

# 混合系直交表の性質についての研究

M2011MM003 秋江一希

指導教員：松田眞一

## 1 はじめに

近年、開発設計の現場に最適化の手法が導入され、設計最適値やロバスト最適値をコンピュータを使って探索的に求めることが広く行われるようになってきた。

このような背景から、応答曲面関数を導出するツールとして実験計画法を使用するようになり、実験計画法の1つのタグチメソッドの関心が高くなってきた。一般に、応答曲面関数におけるモデル化対象の機能を単峰と仮定すると、実験計画は3水準系を採用する必要がある。そこで、 $L_{27}$ などの直交表を用いてモデル式の構築を行うこともある。しかし、 $L_{27}$ 直交表のようなべき乗系( $3^n$ 型)直交表で応答曲面を構築するためには、使用できる列が少なくかなり非効率である。そのため、一部の技術者は $L_{18}$ 直交表のような混合系直交表を使用する傾向にある。それは、タグチメソッドが混合系直交表の使用を推奨していることも一因である。(吉野・立林 [3] 参照)

ところが、混合系直交表は、交互作用を解く計画としては不向きである。それは、 $L_{18}$ 直交表の特徴である交互作用の主効果への複雑な交絡が理由である。

吉野・立林 [3] の研究では、 $L_{18}$ 直交表の特徴である交互作用の主効果への複雑な交絡を実験点配置による可視化によって説明し、 $L_{18}$ 直交表は応答曲面関数構築には不向きであると報告された。本研究は、 $L_{36}$ 直交表の交互作用の主効果への複雑な交絡について実験点配置による可視化によって説明し、混合系直交表の性質について研究することを目的とする。

## 2 応答曲面

応答曲面とは、 $n$ 個( $n > 1$ )の予測変数  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) から、予測される応答  $Y$  の関係式を近似したものである。

$$Y = f(X_1, \dots, X_n) + \quad (1)$$

ここで、 $\epsilon$  は誤差と呼ばれる。応答曲面法において関数形に制限はない。応答曲面法は、製品プロセスの最適化やばらつき減少などの品質工学分野において特にアメリカで実用化されている手法である。(奥野・芳賀 [5] 参照)

## 3 直交表

直交表とは、どの列を取っても、同じ組合せが同じ数だけある表のことである。

混合系の  $L_{18}$  直交表は、2水準系が1列と3水準系が7列の形である。

$L_{36}$  直交表は、2水準系が11列と3水準系が12列の形と2水準系が3列と3水準系が13列の形がある。本研究では、後者の形に対して性質を調べる。(田口 [4] 参照)

## 4 $L_{36}(2^3 \times 3^{13})$ の交絡パターン

この章では、宮川 [2] の研究をまとめる。

表 1 直交表の種類

2水準系	$L_4$	$L_8$	$L_{16} \dots$
3水準系	$L_9$	$L_{27}$	$L_{81} \dots$
混合系	$L_{18}$	$L_{36}$	$L_{54} \dots$

### 4.1 調べ方と同値関係

交互作用の出現パターンを、ある2列に割りつけた2因子間の交互作用と他の1列に割りつけた因子の主効果との交絡パターンに置き換えて調べられた。以下、交互作用を考える2つの因子名を  $A, B$  とし、この交互作用との交絡が問題となる因子名を  $C$  とする。

主効果と交互作用の交絡パターンを調べるために、 $A, B$  を割りつけた列の水準名からなる二元表の各セルに  $C$  の水準名を入れる操作を行う。この操作によってできた二元表を、「 $A, B, C$  の水準名の入れ替えで可換な関係にあるもの同士は同値である」という同値関係のもとに整理分類する。この同値関係のもとで、主効果平方和と交互作用平方和の大きさが変わらないことに注意が必要である。

また、この同値関係は因子  $A$  と  $B$  の因子名の入れ替えを許すが、因子  $A$  と  $C$  あるいは  $B$  と  $C$  の入れ替えは許さない。

次に、各パターンでの交絡の大きさは、 $C$  を含めて他の要因効果がないときに、 $A \times B$  の交互作用平方和の何割が因子  $C$  の主効果平方和として見かけ上現れるかによって定量化される。

このとき、各パターンの特徴付けと平方和の計算は、因子  $A$  と  $B$  がともに3水準のときは、自由度2の  $ab$  系、 $a^2b$  系の成分がある。(奥野・芳賀 [5] 参照)

### 4.2 3因子とも3水準の場合

前小節で与えた同値関係のもとで異なる二元表、すなわち異なる交絡パターンは8通りある。

まず、完全交絡とは、各セルが同一の水準名からなり、 $ab$  系あるいは  $a^2b$  系のいずれかのみと交絡するものである。

次に、部分交絡とは、各セルが1, 2, 3から重複を許して2つ以上を取り出してきたもので構成され、セルの構成は3通りになる。この3通りを一つの単位としたとき、この単位において  $ab$  系または  $a^2b$  系のいずれかのみと交絡するものである。この単位の構成の仕方が、1, 2, 3からの重複の度合いによって5通りあり ( $I \sim V$ )、これにより交絡の大きさが異なることになる。

最後に、混合交絡は上の二つのような規則性がなく、多様な構成のセルが存在し、しかも  $ab$  系と  $a^2b$  系のいずれにも交絡する。

各パターンの交絡の大きさについては、自由度2の  $ab$  系

あるいは  $a^2b$  系の交互作用効果を  $(\alpha\beta)_1, (\alpha\beta)_2, (\alpha\beta)_3$  (ただし,  $(\alpha\beta)_1 + (\alpha\beta)_2 + (\alpha\beta)_3 = 0$ ) で表したとき, 因子  $C$  の各水準にこれらが何回ずつ現れるかを数える。

3 因子とも 3 水準の場合の具体的な交絡の仕方の一部を表 2, 表 3 に示す。(すべてのパターンは宮川 [2] 参照)

表 2 部分交絡 I				表 3 混合交絡 II			
	$B_1$	$B_2$	$B_3$		$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	1 1	1 2	1 2	$A_1$	1 1	1 2	1 3
	2 3	2 3	3 3		2 3	2 2	3 3
$A_2$	1 2	1 1	1 2	$A_2$	1 2	2 3	1 1
	3 3	2 3	2 3		2 3	3 3	1 2
$A_3$	1 2	1 2	1 1	$A_3$	1 2	1 1	2 2
	2 3	3 3	2 3		3 3	1 3	2 3

そして, 3 因子とも 3 水準の 8 パターンについて行った交絡の大きさとお出現回数をまとめたものを表 4 に示す。(計算方法は, 宮川 [2] を参照)

表 4 3 因子とも 3 水準の場合の交絡の大きさとお出現回数

パターン	交絡の大きさ	出現回数
部分交絡 I	0 ~ 1/16	630
部分交絡 II	0 ~ 1/4	36
部分交絡 III	0 ~ 1/4	27
部分交絡 IV	0 ~ 7/16	54
部分交絡 V	0 ~ 9/16	18
混合交絡 I	1/16	54
混合交絡 II	1/16 ~ 9/16	36
完全交絡	0 ~ 1	3

## 5 直交表における交互作用の実験点配置

### 5.1 実験点配置の可視化方法

$L_{36}$  直交表は, 宮川 [2] で報告されたように, 交互作用が主効果に複雑に交絡しており, 見かけ上, 応答曲面法で交互作用が解ける場合でも, 列の別名 (alias) などを使って交絡が存在することを説明できない。そこで, 吉野・立林 [3] と同様の交互作用の実験点配置を図示する。

吉野・立林 [3] では交互作用の実験点配置を次のように行っている。直交表の性質は角振動によって説明できる。そこで, 各実験 (行) 毎に, 任意の 2 列間の交互作用と 3 番目の列の間で, 角振動上の水準点を作る角度を調べて位相差とする。それをを用いて実験点を水準毎に図示する。具体的には, 1 の 3 乗根を  $\omega$  としたとき, 各水準は  $1, \omega, \omega^2$  となり, これを  $0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$  という角度に変換すると, 交互作用は加法定理により角度の和で求められる。この交互作用の各水準 (角度) と第 3 列の各水準 (角度) と位相差を取り図示する。図示の際, 第 3 列 (主効果) を基準と考え, これを横軸とし, これに対して観測される交互作用の水準を縦軸にプロットする。また, 4 回以上重複して出現する水準は白抜きで表現する。(吉野・立林 [3] 参照)

図 1, 図 2 に  $L_{18}$  直交表の [4] と [2][3] 間交互作用  $ab, ab^2$  各成分の実験点配置を示す。[4] と  $ab$  成分の実験点配置は, 直交配置が崩れているが, [4] と  $ab^2$  成分は直交配置になっていることが分かる。この配置は, 宮川・吉田 [1] が示した部分交絡に該当する。

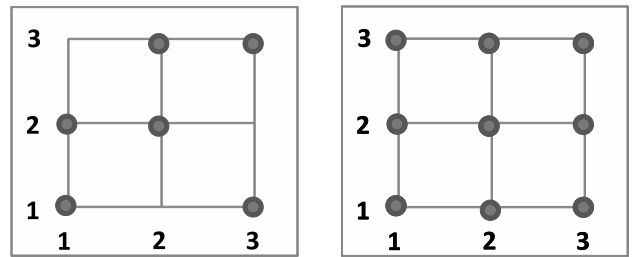


図 1 [4] と [2][3] 間の交絡 ( $ab$  系) 図 2 [4] と [2][3] 間の交絡系 ( $a^2b$  系)

### 5.2 可視化方法の変更点

#### 5.2.1 数学的に同値な方法の提案

吉野・立林 [3] の手法では, 各水準を  $1, \omega, \omega^2$  ( $ab$  系) と  $1, \omega^2, \omega$  ( $a^2b$  系) で 1 の三乗根の性質を用いて交互作用を解いている。しかし, 実験点配置の図を Excel を用いて効率良く作成する場合, 虚数の計算には向いていないため, 剰余関数を用いて解くことを考案した。

まず, 列の水準から 1 を引いて, 交互作用を考える列間の  $mod\ 3$  の加法をとって解いた。また  $a^2b$  系は, 因子  $A$  列を 2 倍して解いた。

これは, 5.1 節の角度の話から  $\omega$  による積の計算は  $mod\ 360$  の角度の加法の計算と同値であることが分かるが,  $360$  を  $120$  で割ることで表 5 のように  $mod\ 3$  の加法の計算と同値になることが分かる。

表 5 吉野・立林 [3] の手法と比較

	因子 A の水準	因子 B の水準	因子 A と因子 B の観測される交互作用の水準
吉野・立林 [3] の手法	第 1 水準 = 1	第 2 水準 = $\omega$	$1 \times \omega = \omega$ = 第 2 水準
提案する手法	第 1 水準 = 0	第 2 水準 = 1	$= mod(0+1, 3) = 1$ = 第 2 水準

#### 5.2.2 記号法の拡張

吉野・立林 [3] の方法は, 4 回以上重複して出現する水準を白抜きの丸で表現している。しかし,  $L_{36}(2^3 \times 3^{13})$  では, 重複する回数が多いため二種類の記号では, 不均衡の図をうまく表すことができないので, 観測される交互作用の水準の出現回数に合わせて, 表 6 のように記号を与えた。

表 6  $L_{36}(2^3 \times 3^{13})$  で観測される交互作用の水準の出現回数と記号

出現回数 記号	2	3	4	5	6	8	9	12
------------	---	---	---	---	---	---	---	----

### 5.3 $L_{36}(2^3 \times 3^{13})$ における交絡の可視化

#### 5.3.1 [6] と [4][5] 間交互作用の交絡

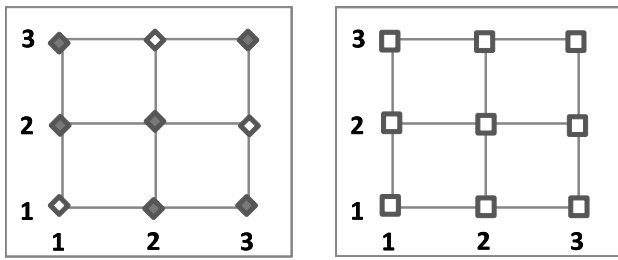


図3 [6] と [4][5] 間の交絡 ( $ab$  系) 図4 [6] と [4][5] 間の交絡 ( $a^2b$  系)

図3, 図4に [6] と [4][5] 間交互作用  $ab$  (左),  $a^2b$  (右) 各成分の実験点配置を示す。図3より, [6] と  $ab$  成分の実験点配置は, 直交配置が崩れているが, 図4より [6] と  $a^2b$  成分は  $3 \times 3$  の配置を形成しており, 直交配置になっていることが分かる。この配置は, 宮川 [2] が示した部分交絡 I に該当する。

#### 5.4 [8] と [4][5] 間交互作用の交絡

図5, 図6に [8] と [4][5] 間交互作用  $ab$ ,  $a^2b$  各成分の実験点配置を示す。この組合せでは  $ab$  成分は [8] と部分的に交絡しており,  $a^2b$  成分は [8] に直交していることがわかる。この配置は, 宮川 [2] が示す部分交絡 IV に該当する。

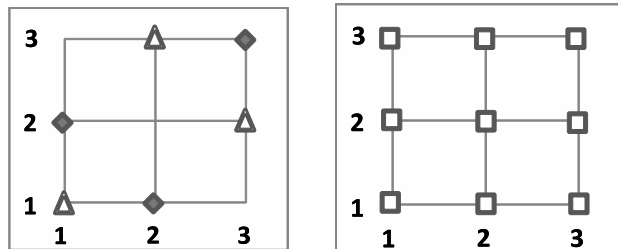


図5 [8] と [4][5] 間の交絡 ( $ab$  系) 図6 [8] と [4][5] 間の交絡 ( $a^2b$  系)

#### 5.5 [16] と [4][5] 間交互作用の交絡

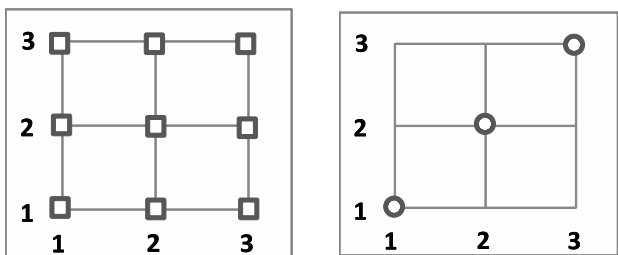


図7 [16] と [4][5] ( $ab$  系) 図8 [16] と [4][5] ( $a^2b$  系)

図7, 図8に [16] と [4][5] 間交互作用  $ab$ ,  $a^2b$  各成分の実験点配置を示す。この組合せでは,  $a^2b$  成分が [16] に

完全交絡しており,  $ab$  成分は [16] に直交している。この配置は, 宮川 [2] が示す完全交絡に該当する。

#### 5.6 [16] と [6][7] 間交互作用の交絡

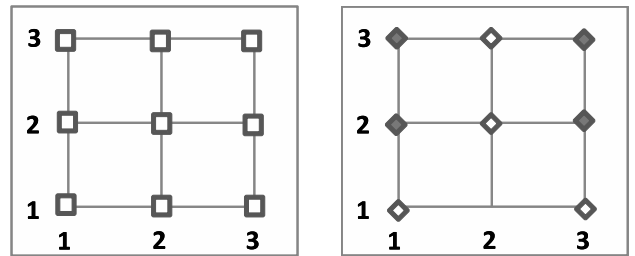


図9 [16] と [6][7] ( $ab$  系) 図10 [16] と [6][7] ( $a^2b$  系)

図9, 図10の配置は, 宮川 [2] が示す部分交絡 III に該当する。

#### 5.7 [16] と [6][9] 間交互作用の交絡

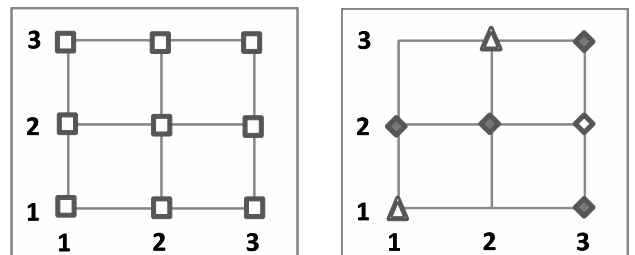


図11 [16] と [6][9] ( $ab$  系) 図12 [16] と [6][9] ( $a^2b$  系)

図11, 図12に [16] と [6][9] 間交互作用  $ab$ ,  $a^2b$  各成分の実験点配置を示す。この組合せでは,  $ab$  成分は [16] に直交しており,  $a^2b$  成分は (重複回数9), (重複回数6), (重複回数3)の3つの記号で表される特殊な形となる。この配置は, 宮川 [2] が示す部分交絡 V に該当する。

#### 5.8 [7] と [6][16] 間交互作用の交絡

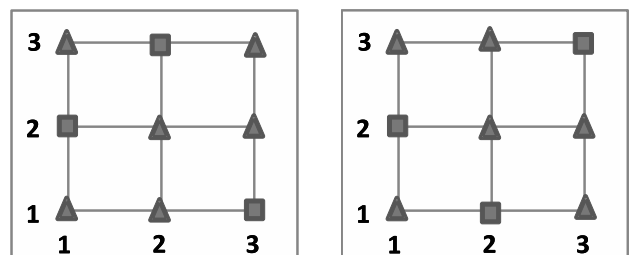


図13 [7] と [6][16] ( $ab$  系) 図14 [7] と [6][16] ( $a^2b$  系)

図13, 図14に [7] と [6][16] 間交互作用  $ab$ ,  $a^2b$  各成分の実験点配置を示す。この組合せでは, 基本的には  $3 \times 3$  の配置であることが分かる。しかし, 位相差が0になり重複する実験点が存在する。すなわち繰返し不揃いの二元配置計画になっている。この配置は, 宮川 [2] が示す混合交絡 I に該当する。

### 5.9 [9] と [6][16] 間交互作用の交絡

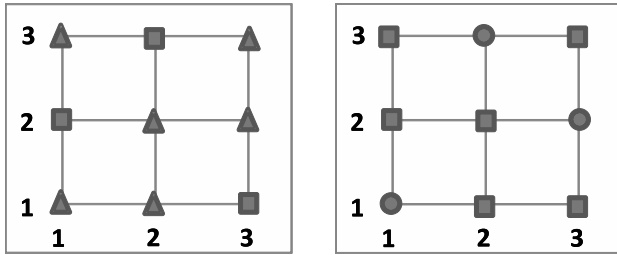


図 15 [9] と [6][16]( $ab$ 系) 図 16 [9] と [6][16]( $a^2b$ 系)

図 15, 図 16 の配置は, 宮川 [2] が示す混合交絡 II に該当する。

### 5.10 [8] と [7][13] 間交互作用の交絡

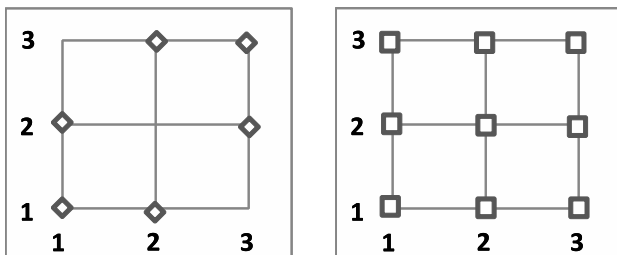


図 17 [8] と [7][13]( $ab$ 系) 図 18 [8] と [7][13]( $a^2b$ 系)

図 17, 図 18 の配置は, 宮川 [2] が示す部分交絡 II に該当する。

### 5.11 交互作用の交絡のまとめ

完全交絡は, [4], [5], [16] がらみの 3 通りである。部分交絡 III と V, 混合交絡 I と II は ([16] がらみの交互作用の一部が他の列に交絡) である。

完全交絡は, 実験点配置から分かるように, 主効果に強く交絡している。もし, 想定していない完全交絡や混合交絡 II を生じる交互作用が存在すると, それらが交絡する主効果に見かけ上の効果を与えてしまい, 主効果の見積りを間違える可能性が強い。

したがって, 主効果を解く上で問題となる完全交絡, 混合交絡 II の影響を受ける主効果列は, [16] のみであることが分かるので,  $L_{36}(2^3 \times 3^{13})$  は [16] を避けて割りつければ, もし交互作用が存在しても, それらの交絡による主効果への深刻な影響は回避することができる。

## 6 誤った交互作用の解き方

### 6.1 交互作用の検討手順

前節では,  $L_{36}(2^3 \times 3^{13})$  直交表の実験点配置を可視化することで, 交互作用が存在すると主効果に複雑に交絡し主効果の見積もりを間違える可能性があることを明確にした。

本節では,  $L_{36}(2^3 \times 3^{13})$  直交表から応答曲面モデルが解けるか検討する。

1. 列を基準化する。(平均 0, 分散 1)

2. 検討すべき応答曲面モデルの計画行列を作る。

(割付ける列の一次項、二次項、積項)

3. 計画行列の相関係数行列の固有値を計算する。

4.  $CN$  値 (最大固有値と最小固有値の比) を計算する。(吉野・立林 [3] 参照)

表 7  $L_{36}(2^3 \times 3^{13})$  から 4 因子モデルを推定するための計画行列の相関係数行列の固有値 (抜粋)

A	B	C	D	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	CN値
[4]	[5]	[6]	[7]	2.24	1.36	1.36	1.17	1.02	1.02	1.00	0.87	0.87	0.79	0.67	0.31	0.31	7.20	
[4]	[5]	[6]	[8]	1.90	1.42	1.41	1.26	1.19	1.13	1.00	1.00	0.96	0.81	0.72	0.70	0.27	0.23	8.26
[4]	[5]	[6]	[9]	1.58	1.36	1.25	1.15	1.13	1.13	1.00	1.00	1.00	0.90	0.75	0.75	0.52	0.50	3.15
[4]	[5]	[6]	[10]	1.93	1.91	1.62	1.28	1.12	1.01	1.00	1.00	0.84	0.80	0.75	0.37	0.37	0.60	$\infty$
[4]	[5]	[6]	[11]	1.39	1.33	1.27	1.19	1.14	1.04	1.00	1.00	0.90	0.86	0.82	0.73	0.71	0.63	2.22

## 6.2 まとめ

モデルに [4], [5], [16] を含む場合は,  $CN$  値が  $\infty$  になる。これは, 固有値の最小の値が 0 であり, ある変数がある変数によって説明し尽くされている。

また, 4 因子モデルの場合 [5], [10], [13], [16] が,  $CN$  値が 2.22 と全体で最小になり弱い多重共線性の疑いがある  $CN$  値 5 ~ 10 より低く, 固有値の最小でも 0.63 もあるので,  $L_{36}(2^3 \times 3^{13})$  直交表では, 4 因子モデルの場合交互作用が解けることがわかった。

しかし, [16] は避けるべき列であったため利用されない可能性がある。[16] が絡まない  $CN$  値の最小は [4], [5], [6], [9] など複数で得られる 3.15 であった。これらの組み合わせでも応答曲面を解くことができると考えられる。

また, 5 因子モデルの場合 [16] を用いても  $CN$  値の最小値は 5.98 となり, 解析に適さないことに注意する。

## 7 おわりに

本研究では, 混合系直交表の特徴である交互作用の主効果への複雑な交絡を実験点配置によって可視化することで, 交互作用の問題を解く上でどの列を選べたらよいか詳しくわかった。また,  $L_{36}(2^3 \times 3^{13})$  から応答曲面モデルを解く場合, 4 因子モデルを推定する場合は交互作用を解くことができるが, 5 因子モデルを推定するには解析に適さないこともわかった。今後は, 2 水準が絡む場合の可視化方法の検討が必要である。

## 参考文献

- [1] 宮川 雅巳, 吉田 勝実:  $L_{18}$  直交配列表における交互作用の出現パターンと割りつけの指針, 『品質』, 22(2), 12-18, 1992.
- [2] 宮川 雅巳:  $L_{36}$  直交配列表における主効果と交互作用の交絡パターンとその大きさ, 『品質』, 23(4), 92-97, 1993.
- [3] 吉野 睦, 立林 和夫:  $L_{18}$  直交表の交互作用の交絡の可視化, 日科技連 SQC 実践研究会, 2011.
- [4] 田口 玄一: 『第3版実験計画法 (上)』, 丸善, 1976.
- [5] 奥野 忠一, 芳賀 敏郎: 『実験計画法』, 培風館, 1969.