

半無限積分に対する切断 Gauss 則

M2013SS012 上岡 航平

指導教員：杉浦 洋

1 はじめに

切断 Gauss 則とは Gauss 積分則の部分和として定義される積分則であり、具体的には急減少関数の無限積分や半無限積分で、0 に近い標本値を計算から省いて得られる。例えば急減少関数の半無限積分では半無限区間 $[0, \infty)$ における積分を有限区間 $[0, a]$ に打ち切り、それを Gauss 則で近似する方法が行われてきた。この Gauss 積分則において右端点 a 近傍の標本値は非常に小さいので省いても精度にほとんど影響しない。このような操作を組織的にを行い、計算量を削減することが切断 Gauss 則の基本的なアイデアである。

2 Gauss 積分則

[定理 2.1] n 点 Gauss 公式について次のことが成り立つ。

(i) $f(z)$ が複素平面の楕円

$$\varepsilon(\rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| + |z-1| = \rho + \rho^{-1}\} \quad (\rho > 1)$$

およびその内部を含む複素領域で正則のときには、十分大きい n で

$$|\text{誤差}| \leq \frac{\pi(\rho + \rho^{-1})}{\rho^{2n-1}} \max_{z \in \varepsilon(\rho)} |f(z)|. \quad (1)$$

(ii) $f(z)$ が $\varepsilon(\rho)$ ($\rho > 1$) およびその内部を含む複素領域で有理型であり、特異点が $\varepsilon(\rho)$ 上にある 1 位の極のみであるときには、

$$|\text{誤差}| \leq \frac{C}{\rho^{2n}}. \quad (2)$$

ここで C は f と ρ に依存する定数。

2.1 半無限区間の Gauss 則

半無限区間 $[0, \infty)$ の積分

$$I = \int_0^\infty f(x) dx$$

に対する標準的な Gauss 則の適用法を述べる。

$$I = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a f(x) dx$$

であるから、十分大きな a をとれば

$$I \cong \int_0^a f(x) dx$$

である。右辺に区間 $[0, a]$ の Gauss 則を用いれば

$$I \cong \int_0^a f(x) dx \cong \frac{a}{2} \sum_{l=1}^n w_l^{(n)} f\left(\frac{a}{2}(x_l + 1)\right) =: I_a^{(n)}$$

である。具体的には、小さい数 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ に対して、

$$\max_{x \geq a} |f(x)| \leq \varepsilon_1, \quad \int_{2a}^\infty |f(x)| dx = \varepsilon_2 \quad (3)$$

となるように a を定める。誤差は、

$$I_a^{(n)} - I = I_a^{(n)} - \int_0^a f(x) dx - \int_a^\infty f(x) dx$$

なので

$$\begin{aligned} |I_a^{(n)} - I| &\leq \left| I_a^{(n)} - \int_0^a f(x) dx \right| + \left| \int_a^\infty f(x) dx \right| \\ &\leq \left| I_a^{(n)} - \int_0^a f(x) dx \right| + \varepsilon \\ &\leq \left| I_a^{(n)} - \int_0^a f(x) dx \right| + \left| \int_a^{2a} f(x) dx \right| + \left| \int_{2a}^\infty f(x) dx \right| \\ &\leq \left| I_a^{(n)} - \int_0^a f(x) dx \right| + a\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{aligned}$$

第 1 項は有限区間上の積分に対する Gauss 則の誤差で小さいと期待できる。第 2 項は $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を小さくとれば、いくらでも小さくなる。 $f(x)$ が $x \rightarrow \infty$ で急減少すれば a は小さくとれて、効率的な近似となる。

3 切断 Gauss 積分則

3.1 積分公式

半無限区間 $[0, \infty)$ 上の急減少関数 $f(x)$ で $|x| < 1$ ($x \geq a$) を仮定する。整数 $m > n$ をとり、区間 $[0, a^{(m)})$, $a^{(m)} = 2a/(x_n^{(m)} + 1) > a$ 上の積分を m 点 Gauss 則で近似すると

$$I_{a^{(m)}}^{(m)} = \frac{a^{(m)}}{2} \sum_{l=1}^m w_l^{(m)} f\left(\frac{a^{(m)}}{2}(x_l^{(m)} + 1)\right) \cong \int_0^{a^{(m)}} f(x) dx.$$

$x > a$ で $|f(x)|$ は小さいと仮定したので、近似積分則

$$I_a^{(m,n)} := \sum_{l=1}^n w_l^{(m)} f\left(\frac{a^{(m)}}{2}(x_l^{(m)} + 1)\right) \cong \int_0^a f(x) dx$$

が得られる。ここで

$$\frac{a^{(m)}}{2}(x_l^{(m)} + 1) > \frac{a^{(m)}}{2}(x_n^{(m)} + 1) = a \quad (l > n)$$

である。 $I_a^{(m,n)}$ を切断比 n/m の n 点切断 Gauss 則という。

誤差は

$$\begin{aligned} |I_a^{(2n,n)} - I| &\leq |I_a^{(2n,n)} - I_{2a}^{(2n)}| + \left| I_{2a}^{(2n)} - \int_0^{2a} f(x) dx \right| \\ &\quad + \left| \int_{2a}^\infty f(x) dx \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq a \sum_{l=n+1}^{2n} w_l^{(2n)} \left| f\left(a(x_l^{(2n)} + 1)\right) \right| \\ &+ \left| I_{2a}^{(2n)} - \int_0^{2a} f(x) dx \right| + \varepsilon_2 \\ &= a\varepsilon_1 \sum_{l=n+1}^{2n} w_l^{(2n)} + \left| I_{2a}^{(2n)} - \int_0^{2a} f(x) dx \right| + \varepsilon_2. \end{aligned}$$

ここで, Gauss 則の対称性より

$$\sum_{l=1}^{2n} w_l^{(2n)} = 2, \quad \sum_{l=n+1}^{2n} w_l^{(2n)} = 1.$$

ゆえに

$$|I_a^{(2n,n)} - I| \leq \left| I_{2a}^{(2n)} - \int_0^{2a} f(x) dx \right| + a\varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

となる. 第1項は

$$|I_{2n}^{(n)} - I_{2n}| \leq \sum_{l=n}^{2n} w_l^{(2n)} |f(a(x_l^{(2n)} + 1))|$$

で $|f(a(x_l^{(2n)} + 1))|$ は小さいので, 小さい. 第1項は Gauss 積分の誤差なので小さい. 第3項は $[0, a]$ の外の積分なので小さい. よって切断 Gauss 則もよりよい精度が期待できる.

3.2 誤差解析

無限積分 $I = \int_0^\infty f(x) dx$ に対する Gauss 則と切断 Gauss 則の適用を考える.

$$\max_{x \geq a} |f(x)| \leq \varepsilon_1, \quad \int_{2a}^\infty |f(x)| dx = \varepsilon_2 \quad (4)$$

式(4)で $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は小さくて無視できるものとする. このとき

$$\begin{aligned} |I_a^{(n)} - I| &\cong \left| I_a^{(n)} - \int_0^a f(x) dx \right| \\ |I_a^{(2n,n)} - I| &\cong \left| I_{2a}^{(2n)} - \int_0^{2a} f(x) dx \right| \end{aligned}$$

となる.

次に $I_a = \int_0^a f(x) dx$ に対する n 点 Gauss 則の誤差を考える. ここで区間 $[0, a]$ 上の Gauss 則を

$$I_n = \frac{a}{2} \sum_{l=1}^n w_l^{(n)} f\left(\frac{a}{2}(1 + x_l^{(n)})\right) \cong I_a$$

とすると, 次の定理が成り立つ.

[定理 3.1] $f(x)$ が複素平面上の点 0 と点 a を焦点とする楕円

$$\varepsilon(a, \rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| + |z - a| = \frac{a}{2}(\rho + \rho^{-1})\}, \quad \rho > 1,$$

および, その内部を含む複素領域で有理型であり, 特異点は $\varepsilon(a, \rho)$ 上にある1位の極のみであるときには

$$|I_a^{(n)} - I_a| \leq \frac{C}{\rho^{2n}} //$$

一方, 切断 Gauss 則の誤差は

$$|I_a^{(2n,n)} - I| = |I_a^{(2n,n)} - I_{2a}^{(2n)}| + |I_{2a}^{(2n)} - I_{2a}| + |I_{2a} - I|$$

となる. ここで, 右辺第1項を E_1 , 第2項を E_2 , 第3項を E_3 とすると $|E_1|$ は

$$\begin{aligned} &\left| a \sum_{l=1}^n w_l^{(2n)} f\left(a(1 + x_l^{(2n)})\right) - a \sum_{l=1}^{2n} w_l^{(2n)} f\left(a(1 + x_l^{(2n)})\right) \right| \\ &\leq a \sum_{l=n+1}^{2n} w_l^{(2n)} \left| f\left(a(1 + x_l^{(2n)})\right) \right| \end{aligned}$$

である. $n+1 \leq l \leq 2n$ で $x_l^{(2n)} > 0$ であるから, $a(1 + x_l^{(2n)}) > a$. ゆえに式(4)より

$$|E_1| \leq a \sum_{l=n+1}^{2n} w_l^{(2n)} \varepsilon_2 = a\varepsilon_2$$

となる. ここで $\sum_{l=n+1}^{2n} w_l^{(2n)} = 1$ を用いた.

(\because Gauss 則は $f(x)$ を正確に積分するので $\sum_{l=1}^n w_l^{(n)} = \int_{-1}^1 f(x) dx = 2$, よって半分足したら1)

次に,

$$E_3 = \left| \int_{2a}^\infty f(x) dx \right| \leq \int_{2a}^\infty |f(x)| dx = \varepsilon_1$$

となる. 最後に $f(x)$ が $\varepsilon(2a, \rho)$ とその内部を含む複素領域で有理型であり, 特異点は $\varepsilon(2a, \rho)$ 上にある1位の極のみであるときには定理(3.1)より

$$|E_2| \leq \frac{C}{\rho^{4n}}$$

となる. 以上より, 切断 Gauss 則の誤差は

$$\begin{aligned} |I_a^{(2n,n)} - I| &\leq |E_1| + |E_2| + |E_3| \\ &\leq a\varepsilon_2 + \frac{C}{\rho^{4n}} + \varepsilon_1 \\ &= \frac{C}{\rho^{4n}} + \varepsilon \end{aligned}$$

ここで $\varepsilon = \varepsilon_1 + a\varepsilon_2$ である. ε が小さくて無視できるならば

$$|I_a^{(2n,n)} - I| \leq \frac{C}{\rho^{4n}}.$$

簡単のために $f(x)$ の特異点が $z = \alpha$ の極のみである場合を考える.

Gauss 則の場合, 点 α を含む楕円を $\varepsilon(a, \rho)$ とすると

$$A = |\alpha| + |\alpha - a| = \frac{a}{2}(\rho + \rho^{-1}), \quad \rho > 1$$

である. これより,

$$\rho + \rho^{-1} = \frac{2A}{a}. \quad \therefore \rho^2 - \frac{2A}{a}\rho + 1 = 0.$$

ゆえに

$$\rho = \frac{A}{\rho} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1}$$

$\rho > 1$ より

$$\rho = \frac{A}{a} + \sqrt{\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1} = \rho_G$$

ゆえに

$$|I_a^{(n)} - I_a| \leq \frac{C_G}{\rho_G^{2n}} \quad (5)$$

となる。次に切断 Gauss 則の場合、点 α を含む楕円を $\varepsilon(2a, \rho)$ とすると

$$B = |\alpha| + |\alpha - 2a| = a(\rho + \rho^{-1}), \quad \rho > 1$$

である。上と同様にして ρ を求めると

$$\rho = \frac{B}{2a} + \sqrt{\left(\frac{B}{2a}\right)^2 - 1} = \rho_{TG}$$

である。よって $\varepsilon = \varepsilon_1 + a\varepsilon_2$ が無視できるときには

$$|I_a^{(2n,n)} - I_a| \leq \frac{C_{TG}}{\rho_{TG}^{4n}} \quad (6)$$

となる。式 (5), (6) より

$$\rho_{TG}^2 > \rho_G$$

が成立するような極 α では切断 Gauss 則の方が Gauss 則より精度が良いと期待できる。

$\beta = \frac{\alpha}{2a}$ と正規化すると

$$\begin{aligned} A &= |\alpha| + |\alpha - a| \\ &= |2a\beta| + |2a\beta - a| \\ &= aA_0 \end{aligned}$$

ここで $A_0 = |2\beta| + |2\beta - 1|$ である。そして

$$\begin{aligned} \rho_G &= \frac{A}{a} + \sqrt{\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1} \\ &= A_0 + \sqrt{A_0^2 - 1} \\ &= |2\beta| + |2\beta - 1| + \sqrt{(|2\beta| + |2\beta - 1|)^2 - 1} \end{aligned}$$

同様に切断 Gauss 則について

$$\begin{aligned} B &= |\alpha| + |\alpha - 2a| \\ &= |2a\beta| + |2a\beta - 2a| \\ &= 2aB_0, \quad B_0 = |\beta| + |\beta - 1| \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} \rho_{TG} &= \frac{B}{2a} + \sqrt{\left(\frac{B}{2a}\right)^2 - 1} \\ &= B_0 + \sqrt{B_0^2 - 1} \\ &= |\beta| + |\beta - 1| + \sqrt{(|\beta| + |\beta - 1|)^2 - 1} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} R(\beta) &= \frac{\rho_{TG}^2}{\rho_G} \\ &= \frac{\left(|\beta| + |\beta - 1| + \sqrt{(|\beta| + |\beta - 1|)^2 - 1}\right)^2}{|2\beta| + |2\beta - 1| + \sqrt{(|2\beta| + |2\beta - 1|)^2 - 1}} > 1 \end{aligned}$$

なら切断 Gauss 則は Gauss 則よりも精度が良い。

ここで β を複素平面上で動かしたときの $R(\beta)$ の等高線図を図 1 に示す。

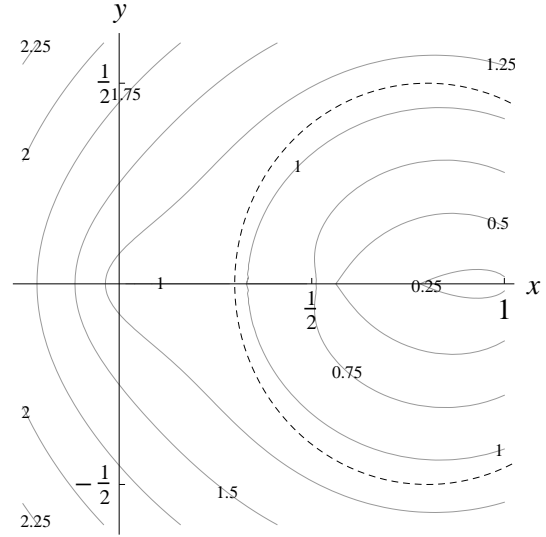


図 1 $R(\beta)$ の等高線図

この図に示した領域のほとんどの点で $R(\beta) > 1$ であることが分かる。 $R(\beta) < 1$ の領域は $\beta = 0.8$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円 (破線) の内部に収まる。この図は区間 $[0, a]$, $a = \frac{1}{2}$ の場合に相当する。以上より、原点付近に極がある場合は切断 Gauss 則は Gauss 則より精度が良い。一方、 $z = a$ の近くに極がある場合は Gauss 則の方が精度が良い。しかし、 $f(x)$ は急減少関数なので $z = a$ の近くの極の留数は小さいと期待できる。だから精度の差も小さいと思われる。よって、全般的に切断 Gauss 則は Gauss 則より精度が良い。

4 数値例

4.1 切断比 1/2 の切断 Gauss 則

図 2 は関数

$$f(x) = xe^{-x},$$

図 3 は関数

$$f(x) = \frac{1}{(x-5)^2 + 100} e^{-x},$$

図 4 は関数

$$f(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{10}} e^{-x}$$

をそれぞれ切断 Gauss 則, Gauss 則, DE 公式で近似したときの絶対誤差のグラフである。横軸は標本点数 n , 縦軸

は絶対誤差の常用対数である。実線は切断 Gauss 則，破線は Gauss 則，点線は DE 公式である。切断 Gauss 則と Gauss 則の積分区間 $[0, a]$ は $|f(a)| \cong 10^{-15}$ となるように選んだ。

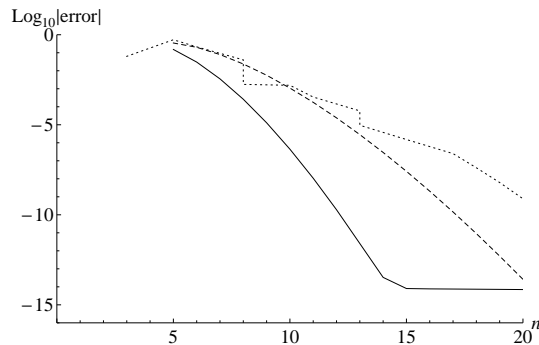


図 2 $f(x) = xe^{-x}$ のとき

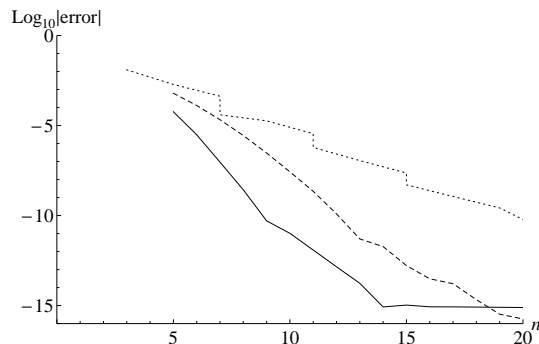


図 3 $f(x) = \frac{1}{(x-5)^2+100}e^{-x}$ のとき

図 2, 図 3 の関数に関しては切断 Gauss 則が最も精度が良く, Gauss 則がそれに次ぐ。DE 公式は最も精度が悪い。

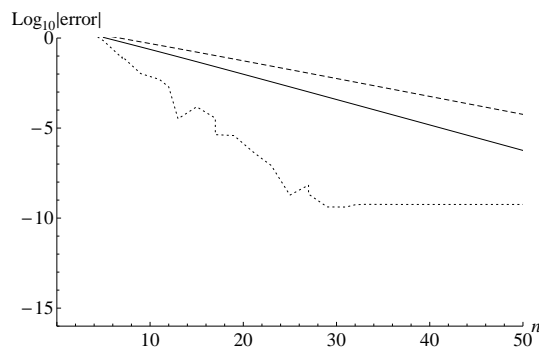


図 4 $f(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{10}}e^{-x}$ のとき

図 4 の関数に関しては DE 公式が最も精度が良く, 切断 Gauss がそれに次ぐ, Gauss 公式が最も精度が悪い。

4.2 任意切断比の切断 Gauss 則

次に, 任意切断比の n 点切断 Gauss 則 $I_a^{(m,n)}$ について数値実験を行う。被積分関数を

$$f(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{2}} e^{-x^2}$$

を区間 $[0, 7]$ で積分した。ここで

$$|f(x)| < 7 \times 10^{-23} \quad (x > 7)$$

である。絶対誤差を図 5 に示す。横軸は m , 4 本のグラフはそれぞれ標本点数 $n = 10, 20, 30, 40$ に対する誤差である。ここで $n = m$ のときは Gauss 則である。この問題ではいずれの標本点数においても切断比 n/m が小さいほど誤差は小さくなる。この問題においては一般的に切断 Gauss 則は有効であると言える。

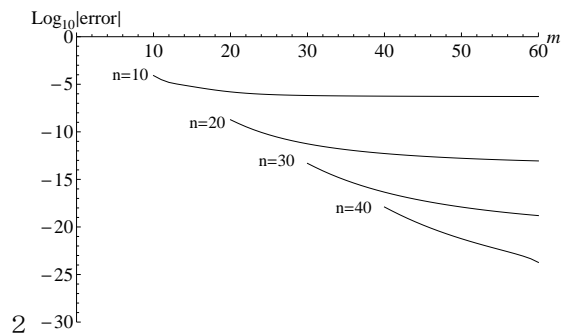


図 5 任意切断比の n 点 Gauss 則

5 まとめと今後の課題

急減少関数に対する切断 Gauss 則を提案した。切断比 $1/2$ の切断 Gauss 則について詳しく誤差解析を行い, Gauss 則との比較を行った。切断 Gauss 則は原点近傍の特異性に対して Gauss 則より強く良い精度が期待できることがわかった。一方, 切断点 a 近傍の特異性に関しては Gauss 則が強いが, 被積分関数の急減少性により差は目立たない。数値実験結果はこのことを支持した。特異点が非常に原点に接近するときには DE 公式が有効であった。

切断比が任意の場合の誤差理論は完成していないが, 任意切断比の n 点切断 Gauss 則についても数値実験を行った。実験によれば切断 Gauss 則は Gauss 則より精度が良く, 切断比が小さい (m は大きい) ほど誤差が小さかった。

切断 Gauss 則を用いた急減少関数の半無限積分に対する効率的な積分法の設計が今後の課題である。

参考文献

[1] 杉原正顯, 室田一雄: 数値計算法の数理, 岩波書店 (1994).