

擬似線形表現に基づく3自由度ヘリコプタの非線形制御

M2013SC008 加藤真

指導教員：大石泰章

1 はじめに

制御系の設計・解析において、線形行列不等式 (linear matrix inequality, LMI) は線形制御の多くの問題に適用できる強力な道具として広く知られている。しかし、LMIには線形の問題しか扱えないという欠点があった。そのため、近年では、LMIの欠点である非線形性の扱いを可能とする、擬似線形表現 (linear-like representation) と2乗和多項式 (sum of squares polynomial, SOS polynomial) の応用が注目されている [1][2]。擬似線形表現とは、非線形システムを線形システムのように扱うことを可能とし、 H^2 制御や H^∞ 制御、モデル予測制御 (model predictive control, MPC) などの問題を、2乗和多項式に帰着して解くことができる表現法である [3][4]。

本研究の目的は、擬似線形表現による非線形制御系の設計を行い、以上の方法の有用性や性能を、制御実験機を使って調べることである。擬似線形表現には、表現の仕方に任意性があり、表現の仕方によっては性能に変化が生じることがある。また、2乗和多項式には、依存するパラメータの数の増加によって、計算量が増大してしまうことや、近似の度合いによって性能にばらつきが出るなどの問題がある。そのため、シミュレーションや現実の実験機に適用して有効性を調べることは意義のあることと思われる。

制御対象は、非線形性の強いヘリコプタを使用することを考える。ヘリコプタは、Quanser社の3自由度モデルヘリコプタ [5] であり、3つの自由度を持ったタンデムロータ型ヘリコプタとなっていて、ピッチ、上下、前後方向の挙動を扱うことができる。同種のヘリコプタに対する非線形制御の研究は多くされているため [6][7][8]、本研究で扱う制御対象として適当であると考えられる。

本論文は、1章から5章の構成である。まず、2章では、制御対象の非線形項を残したモデリングをし、状態空間表現をする。運動方程式の導出は、文献 [6] と [8] を参考にし、3章では、擬似線形表現と拡大偏差系の導出 [9] を行い、最適化問題を2乗和多項式によって解き、最適サーボ制御系の設計を行う。4章では、線形化した場合と非線形制御を行う場合の2パターンで、ランプ状の目標軌道追従制御とステップ状の目標軌道追従制御のシミュレーションと実機実験を行い、応答の差や理論の有効性を検証する。5章では、本研究における実験結果による考察を行い、まとめと今後の課題について述べる。

2 制御対象のモデリング

2.1 制御対象の概要

本研究での制御の対象とする、Quanser社の3自由度モデルヘリコプタの概略図を図1に示し、各パラメータの説明をする。

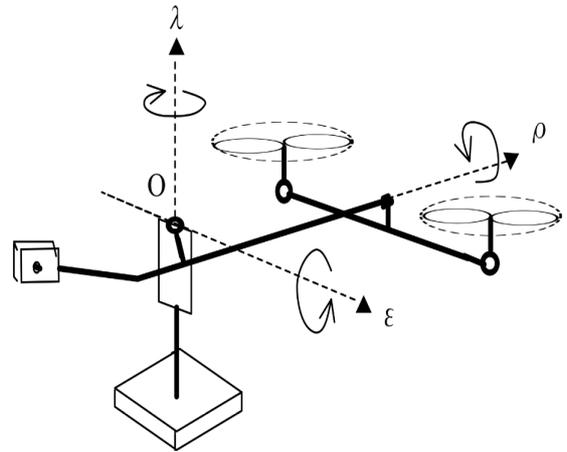


図1 ヘリコプタの概略図

機体のボディは、支点Oから振り子のようにぶら下がった支持棒の先端に固定されており、支点Oを中心に水平方向および垂直方向に回転できる [10]。支点Oを通る水平面を基準とした垂直方向の回転角度を ϵ [deg] とする。次に、支持点Oからの水平方向の回転角度を λ [deg] とする。さらに、機体は支持棒の先端との固定点を中心に回転でき、水平面からの回転角度を ρ [deg] とする。また、このモデルのヘリコプタは前後のモータへそれぞれ電圧 V_f , V_b を印加することで揚力を得て飛行することができ、前後のモータを独立して制御することが可能である。本研究で扱う物理パラメータを表1にまとめる。

表1 物理パラメータ

記号	詳細	値	単位
g	重力加速度	9.81	[m/s ²]
M_h	ヘリコプタボディの質量	1.55	[kg]
M_w	カウンターウェイトの質量	1.87	[kg]
L_a	点Oから機体中心までの距離	0.665	[m]
L_w	点Oからカウンターウェイトの距離	0.464	[m]
L_h	機体中心からロータまでの距離	0.178	[m]
r_h	機体中心から ϵ 回転軸への仰角	0.128	[rad]
r_w	カウンターウェイトから ϵ 回転軸への仰角	0.053	[rad]
K_f	ロータの揚力定数	0.1188	[N/V]
V_f	フロントロータへの電圧		[V]
V_b	バックロータへの電圧		[V]

2.2 モデリング

制御対象の運動を、Lagrangeの運動方程式より導出する。状態変数 $x(t)$ と、運動方程式を以下に示す。

状態変数は

$$x(t) = [\epsilon \ \rho \ \lambda \ \dot{\epsilon} \ \dot{\rho} \ \dot{\lambda}]^T \quad (1)$$

であり、運動方程式は以下ようになる：

$$\ddot{\epsilon} = \frac{L_a}{J_\epsilon} K_f (V_f + V_b) \cos \rho + L_\epsilon, \quad (2)$$

$$\ddot{\rho} = \frac{L_h}{J_\rho} K_f (V_f - V_b), \quad (3)$$

$$\ddot{\lambda} = \frac{L_a}{J_\lambda} K_f (V_f + V_b) \sin \rho + L_\lambda. \quad (4)$$

このとき、 L_ϵ 、 L_λ と、慣性モーメントである J_ϵ 、 J_ρ 、 J_λ は、以下の式で与えられる：

$$J_\epsilon = M_h L_a^2 + M_w L_w^2, \quad (5)$$

$$J_\rho = M_h L_h^2, \quad (6)$$

$$J_\lambda = M_h L_a^2 \cos(\epsilon - r_h)^2 + M_w L_w^2 \cos(\epsilon - r_w)^2, \quad (7)$$

$$L_\epsilon = \frac{-M_h L_a^2}{J_\epsilon} \sin(\epsilon - r_h) \cos(\epsilon - r_h) \dot{\lambda}^2 + \frac{-M_w L_w^2}{J_\epsilon} \sin(\epsilon - r_w) \cos(\epsilon - r_w) \dot{\lambda}^2 + \frac{-M_h g L_a}{J_\epsilon} \cos(\epsilon - r_h) + \frac{M_w g L_w}{J_\epsilon} \cos(\epsilon - r_w), \quad (8)$$

$$L_\lambda = \frac{2M_h L_a^2}{J_\lambda} \sin(\epsilon - r_h) \cos(\epsilon - r_h) \dot{\epsilon} \dot{\lambda} + \frac{2M_w L_w^2}{J_\lambda} \sin(\epsilon - r_w) \cos(\epsilon - r_w) \dot{\epsilon} \dot{\lambda}. \quad (9)$$

以上の運動方程式から、係数行列が状態変数の第二成分であるピッチ角 ρ に依存した状態空間表現を導出する。

ピッチ角に依存させる理由は、他の状態変数である ϵ と λ の微分方程式 (2), (4) が、ピッチ角に依存していることと、直観的にもピッチ角がヘリコプタの動きに重要な働きを及ぼしていることから、ピッチ角を残すことで精密なモデル化ができると考えたためである。このとき、エレベーション角 ϵ は、十分小さいとして線形近似した。入力フロントロータとバックロータの印加電圧 [V] であり、これらをまとめて、 $u(t) = [V_f \ V_b]^T$ とかく。

状態空間表現は以下ようになる：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (10)$$

$$(11)$$

ただし、

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{L_a K_f}{J_\epsilon} \cos \rho & \frac{L_a K_f}{J_\epsilon} \cos \rho \\ \frac{L_h K_f}{J_\rho} & -\frac{L_h K_f}{J_\rho} \\ -\frac{L_a K_f}{J_\epsilon} \sin \rho & -\frac{L_a K_f}{J_\epsilon} \sin \rho \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$a = -\frac{M_h g L_a \cos r_h - M_w g L_w \cos r_w}{J_\epsilon}$$

である。

3 擬似線形表現による最適サーボ制御系設計

3.1 擬似線形表現について

本章では、擬似線形表現と2乗和多項式による最適サーボ制御系設計を行う [11]。まず、制御系設計を行うため、式 (10)–(14) で定義した状態空間表現に対して、擬似線形表現を行う。擬似線形表現とは一般に、

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) \quad (15)$$

の形の状態空間表現である。ただし $A(x(t))$ 、 $B(x(t))$ は $x(t)$ の多項式行列である。式 (10)–(14) の状態空間表現は、行列 A が定数であるので、行列 B 中の $\cos \rho$ と $\sin \rho$ を ρ の多項式で近似して $B(\rho)$ と書けば擬似線形表現

$$\begin{cases} x(t) = [\epsilon \ \rho \ \lambda \ \dot{\epsilon} \ \dot{\rho} \ \dot{\lambda}]^T, \\ \dot{x}(t) = Ax(t) + B(\rho)u(t) \end{cases} \quad (16)$$

になる。

また、変数 ρ が変動する領域を、ヘリコプタのピッチ角 ρ の可動範囲の上下限に基づいて

$$P = \{\rho \mid -30 \leq \rho \leq 30\} \quad (17)$$

とする。このとき、多項式 $r(\rho)$ を $r(\rho) = (\rho+30)(30-\rho)$ と定めれば、領域 P は $r(\rho) \geq 0$ なる ρ の集合である。

3.2 最適サーボ制御系設計

次に、最適サーボ制御系を設計するため、状態空間表現の拡大偏差系を構成すると、式 (18) となる：

$$\begin{cases} \dot{x}_e(t) = [\epsilon \ \rho \ \lambda \ \dot{\epsilon} \ \dot{\rho} \ \dot{\lambda} \int(\epsilon_{\text{ref}} - \epsilon)dt \int(\lambda_{\text{ref}} - \lambda)dt]^T, \\ \dot{x}_e(t) = A_e x_e(t) + B_e(\rho)u(t), \\ x_e(0) = x_{e0}, \\ A_e = \begin{bmatrix} A & O_{6 \times 2} \\ -C & O_{2 \times 2} \end{bmatrix}, B_e(\rho) = \begin{bmatrix} B(\rho) \\ O_{2 \times 2} \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (18)$$

状態フィードバック形式のコントローラを $u(t) = Kx_e(t)$ として、評価関数

$$J = \int_0^\infty (x_e(t)^T Q x_e(t) + u(t)^T R u(t)) dt \quad (19)$$

を小さくするようなゲイン K を求める。この問題は、以下の最適化問題に帰着される。

最適化問題：

最小化 $\text{trace}(W)$

条件 $-A_e X - B_e(\rho)L(\rho) - XA_e^T - L(\rho)^T B_e(\rho)^T$
 $-I \succeq O,$

$$\left(\begin{array}{c|c} W & Q^{\frac{1}{2}}X \\ \hline XQ^{\frac{1}{2}} & L(\rho)^T R^{\frac{1}{2}} \\ & X \end{array} \right) \succeq O, \quad (\forall \rho \in P).$$

最小化を行う $\text{trace}(W)$ は、評価関数である式 (19) の J よりも大きく、 $\text{trace}(W) \geq J$ である。また、 X は対称行列値の変数であり、 $L(\rho)$ は係数が変数であるような ρ の 1 次式とする。 Q と R は重み行列である。この最適化問題を 2 乗和多項式を使って解き、解が得られたら、 $K(\rho) = L(\rho)X^{-1}$ に対して入力 $u(t) = K(\rho)x(t)$ のように定め、フィードバック制御を行う。次章では設計した制御器の性能を、シミュレーションと実機実験で示す。

4 シミュレーションと実機実験

4.1 パラメータ設定

シミュレーションを行う際のパラメータの設定を行う。重み行列 Q と R は次のように設定した：

$$Q = \text{diag}[100 \ 1 \ 10 \ 0 \ 0 \ 2 \ 10 \ 0.1], \quad (20)$$

$$R = \text{diag}[0.05 \ 0.05]. \quad (21)$$

初期値は、実験機の構造より $x(0) = [-27.5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ とするが、トラベル角を制御する実験の場合は、制御によって全ての状態が零ベクトルになり、安定にホバリングしている状態から開始する。すなわち、トラベル角を制御する場合の初期値は $x(0) = 0$ である。

目標軌道としては 2 種類を考える。1 つ目の目標軌道は、トラベル角 λ をランプ状に 30 秒間で 30 度まで増やすという軌道である。2 つ目の目標軌道は、トラベル角 λ をステップ状に 30 度まで増やすという軌道である。

シミュレーションは、以下の (i)、(ii) の 2 つのパターンで行い、制御性能の変化を調べる。

- (i) 線形制御： ρ を十分小さいとして線形近似し、通常の最適レギュレータを適用した場合。
- (ii) 非線形制御：非線形項を $\sin \rho = \rho - \frac{\rho^3}{6}$, $\cos \rho = 1 - \frac{\rho^2}{2}$ と近似して得た ρ に依存するゲイン $K(\rho) = L(\rho)X^{-1}$ で制御した場合。

このようにした理由は、線形化をしないで制御を行うことと、コントロールゲイン K が ρ に依存するかしないかの違いによって、制御性能に差が出るか調べるためである。

4.2 シミュレーション結果

ランプ状目標軌道の場合とステップ状目標軌道の場合について、制御対象の非線形モデルを用いてシミュレーションしたトラベル角 λ の変化を、それぞれ図 2 と図 3 に、エレベーション角 ϵ の変化を図 4 に示す。

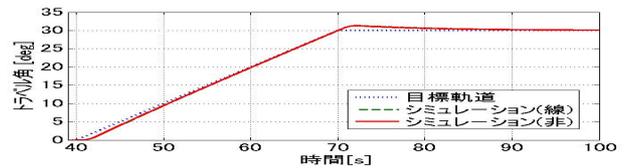


図 2 ランプ状目標軌道の場合のトラベル角のグラフ

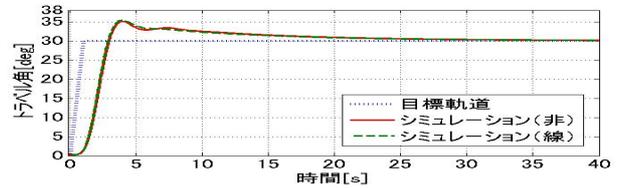


図 3 ステップ状目標軌道の場合のトラベル角のグラフ

図 2 と図 3 より、シミュレーションでは非線形制御の場合と線形制御の場合で、ほとんど差はないという結果となった。しかし、グラフを拡大して見ると、どちらのシミュレーション結果も非線形制御の方が、線形制御よりわずかにオーバーシュートが少なかった。

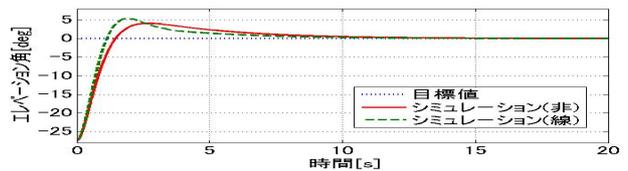


図 4 ステップ状目標軌道の場合のエレベーション角のグラフ

エレベーション角の結果は、線形化の場合の方が若干オーバーシュートは大きくなった。

また、このシミュレーション結果から、非線形性の強いシステムに対する制御系設計を、擬似線形表現と 2 乗和多項式を使うことで実行でき、さらに、目標軌道に追従させられることを示せた。

4.3 実機実験の結果

実機実験の場合のトラベル角 λ の変化を、それぞれ図 5 と図 6、図 7 に示す。

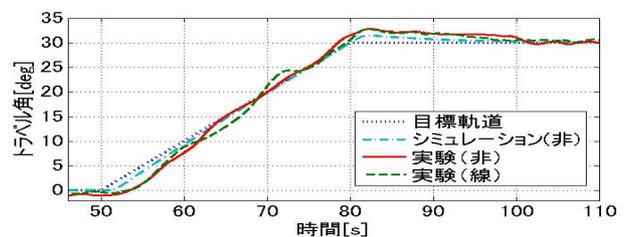


図 5 ランプ状目標軌道の場合のトラベル角のグラフ

ランプ状目標軌道の追従では、線形制御の場合は目標の軌道からずれている。非線形制御の場合は、なめらかに目標軌道に追従している。この結果から、非線形制御の方が目標軌道付近での追従性は高いと言える。

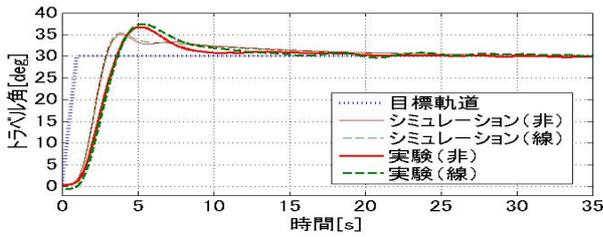


図 6 ステップ状目標軌道の場合のトラベル角全体のグラフ

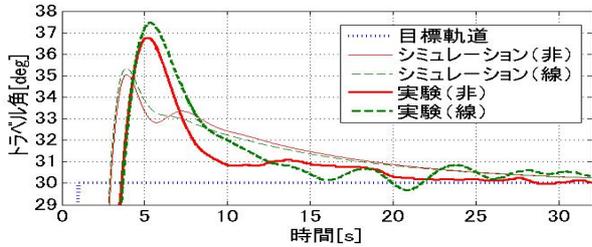


図 7 ステップ状目標軌道の場合のトラベル角拡大のグラフ

図 6 と図 7 のステップ状目標軌道への追従制御では、線形制御はオーバーシュートが大きく、目標軌道付近で振動している。それに対して非線形制御の方は、オーバーシュートが小さく、さらに、目標軌道付近でもなめらかに運動している。この結果から、ステップ状目標軌道の制御の場合も非線形制御の方が応答は良好となった。

次に、ステップ状目標軌道の場合のエレベーション角の変化を図 8 に示す。

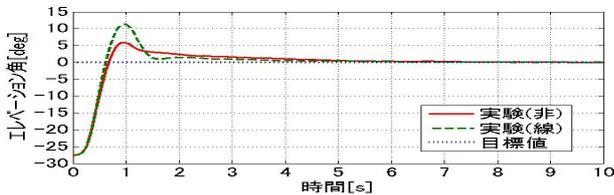


図 8 ステップ状目標軌道の場合のエレベーション角のグラフ

エレベーション角の結果は、シミュレーションと同じく線形制御の方が大きくオーバーシュートをし、非線形制御の方がオーバーシュートを抑えられた。

5 おわりに

5.1 まとめ

本研究では、非線形システムである 3 自由度モデルヘリコプタに対して擬似線形表現を行い、最適サーボ系制御器を 2 乗和多項式を用いて設計した。そして、シミュレーションと実機実験によって、理論の有効性を示した。また、ランプ状目標軌道追従制御の場合とステップ状目標軌道追従制御の両方で、シミュレーションと実機実験ともに非線形制御の応答が良いという結果を示せた。

5.2 今後の課題

今後の課題としては、以下の三つがあげられる。

一つ目は、ヘリコプタの高さであるエレベーション角を線形化するのではなく、エレベーション角も非線形項として残して制御設計をすることである。これによって、より緻密な制御ができるようになる。

二つ目は、ゲイン $K(\rho)$ の設計において、 L だけをピッチ角 ρ の関数にするのではなく、 X も ρ の関数にすることである。最適化問題における、 $\text{trace}(W)$ の最小値を比較すると、 $K(\rho) = L(\rho)X^{-1}$ の場合は 246.7 であったのに対して、 $K(\rho) = LX(\rho)^{-1}$ の場合は 246.3 であり、 X に ρ を依存させた方が、 $\text{trace}(W)$ をわずかに小さくできることが分かった。そのため、シミュレーションでも差が出るのではないかとと思われる。

三つ目は、ピッチ角を大きく動かしながら飛行するシミュレーション例を考えることである。今回のシミュレーションではあまりピッチ角を動かさなかったが、ピッチ角を大きく動かすことで非線形制御の優位性がはっきりすると考える。

参考文献

- [1] 大石泰章：2 乗和多項式とその非線形制御への応用。システム/制御/情報, Vol. 58, No. 11, pp. 449–455, 2014.
- [2] 市原裕之：二乗和に基づく制御系解析・設計。システム/制御/情報, 「制御系解析・設計における数値計算/数式処理ソフトウェアの活用」特集号, Vol. 55, No. 5, pp. 174–180, 2011.
- [3] S. Prajna, A. Papachristodoulou, and F. Wu, “Nonlinear control synthesis by sum of squares optimization: a Lyapunov-based approach.” In *Proceedings of the 5th Asian Control Conference*, Melbourne, Australia, July 2004, pp. 157–165.
- [4] Y. Huang and A. Jadbabaie, “Nonlinear Optimal Control: An enhanced quasi-LPV approach.” In *Proceedings of the IFAC World Congress*, 1999.
- [5] Quanser Inc.: Quanser 3-DOF Helicopter Laboratory Manual. 2011.
- [6] 服部賢仁：バックステッピング法に基づくツインローターヘリコプターの軌道追従制御。南山大学情報理工学部卒業論文, 2014.
- [7] 石飛光章, 西雅俊, 宮地正明：ツインロータ型モデルヘリコプタに対するパラメータ同定を伴う非線形モデル追従制御。日本機械学会論文集 (C 編), Vol. 73, No. 728, pp. 185–190, 2007.
- [8] 長屋秋馬：双線形システムの吸引領域を考慮する H_2 制御器を用いたツインローターヘリコプタの目標値追従制御。南山大学情報理工学部卒業論文, 2013.
- [9] 川田昌克：MATLAB/Simulink による現代制御入門。森北出版, 2011.
- [10] 森川貴光：特性変動が生じる 3 自由度ヘリコプタのロバスト安定化。南山大学情報理工学部卒業論文, 2013.
- [11] 蛭原義雄：LMI によるシステム制御。森北出版, 2012.