

# 自然演繹法による $\epsilon$ - $N$ 論法の分析

M2010MM022 川邊達治

指導教員：佐々木克巳

## 1 はじめに

本研究の目的は、自然演繹法の推論規則を拡張して、 $\epsilon$ - $N$  論法を用いた証明を導出図で表現すること、および、その表現を用いて対象とする証明のしくみを明らかにすることである。具体的には、 $\epsilon$ - $N$  論法を用いて証明されている 11 の性質を対象とし、次の I,II を行った。

I これらの証明を導出図で表現するために必要な推論規則を整理し、[1] の推論規則に追加した。この追加によって拡張された導出図で、 $\epsilon$ - $N$  論法の証明を表現した。

II I の導出図から、 $\epsilon$ - $N$  論法における変数に代入すべき項の選択の仕組みを考察した。2 つの視点、すなわち、それらの項が、どの変数に依存して決まるか、および、それらの項がどのように選ばれるのかに焦点を絞って考察した。そして、その仕組みによって、11 の性質における「代入すべき項」が選ばれることを示し、実際の証明を記述した。

本稿では、対象とした 11 の性質、I の外観、II の選択の仕組みについて述べる。

## 2 対象とする性質

本研究が対象とする 11 の性質を以下に示す。ここでは、自然数  $(1, 2, \dots)$  全体の集合を  $\mathbb{N}$  とおく。

- 2 つの数列  $\{a_i\}, \{b_i\} (i \in \mathbb{N})$  がどちらも収束するならば、数列  $\{a_i + b_i\} (i \in \mathbb{N})$  も収束する。
- 2 つの数列  $\{a_i\}, \{b_i\} (i \in \mathbb{N})$  がどちらも収束するならば、数列  $\{a_i \cdot b_i\} (i \in \mathbb{N})$  も収束する。
- 3 つの数列  $\{a_i\}, \{b_i\}, \{c_i\} (i \in \mathbb{N})$  があって、すべての  $n$  に対して、 $a_n \leq b_n \leq c_n$  を満たすとする。このとき、 $\{a_i\}$  も  $\{c_i\}$  がどちらも  $\alpha$  に収束するならば、 $\{b_i\}$  も同じ  $\alpha$  に収束する。
- 数列  $\{a_i\} (i \in \mathbb{N})$  が収束ならば、数列  $\{\frac{1}{a_i}\} (i \in \mathbb{N})$  も収束する。
- 数列  $\{a_i\} (i \in \mathbb{N})$  が  $\alpha$  に収束するならば、数列  $\{\frac{a_1 + \dots + a_i}{i}\} (i \in \mathbb{N})$  も同じ  $\alpha$  に収束する。
- 数列  $\{a_i\} (i \in \mathbb{N})$  が  $\alpha$  に収束ならば、数列  $\{a_i\}$  の任意の部分列  $\{a_{k_i}\} (i \in \mathbb{N})$  も同じ  $\alpha$  に収束する。
- コーシー列が収束する部分列をもつならば、もとのコーシー列自身も収束する。
- 数列  $\{a_i\} (i \in \mathbb{N})$  が  $\alpha (\neq 0)$  に収束するとき、ある番号  $N$  に対し、 $n \geq N$  のすべての  $n$  に対して  $a_n$  は  $\alpha$  と同符号である。
- 数列  $\{a_i\} (i \in \mathbb{N})$  の収束先は一意である。
- 数列  $\{a_i\} (i \in \mathbb{N})$  が  $\alpha$  に収束し、すべての  $n$  に対して  $a_n \leq b$  であるならば、 $\alpha \leq b$  である。
- 数列  $\{\frac{1}{i}\} (i \in \mathbb{N})$  が 0 に収束する。

これらの性質の証明を導出図で表現するために、論理式は次の言語を用いて定義する。

- (実数を表す) 対象変数  $\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, a, b, \alpha, \beta, M, \dots$
- (自然数を表す) 対象変数  $n, n_1, \dots, N, N_1, \dots, m, i, \dots$
- 定数記号  $0, 1, 2, \dots$
- 関数記号  $+, -, | \cdot, \cdot, /, ( )^2, \sqrt{\quad}, k, \dots$
- 述語記号  $=, \neq, <, \leq$
- 論理記号  $\wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists, \neg, \perp$

注：関数記号 “ $\cdot$ ” は省略することもある。

これらの記号の意味をふつうに解釈して、論理式と実際の文とを対応させる。本稿では、対応する論理式と実際の文を同一視して、同じ記号で表すこととする。

11 の性質の仮定 ( $H_1, H_2, \dots$  とおく) と結論 ( $C$  とおく) に対応する論理式は以下である。

- $H_1: \forall \epsilon_1 (0 < \epsilon_1 \rightarrow \exists N_1 \forall n_1 (N_1 \leq n_1 \rightarrow |a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1))$   
 $H_2: \forall \epsilon_2 (0 < \epsilon_2 \rightarrow \exists N_2 \forall n_2 (N_2 \leq n_2 \rightarrow |b_{n_2} - \beta| < \epsilon_2))$   
 $C: \forall \epsilon (0 < \epsilon \rightarrow \exists N \forall n (N \leq n \rightarrow |a_n + b_n - (\alpha + \beta)| < \epsilon))$
- $H_1: \forall \epsilon_1 (0 < \epsilon_1 \rightarrow \exists N_1 \forall n_1 (N_1 \leq n_1 \rightarrow |a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1))$   
 $H_2: \forall \epsilon_2 (0 < \epsilon_2 \rightarrow \exists N_2 \forall n_2 (N_2 \leq n_2 \rightarrow |b_{n_2} - \alpha| < \epsilon_2))$   
 $C: \forall \epsilon (0 < \epsilon \rightarrow \exists N \forall n (N \leq n \rightarrow |a_n \cdot b_n - \alpha \cdot \beta| < \epsilon))$
- $H_1: \forall \epsilon_1 (0 < \epsilon_1 \rightarrow \exists N_1 \forall n_1 (N_1 \leq n_1 \rightarrow |a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1))$   
 $H_2: \forall \epsilon_2 (0 < \epsilon_2 \rightarrow \exists N_2 \forall n_2 (N_2 \leq n_2 \rightarrow |c_{n_2} - \alpha| < \epsilon_2))$   
 $H_3: \forall m (a_m \leq b_m \wedge b_m \leq c_m)$   
 $C: \forall \epsilon (0 < \epsilon \rightarrow \exists N \forall n (N \leq n \rightarrow |b_n - \alpha| < \epsilon))$
- $H_1: \forall \epsilon_1 (0 < \epsilon_1 \rightarrow \exists N_1 \forall n_1 (N_1 \leq n_1 \rightarrow |a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1))$   
 $C: \forall \epsilon (0 < \epsilon \rightarrow \exists N \forall n (N \leq n \rightarrow |\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}| < \epsilon))$
- $H_1: \forall \epsilon_1 (0 < \epsilon_1 \rightarrow \exists N_1 \forall n_1 (N_1 \leq n_1 \rightarrow |a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1))$   
 $C: \forall \epsilon (0 < \epsilon \rightarrow \exists N \forall n (N \leq n \rightarrow |\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - \alpha| < \epsilon))$
- $H_1: \forall \epsilon_1 (0 < \epsilon_1 \rightarrow \exists N_1 \forall n_1 (N_1 \leq n_1 \rightarrow |a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1))$   
 $H_3: \forall m (m \leq k_m)$   
 $C: \forall \epsilon (0 < \epsilon \rightarrow \exists N \forall n (N \leq n \rightarrow |a_{k_n} - \alpha| < \epsilon))$
- $H_1: \forall \epsilon_1 (0 < \epsilon_1 \rightarrow \exists N_1 \forall n_1 \forall n_1' (N_1 \leq n_1 \wedge N_1 \leq n_1' \rightarrow |a_{n_1} - a_{n_1'}| < \epsilon_1))$   
 $H_2: \forall \epsilon_2 (0 < \epsilon_2 \rightarrow \exists N_2 \forall n_2 (N_2 \leq n_2 \rightarrow |a_{k_{n_2}} - \alpha| < \epsilon_2))$   
 $H_3: \forall m (m \leq k_m)$   
 $C: \forall \epsilon (0 < \epsilon \rightarrow \exists N \forall n (N \leq n \rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon))$
- $H_1: \forall \epsilon_1 (0 < \epsilon_1 \rightarrow \exists N_1 \forall n_1 (N_1 \leq n_1 \rightarrow |a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1))$   
 $C: \exists N \forall n (N \leq n \rightarrow (\alpha > 0 \rightarrow a_n > 0) \wedge (\alpha < 0 \rightarrow a_n < 0))$
- $H_1: \forall \epsilon_1 (0 < \epsilon_1 \rightarrow \exists N_1 \forall n_1 (N_1 \leq n_1 \rightarrow |a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1))$   
 $H_2: \forall \epsilon_2 (0 < \epsilon_2 \rightarrow \exists N_2 \forall n_2 (N_2 \leq n_2 \rightarrow |a_{n_2} - \beta| < \epsilon_2))$   
 $H_3: \alpha \neq \beta$   
 $C: \perp$
- $H_1: \forall \epsilon_1 (0 < \epsilon_1 \rightarrow \exists N_1 \forall n_1 (N_1 \leq n_1 \rightarrow |a_{n_1} - \alpha| < \epsilon_1))$   
 $H_2: \forall n_2 (a_{n_2} \leq b)$   
 $H_3: \alpha > b$   
 $C: \perp$

$$11. C: \forall \epsilon (0 < \epsilon \rightarrow \exists N \forall n (N \leq n \rightarrow |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon))$$

これらの論理式において、異なる役割の束縛変数は異なる記号を用いた。また、11の性質ができる限り同じ形になるように記号を選んだ。これらによってIIの考察を行いやすくなるからである。さらに、性質6と性質7では、仮定に部分列が現れる。部分列の定義は

$$\begin{aligned} & \text{数列 } \{a_{k_i}\} \text{ が数列 } \{a_i\} \text{ の部分列} \\ & \Leftrightarrow \forall i \forall j (i < j \rightarrow k_i < k_j) \end{aligned}$$

であるが、この右辺から導かれる  $\forall m (m \leq k_m)$  を仮定として加えている。

### 3 自然演繹法

自然演繹法は、実際の証明を体系的に表現するための1つの形式的方法である。そこでは、推論規則を定め、それらを組み合わせることにより、実際の証明を表現している。その組合せの表現を導出図とよぶ。より具体的には、導出図とは、論理式が平面上に樹上に配置された図形である。樹の根にあたる部分にある論理式を結論、葉にあたる部分にある論理式を仮定と呼ぶ。この構成は、[1]の推論規則と以下に示す「追加すべき推論規則」に従うものとする。この「追加すべき推論規則」は、[2],[3]などにある-N論法での証明を導出図で表現するのに必要と判断したものである。導出図Pが与えられたとき、Pは、Pの解消されていない仮定から、Pの結論を導く証明を表すことになる。

#### 追加すべき推論規則

##### 不等式に関するもの

$$\begin{aligned} & \frac{s \leq t}{s < t \vee s = t} (\leq \text{導}) \quad \frac{s < t \vee s = t}{s \leq t} (\leq \text{除}) \\ & \frac{s < t \quad t < u}{s < u} (\text{Tran}) \quad \frac{s < t}{s + u < t + u} (< +) \\ & \frac{s < t \quad 0 < u}{us < ut} (< \times A) \\ & \frac{}{a_i \leq \max(a_1, \dots, a_n)} (\text{MAX Def}) \text{注1} \end{aligned}$$

##### 絶対値に関するもの

$$\begin{aligned} & \frac{0 < t}{|t| = t} (\text{Abs Def A}) \quad \frac{t < 0}{|t| = -t} (\text{Abs Def B}) \\ & \frac{t = 0}{|t| = 0} (\text{Abs Def C}) \quad \frac{}{0 < |s|} (\text{Abs 公理}) \\ & \frac{|s| = |t + u|}{|s| \leq |t| + |u|} (\text{Tri Ine}) \quad \frac{|t - u| = |s|}{|t| - |u| \leq |s|} (\text{Tri Ine A}) \\ & \frac{}{|s \cdot t| = |s| |t|} (\text{Abs Mul}) \end{aligned}$$

##### 数に関するもの

$$\frac{}{0 < 0} (\text{Num Axi B}) \quad \frac{0 < t}{0 < \frac{1}{t}} (\text{Inver A})$$

注1:  $i$  は  $1 \leq i \leq n$  を満たす自然数とする。

### 4 代入すべき項が依存する変数

この節と次の第5節で、-N論法における変数に代入すべき項の選択の仕組みについて述べる。

とくに、この節では、代入すべき項が、どの変数に依存して決まるのかを考える。結果として、証明すべき性質の仮定に  $\forall \epsilon_i \exists N_i \dots$ 、結論に  $\forall n \dots$  の文が現れるか否かで、その依存する変数の傾向をまとめることができた。以下に詳細を述べる。

11の性質の証明に対応する導出図の一部は、本論文の付録Aに示してある。それらはどれも図1の形、または、そこから不要な推論規則を削除した形でかける。図1の導出図から、変数に代入すべき項について次がわかる。

- $\epsilon, N_1, N_2, n$  に代入すべき項は、[1]の推論規則の変数条件を満たす。本研究では、異なる役割の束縛変数に異なる記号を用いていることから、 $\epsilon, N_1, N_2, n$  に代入すべき項は、それぞれ、 $\epsilon, N_1, N_2, n$  とすればよい。
- $\epsilon_1, \epsilon_2$  に代入すべき項は  $\epsilon$  のみに依存する。
- $N$  に代入すべき項は  $\epsilon, N_1, N_2$  のみに依存する。
- $n_1, n_2, n_1'$  に代入すべき項は  $\epsilon, N_1, N_2, n$  のみに依存する。

$\epsilon_1, \epsilon_2, N, n_1, n_2, n_1'$  は、各性質の仮定と結論に自由に現れる変数にも依存するが、本研究ではそのことを明記しない。

本研究で実際に作成した導出図で代入された項を、表1に示しておく。ただし、性質2には3通りの証明があり、それらを2A、2B、2Cとした。性質4についても同様である。表1から、依存する変数の表を作ると表2のようになる。

表2から、 $N$ へ代入すべき項については、仮定に“ $\forall \epsilon_i \exists N_i$ ”が現れるか否かで次の傾向が読み取れる。

- 現れるとき(性質1~8):  $N_i$  に依存
  - 現れないとき(性質11):  $\epsilon$  のみに依存
- ただし、性質5においては  $\epsilon$  にも依存する。
- 同様に、 $n_1, n_2$ へ代入すべき項については、結論に“ $\forall n$ ”が現れるか否かで次の傾向が読み取れる。
- 現れるとき(性質1~8):  $n$  に依存
  - 現れないとき(性質9,10):  $N_i$  のみに依存
- ただし、性質5においては、 $N_i$  にも依存する。

### 5 代入すべき項の選び方

前節では、代入すべき項が、どの変数に依存するかについて述べた。この節では、それをもう一步踏み込んで、 $\epsilon_1, \epsilon_2, N, n_1, n_2$  に代入すべき具体的な項の選び方について述べる。

導出図(図1)より、その項は、各性質に応じた次の条件を満たすように選ばばよい。

$$\forall n_1 P_1, \forall n_2 P_2, H_3 \Rightarrow \forall n P \quad (1)$$

ただし、 $\forall n_1 P_1, \forall n_2 P_2, H_3, \forall n P$  のそれぞれは、性質によってはなかったり、 $\perp$ であったりする。(1)を満たす項は

$$P_1, P_2, H_3 \Rightarrow P \quad (2)$$

を満たすように選ばばよい。 $n_1$  に複数の項を代入する場合もある。この場合は、その複数の項を

$$P_1[n_{1,1}/n], \dots, P_1[n_{1,\ell}/n_1], P_2, H_3 \Rightarrow P \quad (3)$$

を満たす  $n_{1,1}, \dots, n_{1,\ell}$  として選ぶことになる。以下は (2) の場合で、説明を続ける。さらに、 $P$  が  $N \leq n \rightarrow Q$  で、 $P_i$  が  $N_i \leq n_i \rightarrow Q_i$  の形のときは、3 条件

$$N \leq n \Rightarrow N_1 \leq n_1 \quad (4)$$

$$N \leq n \Rightarrow N_2 \leq n_2 \quad (5)$$

$$N \leq n, Q_1, Q_2, H_3 \Rightarrow Q \quad (6)$$

または、2 条件

$$N \leq n \Rightarrow N_1 \leq n_1 \quad (7)$$

$$N \leq n, Q_1, P_2, H_3 \Rightarrow Q \quad (8)$$

などを満たすように選ばばよい。最初の 3 条件の場合には、 $\epsilon_1, \epsilon_2$  に代入すべき項は、(6) を満たすように選ぶ。 $N$  に代入すべき項は、3 条件を満たすように選ぶ。条件

$$\forall N(N \geq N' \Rightarrow (4))$$

$$\forall N(N \geq N'' \Rightarrow (5))$$

$$\forall N(N \geq N''' \Rightarrow (6))$$

を満たす、 $N', N'', N'''$  をそれぞれ求めて、 $N = \max(N', N'', N''')$  とすればよい。他の場合も同様である。

次に (4) を満たす、 $N, n_1$  に代入すべき項の選び方を述べる ( (5), (7) も同様である )。本研究では、次の 2 通りの選び方があった。

- $N_1 \leq N$  を満たす  $N, n_1 = N_1, N_1 + 1, \dots, n$
- $(N, n_1) = (N_1, n)$

最後に (6) を満たす  $\epsilon_1, \epsilon_2, N, n_1, n_2$  に代入すべき項の選び方を 2 つ述べる。( (8) も同様である )

(i) 1 つ目は、(6) が  $N \leq n, |A| < \epsilon_1, |B| < \epsilon_2, H_3 \Rightarrow |C| < \epsilon$  の形のときの選び方である。この選び方は、具体的には、次の 3 つのステップからなる。

ステップ 1 :  $|C| \leq C'$  を満たす  $C'$  で

$$\frac{|A|, |B| \text{ の式}}{|a_n|, |b_n|, n \text{ の式}} \quad (9)$$

の形のものを求める。ただし、 $x_1, x_2, \dots, x_m$  の式とは、 $x_1, x_2, \dots, x_m$  についての多項式ですべての係数が正であるものことである。

ステップ 2 :  $C' < f$  となる  $f$  で、 $\epsilon_1, \epsilon_2, N, n_1, n_2$  のみで表現されたものを求める。

ステップ 3 :  $f \leq \epsilon$  を満たすように  $\epsilon_1, \epsilon_2, N, n_1, n_2$  に代入すべき項を選ぶ。

最初の 2 つのステップで得られる  $C', f$  は、 $|C| \leq C' < f$  を満たすので、ステップ 3 で求めた項が、それぞれに代入すべき項だとわかる。

ステップ 1 は、三角不等式

$$(i.1) \quad |X + Y| \leq |X| + |Y|$$

などを用いる。ステップ 2 は、

$$(i.2) \quad N \leq n \text{ (前提)}$$

$$(i.3) \quad |A| < \epsilon_1 \text{ (前提)}$$

$$(i.4) \quad |B| < \epsilon_2 \text{ (前提)}$$

$$(i.5) \quad H_3 \text{ (前提)}$$

$$(i.6) \quad |\alpha| - \epsilon_1 < |a_n| \text{ (} A = a_n - \alpha \text{ の場合, (i.3) より)}$$

$$(i.7) \quad |\beta| - \epsilon_2 < |b_n| \text{ (} B = b_n - \beta \text{ の場合, (i.4) より)}$$

$$(i.8) \quad |a_n| < M(\{a_i\} \text{ の有界性より)}$$

などを用いる。(i.6) は、三角不等式と (i.3) から

$$|\alpha| - |a_n| \leq |a_n - \alpha| < \epsilon_1$$

なので、ここから得られる。(i.7) も同様である。また、ステップ 2 において、

$$\epsilon_i \leq 1$$

$$\epsilon_i \leq \frac{\alpha}{2}$$

などの条件を加えて  $f$  を求めて、ステップ 3 において加えた条件と、 $f \leq \epsilon$  を満たすように  $\epsilon_i$  を選ぶ方法 (i.9) も有効である。加えた条件が、 $\epsilon_i \leq 1$  のときは、 $f \leq \epsilon$  を満たす  $\epsilon_i$  を  $\epsilon_i'$  とすると、 $\epsilon_i$  に代入すべき項は、 $\epsilon_i = \min(1, \epsilon_i')$  とすればよい。

(ii) 2 つ目は、(6) の  $Q_i$  または  $Q$  が  $|A - \alpha| < \epsilon$  の形のときの選び方である。具体的には、 $|A - \alpha| < \epsilon$  を  $\alpha - \epsilon < A < \alpha + \epsilon$  に変形し「 $\Rightarrow$ 」の前後を比較する方法である。(i) で述べた (i.9) も有効である。

## 6 最後に

本論文では、新たな推論規則を導入し、自然演繹の枠組みを拡張することで、数列の収束に関する  $\epsilon$ - $N$  論法の証明を導出図で表現することができた。さらに、その過程の中で生じる変数の選択の結果を元に、代入すべき項の選択方法をまとめることが出来た。この方法を用いることで、実際の証明を書く際に、定義に合う記述が出来るようになる。多くの文献の中では、その部分が省略して記述してあるので、なぜ、その項を代入するのか、という疑問を解決することが出来た。

## 参考文献

- [1] 鹿島亮 : 『数理論理学』 . 朝倉書店, 東京, 2009.
- [2] 一樂重雄 : 『集合と位相 そのまま使える答えの書き方』 . 講談社サイエンティフィック, 東京, 2001.
- [3] 飯高茂 : 『微積分と集合 そのまま使える答えの書き方』 . 講談社サイエンティフィック, 東京, 1999.

$$\begin{array}{c}
\frac{\forall n_1(\dots)}{(\forall \text{除})} \frac{\forall n_2(\sim)}{(\forall \text{除})} \\
\vdots \\
\frac{\vdots}{0 < \epsilon_1} (\rightarrow \text{除}) \frac{\forall \epsilon_1 \dots}{0 < \epsilon_1 \rightarrow \exists N_1 \dots} (\forall \text{除}) \frac{\vdots}{0 < \epsilon_2} \frac{\forall \epsilon_2 \dots}{0 < \epsilon_2 \rightarrow \exists N_2 \dots} (\forall \text{除}) \frac{\vdots}{\exists N \sim} (\exists \text{導}) \\
\frac{\vdots}{\exists N_1 \dots} (\rightarrow \text{除}) \frac{\vdots}{\exists N \sim} (\exists \text{除}) \\
\frac{\exists N \sim}{0 < \epsilon \rightarrow \exists N \sim} (\rightarrow \text{導}) \\
\frac{\forall \epsilon(\dots)}{0 < \epsilon \rightarrow \exists N \sim} (\forall \text{導})
\end{array}$$

図1 導出図の一般形

表1 代入すべき項

変数	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$N$	$n_1$	$n_2$	$n_1'$	$m$
1	$\frac{\epsilon}{2}$	$\frac{\epsilon}{2}$	$\max(N_1, N_2)$	$n$	$n$	-	-
2A	$ \alpha \epsilon'$	$ \beta \epsilon'$	$\max(N_1, N_2)$	$n$	$n$	-	-
2B	$\min(1, \epsilon'')$	$\min(1, \epsilon'')$	$\max(N_1, N_2)$	$n$	$n$	-	-
2C	$\frac{\epsilon}{2M}$	$\frac{\epsilon}{2 \alpha }$	$\max(N_1, N_2)$	$n$	$n$	-	-
3	$\epsilon$	$\epsilon$	$\max(N_1, N_2)$	$n$	$n$	-	$n$
4A	$\min(\frac{ \alpha }{2}, \frac{ \alpha ^2\epsilon}{2})$	-	$N_1$	$n$	-	-	-
4B	$\frac{ \alpha ^2\epsilon}{1+ \alpha \epsilon}$	-	$N_1$	$n$	-	-	-
5	$\frac{\epsilon}{2}$	-	$\max(N_1, N_3)$	$N_1, N_1 + 1, \dots, n$	-	-	-
6	$\epsilon$	-	$N_1$	$k_n$	-	-	$n$
7	$\frac{\epsilon}{2}$	$\frac{\epsilon}{2}$	$\max(N_1, N_2)$	$n$	$n$	$k_n$	$n$
8	$ \alpha $	-	$N_1$	$n$	-	-	-
9	$\frac{ \alpha-\beta }{2}$	$\frac{ \alpha-\beta }{2}$	-	$\max(N_1, N_2)$	$\max(N_1, N_2)$	-	-
10	$\alpha - b$	-	-	$N_1$	$N_1$	-	-
11	-	-	$[\frac{1}{\epsilon}] + 1$	-	-	-	-

2A の  $\epsilon'$  は  $-1 + \sqrt{1 + \frac{\epsilon}{|\alpha\beta|}}$  を表す。2B の  $\epsilon''$  は  $\frac{\epsilon}{1+|\alpha|+|\beta|}$  を表す。5 の  $N_3$  は  $[\frac{2(a_1-\alpha+\dots+a_{N_1}-\alpha)}{\epsilon}] + 1$  を表す。

表2 依存する変数

変数	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$N$	$n_1$	$n_2$	$n_1'$	$m$
1	$\epsilon$	$\epsilon$	$N_1, N_2$	$n$	$n$	-	-
2A	$\epsilon$	$\epsilon$	$N_1, N_2$	$n$	$n$	-	-
2B	$\epsilon$	$\epsilon$	$N_1, N_2$	$n$	$n$	-	-
2C	$\epsilon$	$\epsilon$	$N_1, N_2$	$n$	$n$	-	-
3	$\epsilon$	$\epsilon$	$N_1, N_2$	$n$	$n$	-	$n$
4A	$\epsilon$	-	$N_1$	$n$	-	-	-
4B	$\epsilon$	-	$N_1$	$n$	-	-	-
5	$\epsilon$	$\epsilon$	$N_1, \epsilon$	$N_1, n$	-	-	-
6	$\epsilon$	-	$N_1$	$n$	-	-	$n$
7	$\epsilon$	$\epsilon$	$N_1, N_2$	$n$	$n$	$n$	$n$
8	なし	-	$N_1$	$n$	-	-	-
9	なし	なし	-	$N_1, N_2$	$N_1, N_2$	-	-
10	なし	-	-	$N_1$	$N_1$	-	-
11	-	-	$\epsilon$	-	-	-	-