼすおそれのある外来種リスト」としてリストアップされている。その数は400種を超えており、すでに国内に定着が確認されているものだけでも310種存在する。ブラックバスで知られるオオクチバスやセアカゴケグモ、カミツキガメなどもその一種である。

これらの外来種に対処するためには、検索のために資源を投入する必要があるのはもちろんのこと、発見した際には駆除、経過観察、駆除した個体の分析、啓発活動などの対処に余分に資源が必要となる。さらに、一度検索しただけでは終了とならず、長期的に存在するかどうか調査をしなければならない。そのため、発見だけでなく対処を含めた資源の配分を長期的に考えていかなければならない。

本研究では、上述の例のように対象の発見により対処のためさらに資源が必要となる状況をフィードバックと定義し [5]、外来種の存在数に不確実性をもつ場合のフィードバックのある多期間資源配分問題を考える。

2 準備

2.1 ロバスト最適化

ロバスト最適化では、不確実性をもつデータの生じうる範囲をあらかじめ設定し、その中でも最も都合の悪い状況が生じた場合を想定したモデル化が行われている。そのモデリング技法および解法を含めて、ロバスト最適化技法と呼ばれる [2]。

係数ベクトル c に不確実性をもつ次の非線形計画問題

を考える。

$$\begin{aligned} \max \quad & a'x \\ \text{s.t.} \quad & c'f(x) \leq b. \end{aligned}$$

ここで、 x は決定変数のベクトル、 $f(x)$ はベクトル値関数、 b は定数である。ただし、 $'$ は転置記号を表す。不確実なデータがとりうる範囲を不確実性集合とよぶ。不確実性集合の与え方は多種存在し、代表的なものとしては矩形と楕円体が挙げられる。本研究においては、不確実なデータ c に対して不確実性集合を $U = \{c \mid c = \hat{c} + Bu, \|u\|_p \leq 1\}$ とする。ただし、 \hat{c} と B はそれぞれ与えられたベクトルと正定値対角行列である。ロバスト最適化では、不確実性のもとでの最悪の場合、すなわち $\max_{c \in U} c'f(x)$ を問題 (2.1) の制約条件の左辺とする。これは

$$\begin{aligned} \max_{c \in U} c'f(x) &= \hat{c}'f(x) + \max_{\|u\|_p \leq 1} (Bf(x))'u \\ &= \hat{c}'f(x) + \|Bf(x)\|_q \end{aligned}$$

と書ける。ただし、 p, q は $p \geq 0, q \geq 0$ かつ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たす値である。このように取り扱うことで、不確実性をもつ問題を解くことのできる形にできる。

2.2 一般化ラグランジュ未定乗数法

つぎの問題を考える。

$$\begin{aligned} \max \quad & H(x) \\ \text{s.t.} \quad & D(x) \leq d, \\ & x \in S. \end{aligned} \tag{1}$$

ただし、 $H(x)$ と $D(x)$ は実数値関数、 d は定数、 S は凸集合である。ここで、非負の実数 λ に対して、 $x^* \in S$ は次の問題の最適解であるとする。

$$\begin{aligned} \max \quad & H(x) - \lambda D(x) \\ \text{s.t.} \quad & x \in S. \end{aligned} \tag{2}$$

このとき、 x^* はつぎの問題の最適解となる [3]。

$$\begin{aligned} \max \quad & H(x) \\ \text{s.t.} \quad & D(x) \leq D(x^*), \\ & x \in S. \end{aligned} \tag{3}$$

したがって、問題 (3) の $D(x^*)$ が問題 (2) の d に一致するような λ を求めることができれば、問題 (1) の代わりに問題 (2) を解くことで、最適解を求めることができる [3]。

いま、 $\lambda^i (i = 1, 2)$ に対して、 $x_i^* (i = 1, 2)$ は以下の問題の最適解であるとする。

$$\begin{aligned} \max \quad & H(x) - \lambda^i D(x) \quad (i = 1, 2). \\ \text{s.t.} \quad & x \in S \end{aligned}$$

このとき、 $\lambda^1 < \lambda^2$ ならば $D(x_1^*) \geq D(x_2^*)$ であり、 $D(x^*)$ は λ に関して単調非増加である。よって、二分探索法などの方法により $D(x^*)$ と d が十分に近い値になる λ を求めることができる。

2.3 分離可能問題

いま、 $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ とし、関数 $H(x)$ と $D(x)$ は次式のように分離可能と仮定する。

$$H(x) := \sum_{j=1}^n H^j(x^j), \quad D(x) := \sum_{j=1}^n D^j(x^j)$$

$$S := S^1 \times S^2 \times \dots \times S^n$$

このとき、問題 (1) は、以下のように表せる。

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n H^j(x^j) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n D^j(x^j) \leq d, \\ & x^j \in S^j \quad (j = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、第一制約はカップリング制約と呼ばれる。問題 (4) に対して次の問題を考える。

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n [H^j(x^j) - \lambda D^j(x^j)] \\ \text{s.t.} \quad & x^j \in S^j \quad (j = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (5)$$

2.2 節で述べたように、 λ を適切な値に定めることにより問題 (4) の最適解を求めることができる。また問題 (5) はそれぞれの活動 j に対する以下の n 個の問題に分離できる。

$$\begin{aligned} \max \quad & H^j(x^j) - \lambda D^j(x^j) \\ \text{s.t.} \quad & x^j \in S^j. \end{aligned} \quad (6)$$

各 j に対する問題 (6) の最適解を $x^{*,j}$ とすれば、

$$x^* := (x^{*,1}, x^{*,2}, \dots, x^{*,n})$$

は問題 (5) の最適解となる。

3 フィードバックのある多期間資源配分のロバスト最適化モデル

3.1 定式化

本研究では、フィードバックのある多期間資源配分問題としてつぎの問題を取り扱う。

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n (c^j)' g^j(x^j) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \{e' x^j + a(c^j)' g^j(x^j)\} \leq Q, \\ & x^j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $x^j := (x_t^j)_{t \in \mathcal{T}}$ であり、 x_t^j は活動 j 、期 t における投入資源量を表す変数である。ただし、 $\mathcal{T} = \{1, \dots, T\}$ と

する。また、 Q は総資源量である。 $f^j(x^j) := (f_t^j(x_t^j))_{t \in \mathcal{T}}$ であり、 $f_t^j(x_t^j)$ は活動 j 、期 t において資源を x_t^j 消費した時の捕獲量とし、 $f_t^j(x_t^j) := c_t^j g_t^j(x_t^j)$ と表される。ただし、 $c^j := (c_t^j)_{t \in \mathcal{T}}$ であり、 $c_t^j > 0$ はそれぞれ活動 j 、期 t における捕獲量の最大値である。 $g_t^j(x_t^j)$ は x_t^j だけ資源を投入した際に存在する外来種のうちどれだけの割合を捕獲できるかを表す関数であり、 $g_t^j(x_t^j) := 1 - \exp(-s_t^j x_t^j)$ と表される。ただし、 $s_t^j > 0$ とする。 $a(c^j)' g^j(x^j)$ はフィードバックを表しており、 $f_t^j(x_t^j)$ だけ外来種を捕獲した際に必要な資源量、 a は単位捕獲量の処理時に必要な資源量 (一定) である。

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n (c^j)' y^j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \{e' x^j + a(c^j)' y^j\} \leq Q, \\ & y^j - g^j(x^j) = 0 \quad (j = 1, \dots, n), \\ & x^j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n), \\ & y^j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

制約条件 $y^j - g^j(x^j) = 0$ より実行可能集合が凸集合ではないため、これは凸計画問題ではない。等式制約を不等式制約に緩和すれば以下のように表すことができ、凸計画問題として解を求めることができる。

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n (c^j)' y^j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \{e' x^j + a(c^j)' y^j\} \leq Q, \\ & y^j - g^j(x^j) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, n), \\ & x^j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n), \\ & y^j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (8)$$

単期 ($\mathcal{T} = \{1\}$) の場合、問題 (8) は一森と森口が考察した問題 [5] に帰着される。

ここで、緩和問題 (8) の任意の最適解

$$(x^*, y^*) = (x^{*,1}, x^{*,2}, \dots, x^{*,n}, y^{*,1}, y^{*,2}, \dots, y^{*,n})$$

に対し、 $x^* = (x^{*,1}, x^{*,2}, \dots, x^{*,n})$ は問題 (7) の最適解であるといえるため、問題 (8) の最適解を求めればよい。

3.2 一般化ラグランジュ未定乗数法と分離可能問題

2.2 節で説明したように、問題 (8) に一般化ラグランジュ未定乗数法を適用すると以下の問題が得られる。

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n \{(c^j)' y^j - \lambda (e' x^j + a(c^j)' y^j)\} \\ \text{s.t.} \quad & y^j - g^j(x^j) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, n), \\ & x^j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n), \\ & y^j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (9)$$

適当な値の λ を用いれば、この問題における最適解 $(x^*, y^*) = (x^{*,1}, x^{*,2}, \dots, x^{*,n}, y^{*,1}, y^{*,2}, \dots, y^{*,n})$ は、問題 (8) の最適解に一致する。

この問題はそれぞれの活動 $j(j = 1, \dots, n)$ について分離可能であるため、各 $j(j = 1, \dots, n)$ について以下の問題を考えることができる。

$$\begin{aligned} \max \quad & (c^j)'y^j - \lambda \{e'x^j + a(c^j)'y^j\} \\ \text{s.t.} \quad & y^j - g^j(x^j) \leq 0, \\ & x^j \geq 0, \\ & y^j \geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

各 j に対する問題 (10) の最適解を $(x^{*,j}, y^{*,j})$ とすれば、次の (x^*, y^*) が問題 (9) の最適解となる。

$$(x^*, y^*) := (x^{*,1}, x^{*,2}, \dots, x^{*,n}, y^{*,1}, y^{*,2}, \dots, y^{*,n})$$

3.3 ロバスト最適化手法の適用

問題 (10) には、不確実なデータ c が含まれているためこのままでは解くことができない。そこで、各 j に対してデータ c^j の不確実性集合を $\mathcal{U}^j \triangleq \{c^j \mid c^j = \hat{c}^j + B^j u^j, \|u^j\|_p \leq 1\}$ とする。ただし、 \hat{c}^j は最大捕獲量の推定値を表す与えられたベクトルであり、 B^j は与えられた $(b_1^j, b_2^j, \dots, b_T^j)$ を対角成分にもつ次の正定値対角行列である。また、現時点から遠い期になるほど不確実性が増すと考えられるので $0 \leq b_1^j \leq b_2^j \leq b_T^j$ と仮定する。問題 (10) に対し、ロバスト最適化手法を適用すると、以下の問題が得られる。

$$\begin{aligned} \max \quad & \min_{c^j \in \mathcal{U}^j} (c^j)'y^j - \lambda \left\{ e'x^j + a \max_{c^j \in \mathcal{U}^j} (c^j)'y^j \right\} \\ \text{s.t.} \quad & y^j - g^j(x^j) \leq 0, \\ & x^j \geq 0, \\ & y^j \geq 0. \end{aligned}$$

よってこの問題は以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \max \quad & (\hat{c}^j)'y^j - \|B^j y^j\|_q \\ & - \lambda \{e'x^j + a(\hat{c}^j)'y^j + a\|B^j y^j\|_q\} \\ \text{s.t.} \quad & y^j - g^j(x^j) \leq 0, \\ & x^j \geq 0, \\ & y^j \geq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、 p, q は $p \geq 0, q \geq 0$ かつ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たす値である。

4 不確実性集合を定めるノルムについて

4.1 ∞ -ノルムの場合

$\|B^j y^j\|_1 = \sum_{t=1}^T b_t^j |y_t^j|$ であり、変数 $v^j := (v_t^j)_{t \in \mathcal{T}}$ を導入すれば、問題 (11) は以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \max \quad & (\hat{c}^j)'y^j - e'v^j - \lambda \{e'x^j + a(\hat{c}^j)'y^j + a e'v^j\} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{t=1}^T b_t^j |y_t^j| \leq e'v^j, \\ & y^j - g^j(x^j) \leq 0, \\ & x^j \geq 0, y^j \geq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

ただし、 $|\cdot|$ は絶対値である。問題 (12) は t について分解することができるため、変数 v_t^j を導入すると以下のよ

うな凸計画問題に定式化できる。

$$\begin{aligned} \max \quad & \hat{c}_t^j y_t^j - v_t^j - \lambda (x_t^j + a \hat{c}_t^j y_t^j + a v_t^j) \\ \text{s.t.} \quad & y_t^j - g_t^j(x_t^j) \leq 0, \\ & b_t^j y_t^j \leq v_t^j, \\ & -b_t^j y_t^j \leq v_t^j, \\ & x_t^j \geq 0, \\ & y_t^j \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

4.2 1-ノルムの場合

$\|B^j y^j\|_\infty = \max_{1 \leq t \leq T} \{b_t^j |y_t^j|\}$ であり、変数 w^j を導入すれば問題 (11) は以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \max \quad & (\hat{c}^j)'y^j - w^j - \lambda (e'x^j + a(\hat{c}^j)'y^j + a w^j) \\ \text{s.t.} \quad & \max_{1 \leq t \leq T} \{b_t^j |y_t^j|\} \leq w^j \\ & y^j - g^j(x^j) \geq 0, \\ & x^j \geq 0, \\ & y^j \geq 0. \end{aligned}$$

これは以下のような凸計画問題に書き換えられる。

$$\begin{aligned} \max \quad & (\hat{c}^j)'y^j - w^j - \lambda (e'x^j + a(\hat{c}^j)'y^j + a w^j) \\ \text{s.t.} \quad & b_t^j y_t^j \leq w^j \quad (t = 1, \dots, T), \\ & -b_t^j y_t^j \leq w^j \quad (t = 1, \dots, T), \\ & y^j - g^j(x^j) \leq 0, \\ & x^j \geq 0, \\ & y^j \geq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

4.3 2-ノルムの場合

ここで、 n 次元の 2 次錐を

$$\mathcal{K}^n = \begin{cases} \{(x_0, \bar{x}) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}^{n-1} : x_0 \geq \|\bar{x}\|_2\} & (n \geq 2) \\ \{x_0 \in \mathcal{R} : x_0 \geq 0\} & (n = 1) \end{cases}$$

の集合で定義し、2 次錐 \mathcal{K} に関する $x, y \in \mathcal{R}^n$ のジョルダン積を

$$x \circ y := (\langle x, y \rangle, x_0 \bar{y} + y_0 \bar{x}) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}^{n-1}$$

で定義する。

問題 (11) について変数 δ^j を導入すると以下のような非線形 2 次錐計画問題に定式化できる。

$$\begin{aligned} \max \quad & (\hat{c}^j)'y^j - \delta^j - \lambda (e'x^j + a(\hat{c}^j)'y^j + a\delta^j) \\ \text{s.t.} \quad & (\delta^j, B^j y^j) \in \mathcal{K}^{T+1}, \\ & y^j - g^j(x^j) \leq 0, \\ & x^j \geq 0, \\ & y^j \geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

問題 (15) に対して 2 乗スラック変数法 [4] を導入すると、変数 $z^j \in \mathcal{R}^{T+1}$ を用いて以下のようにあらわすことができる。

$$\begin{aligned} \max \quad & (\hat{c}^j)'y^j - \delta^j - \lambda (e'x^j + a(\hat{c}^j)'y^j + a\delta^j) \\ \text{s.t.} \quad & (\delta^j, B^j y^j) - z^j \circ z^j = 0, \\ & y^j - g^j(x^j) \leq 0, \\ & x^j \geq 0, \\ & y^j \geq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

5 数値実験

提案したモデルについて数値実験を行う。問題例の定数をつぎのように乱数などを用いて生成する。各期間、場所における最大捕獲可能量を表す c は区間 $[5,10]$ の一様乱数を用いて生成する。単位捕獲量の処理時に必要な資源量 a は 0.5 とする。また発見量のパラメータである s を区間 $[3,8]$ の一様乱数に 10^{-2} を乗じたものとする。以下では総資源量 100、期間数 3、場所数 3 の問題例について議論する。問題 (13), (14), (16) を解く際は MATLAB の optimization toolbox において提供されている fmincon 関数を使用した。

表 1 $B^j = \text{diag}(0, 0, 0)$ の場合

場所	期間	発見に用いた資源量			対処に用いた資源量		
		$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$	$\ \cdot\ _1$	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$	$\ \cdot\ _1$
1	1	11.792	11.792	11.792	2.976	2.976	2.976
	2	10.196	10.196	10.195	2.206	2.206	2.206
	3	8.375	8.375	8.376	1.642	1.642	1.642
2	1	10.342	10.342	10.342	2.157	2.157	2.157
	2	10.108	10.108	10.108	2.413	2.413	2.413
	3	2.775	2.775	2.775	0.463	0.463	0.463
3	1	10.836	10.836	10.837	2.349	2.349	2.349
	2	9.102	9.102	9.101	1.941	1.941	1.941
	3	8.494	8.494	8.494	1.833	1.833	1.833
合計		82.020	82.020	82.020	17.980	17.980	17.980

表 2 $B^j = \text{diag}(0, 0.5, 1)$ の場合

場所	期間	発見に用いた資源量			対処に用いた資源量		
		$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$	$\ \cdot\ _1$	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$	$\ \cdot\ _1$
1	1	12.874	12.469	12.616	3.137	3.078	3.100
	2	10.395	10.356	11.179	2.237	2.231	2.354
	3	7.071	7.080	5.351	1.432	1.433	1.132
2	1	11.861	11.292	11.499	2.384	2.301	2.332
	2	10.187	9.869	9.474	2.425	2.375	2.312
	3	0.414	2.339	4.000	0.073	0.395	0.647
3	1	12.253	11.723	11.916	2.560	2.483	2.511
	2	9.174	9.312	10.053	1.952	1.973	2.084
	3	7.202	7.105	5.666	1.623	1.606	1.345
合計		83.790	83.498	84.186	15.382	15.210	15.337

表 3 $B^j = \text{diag}(0, 2, 4)$ の場合

場所	期間	発見に用いた資源量			対処に用いた資源量		
		$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$	$\ \cdot\ _1$	$\ \cdot\ _\infty$	$\ \cdot\ _2$	$\ \cdot\ _1$
1	1	16.392	14.647	14.493	3.578	3.374	3.355
	2	11.064	10.109	9.659	2.337	2.193	2.121
	3	0.583	4.157	4.748	0.140	0.907	1.020
2	1	16.801	14.352	14.135	3.002	2.716	2.689
	2	10.419	8.895	7.061	2.461	2.215	1.877
	3	0.000	1.794	4.705	0.000	0.307	0.748
3	1	16.861	14.576	14.374	3.137	2.870	2.845
	2	9.365	8.907	8.730	1.981	1.911	1.882
	3	0.204	3.411	3.370	0.059	0.876	0.867
合計		81.690	80.849	81.274	16.695	17.369	17.405

不確実性の度合い以外のパラメータはすべて固定し、それぞれのモデルについて得られた結果を表 1, 2, 3 にまとめた。得られた解は複数回実行を行っても同じ値が得

られている。また問題例のサイズは期間数 100、場所数 100 まで解けるのを確認している。

不確実性集合の行列が $B^j = \text{diag}(0, 0, 0)$ の場合、不確実性がない問題と等価であるため、表 1 より 1-ノルム, 2-ノルム, ∞ -ノルムそれぞれの場合において同様な解が得られている。不確実性が期が増すにつれ微小に増加するような場合、表 1, 2 から 1-ノルム, 2-ノルム, ∞ -ノルムすべてのモデルにおいて不確実性が存在しない場合に比べ期のはじめに消費する傾向があることがわかる。不確実性の増加度がより大きい場合、表 1, 3 から ∞ -ノルム, 2-ノルム, 1-ノルムの順に期のはじめに消費する傾向が強いことがわかる。この結果は不確実性が少ない初期において資源を投入し効用を得ようとする妥当な結果であるといえる。 ∞ -ノルム, 2-ノルム, 1-ノルムそれぞれのモデルにおいて初期にどれだけの資源投入を行うかの傾向はそれぞれのノルムの性質に依存した結果となっている。

また計算時間については、様々な期間数、場所数におけるそれぞれのモデルが要する計算時間を比較した場合、小さいサイズの問題では 2-ノルムのモデルにおいてもっとも時間がかかっているが大きな差は存在せず、ある程度以上のサイズの問題では計算時間はモデルの難しさよりも二分探索の反復回数に大きく影響を受けるが、総合計画立案などの応用に対して十分大きなサイズの問題を解くことができる。

6 おわりに

本研究ではフィードバックのある多期間資源配分に対するロバスト最適化モデルを提案し、凸計画問題および非線形 2 次錐計画問題として定式化した。また、乱数を用いて生成した問題例を解くことによりそれぞれのモデルの比較を行った。

各期、各場所における最大の捕獲可能量が前の期の資源投入量に依存していないため、期の間、場所間に依存関係が存在するモデルに対して適切な定式化を行うのが今後の課題である。

参考文献

- [1] B. O. Koopmans: The optimum distribution of effort. Operations Research, Vol. 9, No. 1, pp. 52-72, 1962.
- [2] A. Ben-Tal, L. El Ghaoui, A. Nemirovski: Robust Optimizatoin. Princeton University Press, 2009.
- [3] Hugh Everett III: Generalized Lagrange multiplier method for solving problems of optimum allocation of resources. Operations Research, Vol. 11, No.3, pp. 399-417, 1963.
- [4] 福田エレン秀美, 福島雅夫: 2 次錐計画と 2 乗スラック変数法. オペレーションズ・リサーチ, Vol. 59, No. 12, pp. 707-715, 2014.
- [5] 一森哲男, 森口聡子: フィードバックのある資源配分問題. 日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌, Vol. 48, pp. 1-11, 2005.