

災害時の代替経路の確保を考慮した道路ネットワーク構築法

M2010MM045 山崎諭

指導教員：鈴木敦夫

1 はじめに

東日本大震災を受け、主要経路が寸断されたときに代わりとなる経路(代替経路)の重要性が見直されている。資料[2]によれば、国土交通省でも、現在、代替経路を評価する方法が議論されている。災害で主要経路が通行できないとき、代替経路が大きく迂回するものでは、救援活動に遅れが生じてしまう。したがって、救援活動を迅速に行うためには、主要経路と同じくらいの所要時間で、主要経路との重複が少ない経路を予め用意することが有効であると考えられる。しかし、国あるいは地方自治体にとって、災害時に主要経路の代わりとなる経路が確保された道路網を実現するために、どの道路を改良すればよいかは難しい問題である。本研究では、このような状況を踏まえて、上記の問題に対して、一つの指針を示すような数理モデルを提案する。一般に、目的地への主要経路は最短経路であると考えられるため、本稿では、最短経路に対する代替経路を考える。

我々はこれまでも、交通量の分散や代替経路の確保を目的とした道路網整備計画について研究を行ってきた[5][6]。それらの研究では、最短経路と同じくらいの所要時間である経路を作ることで、交通量の分散や代替経路の確保が実現できるとしていた。本研究では、その考えを発展させ、災害に対して、より頑健な道路網を構築するために、どの道路を改良すべきかという問題に取り組む。そのために、まず、代替経路の厳密な定義を文献[1]を参考に与えた。新たな定義は、災害時における道路寸断に対する耐性に着目した定義になっており、そのような代替経路を増加させることで、災害に備えた道路網の実現を図る。実現される道路網が、平時において交通量を分散させる道路網であるという特徴は、本稿のモデルにおいても継承される。提案する数理モデルでは、改良すべき道路を、ある線型計画問題の解として提案される。その線形計画問題は、最短経路問題の感度分析により得られる情報と、最短経路と代替経路の候補となる経路の重複率を用いて定式化される。また、連続型ナップサック問題への書き換えることができ、それにより、改良する道路の優先順位も明確になる。計算機実験によれば、愛知県庁から大阪府庁への代替経路を増加させることができた。

2 記号の定義

道路ネットワークを、 N を頂点集合、 E を枝集合とする有向グラフ $G = (N, E)$ で表す。頂点数と枝数はそれぞれ $|N| = n, |E| = m$ する。また、各枝 $e \in E$ には道路長を表す長さ l_e が与えられている。本稿では、グラフの有向道(枝の部分集合)を経路と呼び、経路 P の始点と終点をそれぞれ s_P, t_P で表す。枝集合 E の部分集合 F について、 F に含まれる枝の枝長の総和 $\sum_{e \in F} l_e$ を $l(F)$ で表す。

特に、経路 P の長さ $\sum_{e \in P} l_e$ を $l(P)$ で表す。ODペアの集合を OD と書き、 OD ペア $p \in OD$ に対する最短経路を S_p と表す。また、 $p = (s, t)$ のときには、 $S_{(s, t)}$ とも表す。実際の道路ネットワークにおいては、最短経路が複数存在することは稀であると考えられるので、最短経路は一意的であると仮定する。経路 P に対する経路 Q の重複率を、 $l(P \cap Q)/l(P)$ と定める。また、 P と Q の端点と同じであるとき、 P に対する Q の伸長率を $l(Q)/l(P)$ と定義する。

3 代替経路の定義

3.1 Abraham et al. よる代替経路の定義

次は文献[1]における代替経路の定義である。ODペア $p = (s, t)$ に対して、経路 A_p を s を始点、 t を終点とする経路のひとつとする。ただし、 A_p は最短経路 S_p ではないとする。このとき、 A_p がODペア p に関する代替経路であるとは、以下の三つの条件を満たすことをいう。

条件 1. 経路 A_p は $\frac{l(A_p \cap S_p)}{l(S_p)} \leq r_1$ を満たす。

条件 2. 経路 A_p は T -局所最適である。

条件 3. 経路 A_p は $(1 + \epsilon)$ -一様伸長である。

条件 1 の $r_1 (0 \leq r_1 \leq 1)$ は、重複率の上限を表すパラメータで、限界重複率と呼ぶ。

条件 2 の経路 A_p が T -局所最適であるとは、経路 A_p の部分経路 A' のうち、 $l(A') > T$ かつ $l(A'') < T$ であるものはすべて最短経路 $S_{(s, t, A')}$ に等しいことをいう。ここで、 A'' は A' の最初の枝、または最後の枝を除いた部分経路を表す。文献[1]では、 T をパラメータ $\alpha (0 < \alpha < 1)$ を用いて、 $T = \alpha l(S_p)$ としている。

条件 3 の経路 A_p が $(1 + \epsilon)$ -一様伸長であるとは、経路 A_p のすべての部分経路 A' (経路 A_p を含む) は、それと始点終点を同じくする最短経路 $S_{(s, t, A')}$ に対して、 $(1 + \epsilon)$ 以下の伸長率であることをいう。すなわち、 $\frac{l(A')}{l(S_{(s, t, A')})} \leq (1 + \epsilon)$ である。ここで、 ϵ は $\epsilon \geq 0$ のパラメータである。図 1 は $(1 + \epsilon)$ -一様伸長を満たさない例である。下の経路は最短経路 $S_{(s, t)}$ を表しており、上の経路は二つの最短経路 $S_{(s, v)}$ と $S_{(v, t)}$ をつなぎ合わせた経路 $S_{(s, v)} \cup S_{(v, t)}$ を表す。上の経路が条件 1 と 2 を満たしたとしても、頂点 i, j 間にショートカットが存在した場合、 $(1 + \epsilon)$ -一様伸長になるとは限らない。条件 3 によって、このようなショートカットが存在するものは代替経路としない。

上記の定義を満たす経路は、指数オーダの個数となり得るため、Abraham et al. は、一つの頂点 v を節点に二つの最短経路 $S_{(s, v)}$ と $S_{(v, t)}$ を接続することで得られる経路(単一頂点経由最短経路) $P_v = S_{(s, v)} \cup S_{(v, t)}$ から代替経路を見つける方法を提案している。最短経路が一意的であるという仮定の下で、単一頂点経由最短経路は、

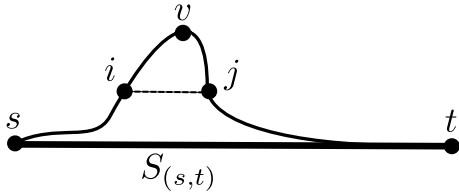


図1 $(1 + \epsilon)$ -様伸長を満たさない例

多項式オーダの個数に収まる。さらに、単一頂点経由最短経路を対象とした場合、条件2は頂点 v の周辺で、条件を満たすかを調べればよいため、効率よく代替経路かどうかを判定することができる。

3.2 本稿における代替経路の定義

文献 [1] を参考に、代替経路を以下のように定義する。

重複条件 経路 A_p は $\frac{l(A_p \cap S_p)}{l(S_p)} \leq r_1$ を満たす。

伸長条件 経路 A_p は $(1 + \epsilon(l(\cdot)))$ -伸長である。

重複条件は Abraham et al. の条件1と同じである。伸長条件は Abraham et al. の条件3に対応するもので、条件にある、関数 $\epsilon(z)$ は z に関して単調減少な関数である。経路 A_p は $(1 + \epsilon(l(\cdot)))$ -伸長であるとは、経路 A_p のすべての部分経路 A' (経路 A_p を含む) が、それと始点終点を同じくする最短経路 $S_{(s_{A'}, t_{A'})}$ に対して、 $(1 + \epsilon(l(S_{(s_{A'}, t_{A'})})))$ 以下の伸長率であることをいう。伸長条件を採用した理由は、次のような考察による。一般的に、距離が長いOD間の代替経路の場合、その経路長は最短経路長に近いことが望まれる。一方で、距離が短いOD間の代替経路の場合、道路の状況や、運転者の好みなどが優先され、必ずしも最短経路長に近いわけではない。このような経路選択の傾向を考慮して、伸長率の上限を経路長 $l(\cdot)$ に対して、単調減少な関数 $(1 + \epsilon(l(\cdot)))$ で与えることとした。

具体的には、 $\epsilon(z)$ は、式 (1) のような区分線形で与えた。本稿では、枝長 l_e を時間 (秒) で与えている。

$$\epsilon(z) = \begin{cases} \frac{4}{10} - \frac{3}{100}z & (0 \leq z < 900), \\ \frac{29}{90} - \frac{1}{450}z & (900 \leq z < 9000), \\ \frac{19}{180} - \frac{1}{1000}z & (9000 \leq z \leq 90000). \end{cases} \quad (1)$$

この代替経路の定義が妥当性を検証するために、既存の定義との比較を行った。図2は、愛知県庁から東京都庁への最短経路 (東名高速道路) と、本稿の代替経路の定義を満たす経路 (中央自動車道) を表している。図3は、大阪府庁から山口県庁への最短経路 (中国自動車道) と、本稿の代替経路の定義を満たす経路 (山陽自動車道) を表している。既存の定義では、どちらも代替経路は得られなかった。得られた代替経路は、どちらも一般に認知されている代替経路であることから、本稿で扱う代替経路の定義は妥当なものであると考える。

4 提案モデルの準備

提案モデルでは、各ODペア p と各枝 e に対して、次に定義される値 $\alpha_{e,p}, \beta_{e,p}$ を予め計算しておく必要がある。

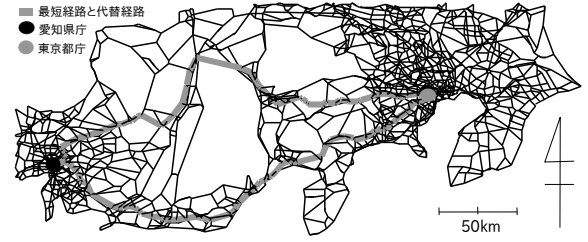


図2 愛知県庁・東京都庁間の最短経路と代替経路

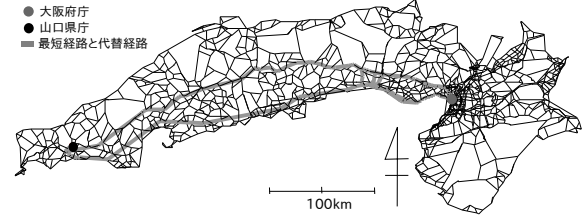


図3 大阪府庁・山口県庁間の最短経路と代替経路

4.1 枝長下限 $\alpha_{e,p}$

値 $\alpha_{e,p}$ は、各ODペア $p \in OD$ と各枝 $e \in E$ に対して、次のようにして定まる値である。枝 e の長さを短縮し、ある値になったとき、それまでの最短経路 S_p の他に新たな最短経路が生じたとする。そのときの値を $\alpha_{e,p}$ とする。ただし、枝の長さを0としても新たな最短経路が生じない場合は、 $\alpha_{e,p} = 0$ と定める。値 $\alpha_{e,p}$ は最短経路問題の感度分析によって求めることができる。具体的に、 $\alpha_{e,p}$ は $e = (i, j)$ のとき、式 (2) によって与えられる。ただし、 $\gamma = \min\{l(S_p), l(S_{(s,i)}) + l(S_{(j,t)})\}$ である。

$$\alpha_{e,p} = \begin{cases} 0 & (e \in S_p), \\ l(S_p) - \gamma & (e \notin S_p). \end{cases} \quad (2)$$

最短経路問題の感度分析は、Ramaswamy et al. [4] のアルゴリズムを用いて効率的に計算できる。

4.2 伸長制限付き重複率 $\beta_{e,p}$

まず、潜在的代替経路を定義する。枝 $e = (i, j)$ とODペア $p = (s, t)$ に関する潜在的代替経路 $T_{e,p}$ を、式 (3) のように定める。

$$T_{e,p} = S_{(s,i)} \cup \{(i, j)\} \cup S_{(j,t)} \quad (3)$$

潜在的代替経路 $T_{e,p}$ を用いて、値 $\beta_{e,p}$ を、式 (4) のように定める。

$$\beta_{e,p} = \begin{cases} 1 & (\delta > (1 + \epsilon(l(S_p)))l(S_p)), \\ \frac{l(S_p \cap T_{e,p})}{l(S_p)} & (\delta \leq (1 + \epsilon(l(S_p)))l(S_p)). \end{cases} \quad (4)$$

ここで、 $\delta = l(S_p \cap T_{e,p}) + (1 - r_2)l(T_{e,p} \setminus S_p)$ である。また、 $r_2 (0 < r_2 \leq 1)$ は、短縮率の上限を表すパラメータで、限界短縮率と呼ぶ。 δ は、 S_p と $T_{e,p}$ に共通しない $T_{e,p}$ の枝をすべて上限まで改良したときの $T_{e,p}$ の経路長を表す。伸長条件において、 $1 + \epsilon(l(S_p))$ は、最短経路 $l(S_p)$ に対して、代替経路が満たすべき伸長率の上限である。よって、 $\delta > (1 + \epsilon(l(S_p)))l(S_p)$ である潜在的代替経路 $T_{e,p}$

は、 S_p と $T_{e,p}$ に共通しない $T_{e,p}$ の枝をすべて上限まで短縮しても伸長条件を満たさないため、代替経路になり得ない。あとで詳しく説明するが、このとき、 $\beta_{e,p} = 1$ とすることで、OD ペア p に関して、枝 e が短縮の候補となることを予め除外する。

4.3 $\alpha_{e,p}$ と $\beta_{e,p}$ の求め方

$\alpha_{e,p}$ と $\beta_{e,p}$ は、与えられたネットワーク G において、すべての OD ペア $p = (s, t) \in \text{OD}$ に対して、以下のアルゴリズムを実行することで求められる。

$\alpha_{e,p}, \beta_{e,p}$ を求めるアルゴリズム

Step1. ペア p における最短経路 S_p を求める。

Step2. $e \in S_p$ ならば、 $\alpha_{e,p} := 0, \beta_{e,p} := 1$ 。

Step3. 各頂点 $i \in N$ に対し、始点 s からの最短経路 $S_{(s,i)}$ と最短経路長 $l(S_{(s,i)})$ を求める。同様に、各頂点 $j \in N$ から終点 t への $S_{(j,t)}$ と $l(S_{(j,t)})$ を求める。

Step4. 各頂点 $i \in N$ に対して、
 $a(i) := l(S_{(s,i)} \cap S_p), b(i) := l(S_{(i,t)} \cap S_p)$ 。

Step5. $e \notin S_p$ ならば、
 $\alpha_{e,p} := l(S_p) - \min\{l(S_p), l(S_{(s,i)}) + l(S_{(j,t)})\}$ 。

Step6. $e \notin S_p$ ならば、
 $l(S_p \cap T_{e,p}) + (1 - r_2)l(T_{e,p} \setminus S_p) \leq (1 + \epsilon l(S_p))l(S_p)$ のとき、 $\beta_{e,p} := \frac{a(i) + b(j)}{l(S_p)}$;
そうでなければ、 $\beta_{e,p} := 1$ 。

今回実装したプログラムでは、Step3 に最も多くの計算量を要す。Step3 ではヒープによる Dijkstra 法を用いるので、一つの OD ペア p に対し、 $O((m+n) \log n)$ で $\alpha_{e,p}$ と $\beta_{e,p}$ を求めることができる。

5 提案モデル

この節では、道路改良箇所の選定を支援するための数理モデル(提案モデル)について説明する。短縮の候補となる枝(道路)の集合を $F \subseteq E$ とする。各枝 $e \in F$ に対して、単位長さあたりの短縮費用を b_e とし、短縮するための総予算を B で表す。決定変数は、枝 e を短縮する長さ x_e である。

提案する線型計画問題の目的関数は二通りの表現形式を持つ。初めに、制約式と合わせて、最小化問題として表現されるモデルを紹介する。

最小化問題として定式化する場合、最小化する目的関数は式(5)のような短縮後の枝長 $(l_e - x_e)$ と $\alpha_{e,p}$ の差の総和である。ただし、和は各枝 $e \in F$ と $\beta_{e,p} \leq r_1$ であるすべての OD ペア $p \in \text{OD}$ に対して取られる。第4節の定義によると、 $\alpha_{e,p}$ は、枝 e の長さ l_e が $\alpha_{e,p}$ まで短縮されたとき、OD ペア p に対する最短経路が少なくとも一つ増加するという値である。つまり、枝 e の短縮後の長さ $(l_e - x_e)$ が $\alpha_{e,p}$ に近づくほど、枝 e に対応する潜在的代替経路 $T_{e,p}$ の長さは、最短経路長 $l(S_p)$ に近づく。この性質に基づき、目的関数(5)を最小化すれば、伸長条

件を満たす経路の増加が期待できる。さらに、限界重複率 r_1 により、和を取る OD ペア p を制限することで、重複条件を満たす経路が増加し易いようにする。制約式と合わせて、提案モデルは次のように定式化される。

$$\min. \sum_{e \in F} \sum_{p \in \text{OD}: \beta_{e,p} \leq r_1} \{(l_e - x_e) - \alpha_{e,p}\} \quad (5)$$

$$\text{sub. to } \sum_{e \in F} b_e x_e \leq B, \quad (6)$$

$$l_e - x_e \geq \alpha_{e,p} \quad e \in F, p \in \text{OD}, \quad (7)$$

$$x_e \leq r_2 l_e \quad e \in F, \quad (8)$$

$$x_e \geq 0 \quad e \in F. \quad (9)$$

式(6)は、枝 e を x_e だけ短縮したときの費用 $b_e x_e$ の総和が、総予算 B を越えないという制約である。式(7)は、枝 e の短縮後の長さ $(l_e - x_e)$ が、 $\alpha_{e,p}$ よりも小さくならないという制約である。枝 e の短縮後の長さ $(l_e - x_e)$ が、 $\alpha_{e,p}$ よりも小さくなると、主要経路である最短経路が変わってしまう。そのような場合をなるべく避けるために、短縮可能な長さを制限する。式(8)は、枝 e を短縮する長さ x_e が、 $r_2 l_e$ を越えないという制約である。道路を改良する方法として、拡幅、舗装、直線化、高速化を想定している。したがって、短縮する長さ x_e には限界があり、現状の道路を大幅に短くすることは、十分に予算があつたとしても、物理的に不可能であると考えられる。そこで、限界短縮率 r_2 を用いて、各枝 e の短縮可能な長さ x_e を元の枝長 l_e の r_2 倍に制限する。式(9)は、短縮する枝の長さは非負でなければならないという制約である。

次に、上のモデルを書き換えることで得られる、最大化問題として定式化されたモデルを紹介する。この書き換えにより、短縮する枝の選択順序が明確になる。各枝 $e \in F$ に対して、 $\beta_{e,p}$ が r_1 以下となる OD ペアの個数を $\#\{p \in \text{OD} : \beta_{e,p} \leq r_1\}$ で表す。 $l_e, \alpha_{e,p}$ が定数であることに注意すれば、目的関数(5)は、次のように書き換えることができる。

$$\max. \sum_{e \in F} (\#\{p \in \text{OD} : \beta_{e,p} \leq r_1\} x_e) + \text{定数}. \quad (10)$$

この書き換えにより、提案モデルは連続型ナップサック問題であることが分かる。したがって、提案モデルの最適解は、貪欲算法を用いて求められる。つまり、

$$\frac{\#\{p \in \text{OD} : \beta_{e,p} \leq r_1\}}{b_e} \quad (11)$$

の大きい順に、制約条件(6)(7)(8)(9)を満たす範囲で、変数 x_e を可能な限り大きくしたものが最適解となる。式(11)の分子には r_1 が入るので、最適解が限界重複率 r_1 によって影響を受けることに注意する。

短縮する枝の選択順を与える式(11)は、次のようにして、枝 e の費用対効果を表していると解釈することができる。まず、 $\beta_{e,p} \leq r_1$ を満たすような潜在的代替経路 $T_{e,p}$ は、重複条件をみたとことに注目する。さらに、 $r_1 < 1$ なので、 $\beta_{e,p}$ の定義により、 $\beta_{e,p} \leq r_1$ であるような潜在的

代替経路 $T_{e,p}$ は、枝の短縮により、伸長条件を満たし得る経路である。したがって、各枝 $e \in E$ について、式 (11) の分子 $\#\{p \in OD : \beta_{e,p} \leq r_1\}$ は、潜在的代替経路 $T_{e,p}$ が代替経路になり得る OD ペア p の個数を表していると言える。よって、 $\#\{p \in OD : \beta_{e,p} \leq r_1\}$ が大きい枝ほど、その枝 e を短縮することで、多くの OD ペアに対して、代替経路をもたらすと考えられる。代替経路の増加が枝 e の短縮による効果であるから、 $\#\{p \in OD : \beta_{e,p} \leq r_1\}$ は、その効果の度合いを表すものと理解できる。一方、分母 b_e は、枝の単位長さあたりの短縮費用である。したがって、式 (11) は、代替経路の確保に関して、枝 e の短縮の費用対効果を表していると解釈できる。このような解釈により、提案モデルは、費用対効果の高い道路から改良箇所として選定するモデルであると理解することができる。

6 計算機実験

近年、東海地震の発生が危惧されている。そこで、愛知県を中心とする広域圏において、代替経路を確保するための改良道路区間の選定を提案モデルを用いて行う。

使用する道路ネットワークは国土数値情報の道路データ (平成 7 年) [2] を元に作成した。対象とする道路は高速道路、一般国道、主要地方道とし、頂点数は 1981、枝数は 6672 である。枝の長さは、高速道路を時速 80km/h、一般国道と主要地方道を時速 40km/h としたときの移動時間 (秒) とした。OD は愛知県庁から大阪府庁への一つを考え、すべての枝を短縮の対象とする。枝の短縮費用を 100~200 (万円/秒) の一様乱数で与え、総予算 B は 30,000 (万円) とする。限界重複率 r_1 は 0.4、限界短縮率 r_2 は 0.1 とする。図 4 は、使用した道路ネットワーク上に、黒い点で OD の愛知県庁と大阪府庁を示し、灰色の太線で愛知県庁から大阪府庁への最短経路を表したものである。使用した道路データが平成 7 年のものであるため、新名神高速道路は存在しない。そのため、最短経路には名神高速道路が選ばれた。

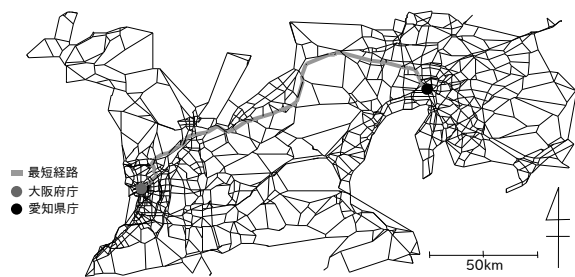


図 4 OD ペアの位置と県庁から府庁への最短経路

モデルの計算時間は次のようになった。OD ペア $p \in OD$ 、枝 $e \in E$ に対して、第 4.3 節のアルゴリズムを用いて、 $\alpha_{e,p}$ と $\beta_{e,p}$ を同時に求めたところ、計算時間は、約 0.15 秒であった。また、提案モデルを連続型ナップサック問題として解いたところ、計算時間は約 0.02 秒であった。

実験により選ばれた 16 本の枝を短くすると、代替経路が現れた。図 5 の太線は選択された枝を示しており、図 6 は最短経路と代替経路を示している。図 6 があるように、短縮後に代替経路と判定された経路は、現在の新名神高速道路と同じような経路となった。図 6 の太丸は新



図 5 選定された枝



図 6 最短経路と改良により得られた代替経路

名神高速道路の亀山 JCT と草津 JCT である。NEXCO 西日本の資料 [3] によれば、新名神高速道路の設備効果の一つとして、代替経路の確保が挙げられている。実験により得られた代替経路が、現在の新名神高速道路と同じような経路であることは、今回導入した代替経路の定義の妥当性と、提案モデルの有効性を示していると考えられる。

7 おわりに

実験により、代替経路の定義の妥当性と、提案モデルの有効性を示すことが出来た。今後はより新しいデータと、様々な道路ネットワークに対して、実験を行いたい。

参考文献

- [1] I. Abraham, D. Delling, A. V. Goldberg, R. F. Werneck: Alternative routes in road networks. *Proceedings of 9th International Symposium on Experimental Algorithms*, pp. 23–34, 2010.
- [2] 国土交通省, <http://www.mlit.go.jp/>.
- [3] NEXCO 西日本, <http://www.w-nexco.co.jp/>.
- [4] R. Ramaswamy, J. B. Orlin, N. Chakravarti: Sensitivity analysis for shortest path problems and maximum capacity path problems in undirected graphs. *Math. Program., Ser. A* 120: pp. 355–369, 2005.
- [5] 山崎諭, 小市俊悟, 鈴木敦夫: 交通量の分散化を目指した工事計画決定のモデル化, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2011 年春季研究発表会, pp. 44–45, 2011.
- [6] 山崎諭, 小市俊悟, 鈴木敦夫: 災害発生時における代替経路の確保を考慮した新しい工事区画選定法, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2011 年秋季研究発表会, pp. 10–11, 2011.