

需要予測を考慮した2つの配送モードのある在庫管理の研究

M2008MM013 飯尾恭宏

指導教員：澤木勝茂

1 はじめに

本論文では需要予測を考慮した2つの配送モードにおける在庫管理モデルを考察する。商品の性質上、早く到着する必要のある商品と、早く到着することよりも費用を抑えたい商品がある。在庫を発注してから到着するまでのリードタイムの短い発注はコストがかかるため、リードタイムの長さに応じて発注を分けて考えることで、コストを抑えることができる。配送モードは、商品到着の早い発注 fast-order と商品到着の遅い発注 slow-order に分けて考える。

アプローチとして、第2章では fast-order と slow-order の2パターンの配送モデルを考えたモデルを、期待総コストを最小化する目的で動的計画法を用い定式化する。解析解を求めるため、需要関数が一様分布に従うものと仮定し解析解を求める。さらに需要関数を積の形、和の形と仮定し、一様分布および指数分布の下で計算を行う。需要分布を特定化することにより、最適発注量を導出し、数値例でモデルの有用性を考察する。

第3章では、2つの配送モードのある在庫管理について、異なる需要決定における最適政策の違いを一様分布および指数分布を用い考察する。需要決定は、決定因子の積の形と仮定したものをパターン1、決定因子の和の形と仮定したものをパターン2として考察する。

2 2つの配送モードにおける在庫管理

この章では、需要予測を考慮した2つの配送モードにおける在庫管理モデルを定式化する。その後、需要の確率分布を特定化し、数値例でモデルの有用性を考察する。

2.1 仮定とアプローチ

商品の販売期間を複数期間 $\{1, 2, \dots, N\}$ とし、1期ごとに発注をおこなうものとする。発注は2つのモード、fast-order と slow-order があるものとする。fast-order は期首に発注すると期末に商品が届き、slow-order は期首に発注して次の期末に商品が届く。

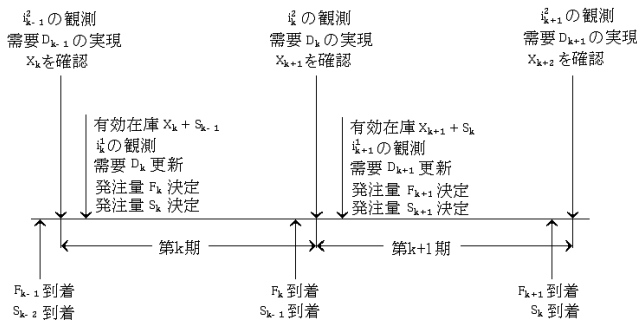


図1 在庫の流れ

期首に在庫状況および第1の需要決定因子である i_k^1 を観測し、需要 D_k を更新、それをもとに発注量 F_k, S_k を決定する。期末では、需要の実現値の更新および、第2の需要決定因子である i_k^2 を観測し、ここで F_k が到着する。また、fast-order は slow-order よりも発注費用がかかると仮定する。

期首在庫量を X_k としたとき、期首在庫量の関係式は $1 \leq k \leq N$ で次のように定義される。なお、 $X_1 = x_1$ を所与とし、需要関数を $D_k = g_k(I_k^1, I_k^2, v_k)$ とする。

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= X_k + F_k + S_{k-1} - D_k \\ &= X_k + F_k + S_{k-1} - g_k(I_k^1, I_k^2, v_k). \end{aligned}$$

期首では、期首在庫量である X_k の実現値 x_k 、需要決定因子 I_k^1 (確率変数) の実現値 i_k^1 を観測することができる。これにより、需要 D_k に対して、 $g_k(i_k^1, I_k^2, v_k)$ という需要予測を更新することができる。さらに、第 $k-1$ 期に決定した slow-order の発注量 S_{k-1} が期末に到着することが判っているので、発注後在庫量 $Y_k = X_k + S_{k-1}$ は常に判る。さらに、 F_k が期首に到着することが判っているので、需要 D_k に対して有効な在庫は $X_k + S_{k-1} + F_k$ である。

期末では、需要決定因子 I_k^2 (確率変数) の実現値 i_k^2 を観測することができる。これにより、需要予測 $g_k(i_k^1, i_k^2, v_k)$ を更新することができ、 $X_k + S_{k-1} + F_k$ と D_k の差が第 $k+1$ 期の期首在庫量 X_{k+1} となる。また、slow-order は期首に発注して次の期末に商品が届く発注であるので、第 N 期では、slow-order はしないものとし、 $S_N = 0$ とする。

2.2 定式化

期首在庫量 x_1 のときの期待総コストは、

$$\begin{aligned} J_1(x_1, s_0, i_1^1, (F, S)) &= H_1(x_1) \\ &+ E \left[\sum_{l=1}^N \left(C_l^f(F_l) + C_l^s(S_l) + H_{l+1}(X_{l+1}) \right) \right] \quad (1) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $(F, S) = ((F_1, \dots, F_N), (S_1, \dots, S_N))$ 。この期待総コストを最小化するため、以下の価値関数を定義する。

$$V_1(x_1, s_0, i_1^1) = \inf_{(F, S) \in A_1} \{ J_1(x_1, s_0, i_1^1, (F, S)) \} \quad (2)$$

次に動的計画法を用いて、最適政策を示す。期待総コストは、

$$\begin{aligned} J_n(x_n, s_{n-1}, i_n^1, (F, S)) &= H_n(x_n) \\ &+ E \left[\sum_{l=n}^N \left(C_l^f(F_l) + C_l^s(S_l) + H_{l+1}(X_{l+1}) \right) \right] \quad (3) \end{aligned}$$

である．よって，この期待総コストの式を最小化する価値関数は，

$$V_n(x_n, s_{n-1}, i_n^1) = \inf_{(F,S) \in A_n} \{J_n(x_n, s_{n-1}, i_n^1, (F, S))\} \quad (4)$$

となる．ここで， A_n は F と S が作る決定領域の集合である．コストが凸関数になる基本的な在庫モデルでは，価値関数も期首在庫量に関して凸関数である．この事実，需要予測に基づく二元的な配送モードの問題にも有効である．

式 (3) を，決定変数として発注量 ϕ , σ を含む動的計画法の式に書き直し，さらに発注後在庫量 y, z を含む式に書き換える．このとき，発注量 ϕ, σ は， x_l, s_{l-1} の和に依存することが判る． l 期の有効在庫量である $x_l + s_{l-1}$ を，状態変数 q_l と表すことにすれば，式 (3) は次のように書き換えることができる．

$$\hat{U}_k(q_k, i_k^1) = \inf_{y \geq q_k, z \geq y} \{C_k^f(y - q_k) + C_k^s(z - y) + E[H_{k+1}(y - g_k(i_k^1, I_k^2, v_k))] + E[U_{k+1}(y - g_k(i_k^1, I_k^2, v_k))]\} \quad (5)$$

$$\hat{U}_N(q_N, i_N^1) = \inf_{y \geq q_N, z \geq y} \{C_N^f(y - q_N) + C_N^s(z - y) + E[H_{N+1}(y - g_N(i_N^1, I_N^2, v_N))]\} \quad (6)$$

この2つの式 (5), (6) の解を $\hat{V}_k(q_k, i_k^1)$ ($1 \leq k \leq N$) とし，後ほど使用する．

2.3 一様分布

次に解析解を求めるため，需要関数が一様分布に従うものと仮定し，数値例を示す．以下のことを仮定する．

$$C_1^f(u) = \begin{cases} +\infty, & u > 0, \\ 0, & u = 0, \end{cases} \quad C_1^s(u) = c_1^s \cdot u, \\ C_2^f(u) = c_2^f \cdot u, \quad g_1(i_1^1, I_1^2, v_1) = 0,$$

$$H_1(x) = H_2(x) = H_3(x) = \begin{cases} hx, & x > 0, \\ -px, & x \leq 0. \end{cases}$$

ただし，初期在庫 0 ($x_1 = s_0 = 0$) とする．

次に確率変数 I_2^1 を区間 $(v_2 - \frac{a}{2}, v_2 + \frac{a}{2})$ の一様分布と仮定すると，密度関数 $\lambda_2(i_2^1)$ は以下のように定義される．

$$\lambda_2(i_2^1) = \frac{1}{a}, \quad i_2^1 \in [v_2 - \frac{a}{2}, v_2 + \frac{a}{2}]. \quad (7)$$

$i_2^1 \in [v_2 - \frac{a}{2}, v_2 + \frac{a}{2}]$ のもと，需要 $g_2(i_2^1, I_2^2, v_2)$ の条件付密度関数 $\psi_2(i_2^2 | i_2^1)$ は，

$$\psi_2(i_2^2 | i_2^1) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon a}, & i_2^2 \in [i_2^1 - \frac{\epsilon a}{2}, i_2^1 + \frac{\epsilon a}{2}], \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

で与えられる．ただし， $0 < \epsilon < 1$.

式 (5), (6) は，

$$\hat{U}_1(q_1, i_1^1) = \inf_{y \geq q_1, z \geq y} \{C_1^f(y - q_1) + C_1^s(z - y) + E[H_2(y - g_1(i_1^1, I_1^2, v_1))] + E[\hat{U}_2(z - g_1(i_1^1, I_1^2, v_1), I_2^1)]\},$$

$$\hat{U}_2(q_2, i_2^1) = \inf_{y \geq q_2} \{C_2^f(y - q_2) + E[H_3(y - g_2(i_2^1, I_2^2, v_2))]\}$$

となる． $I_2^1 = i_2^1$ で与えられた第2期の fast-order の最適発注後在庫量は，

$$c_2^f + \frac{\partial E[H_3(y - g_2(i_2^1, I_2^2, v_2))]}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

を満たす y^* である．一様分布を代入し，計算をおこなう．ここで，

$$E[H_3(y - g_2(i_2^1, I_2^2, v_2))] = \int_{i_2^1 - \frac{\epsilon a}{2}}^y h(y - D_2) \frac{1}{\epsilon a} dD_2 - \int_y^{i_2^1 + \frac{\epsilon a}{2}} p(y - D_2) \frac{1}{\epsilon a} dD_2$$

であり，式 (9) について解き， $\beta = \frac{p - c_2^f}{p + h}$ とおけば，

$$y^* = \epsilon a \cdot (\beta - \frac{1}{2}) + i_2^1 \quad (10)$$

を得る．よって，第2期の fast-order の最適発注量は，

$$f_2^* = \begin{cases} \epsilon a \cdot (\beta - \frac{1}{2}) + i_2^1 - q_2, & \epsilon a \cdot (\beta - \frac{1}{2}) + i_2^1 \geq q_2, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる．発注後在庫量が発注点よりも低い場合 ($q_2 \leq \epsilon a(\beta - \frac{1}{2}) + i_2^1$) のみ，第2期の fast-order をする必要がある．さらに，式 (7), (8) から需要関数が $g_2(i_2^1, I_2^2, v_2) \leq i_2^1 + \frac{\epsilon a}{2}$ で与えられることより，発注後在庫量が十分に大きい ($q_2 \geq i_2^1 + \frac{\epsilon a}{2}$) なら，ペナルティコストは発生しない．価値関数は以下のように定義できる．

$$\hat{V}_2(q_2, i_2^1) = \begin{cases} -h \cdot i_2^1 + h \cdot q_2, & i_2^1 \leq q_2 - \frac{\epsilon a}{2}, \\ \frac{h+p}{2\epsilon a} (i_2^1)^2 + Y_1(q_2) \cdot i_2^1 + Y_2(q_2), & q_2 - \frac{\epsilon a}{2} \leq i_2^1 \leq q_2 - \epsilon a(\beta - \frac{1}{2}), \\ c_2^f \cdot i_2^1 - c_2^f \cdot q_2 + Y, & q_2 - \epsilon a(\beta - \frac{1}{2}) \leq i_2^1. \end{cases} \quad (11)$$

$Y_1(q_2), Y_2(q_2), Y$ は次のように定義する．

$$Y_1(q_2) = \frac{p-h}{2} - \frac{h+p}{\epsilon a} q_2, \\ Y_2(q_2) = \frac{h+p}{2\epsilon a} (q_2)^2 + \frac{h-p}{2} q_2 + \frac{h+p}{8} \epsilon a, \\ Y = \epsilon a \left[c_2^f \cdot (\beta - \frac{1}{2}) + \frac{h\beta^2 + p(1-\beta)^2}{2} \right].$$

ここで，コスト関数 $G_1(z)$ を，

$$G_1(z) = c_1^s \cdot z + E[\hat{V}_2(z, I_2^1)] \quad (12)$$

とし，コスト関数のグラフを書く．

2.4 数値例

基本のパラメータは, $h = 0.1, p = 5.3, c_1^s = 1.0, c_2^f = 2, a = 15, \epsilon = 0.5, v_2 = 50$ と設定した. また, $h = 0.8, p = 6.2$ と高くした場合 (図 2), および $\epsilon = 0.3, \epsilon = 0.7$ とした場合 (図 3) も考察する.

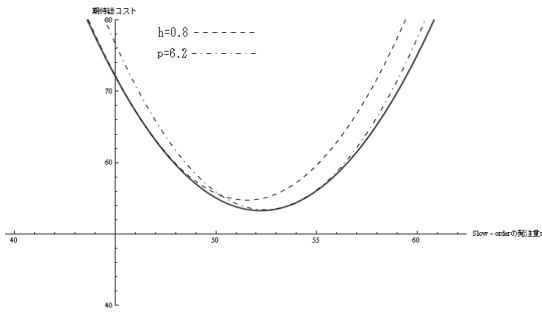


図 2 p, h を変化

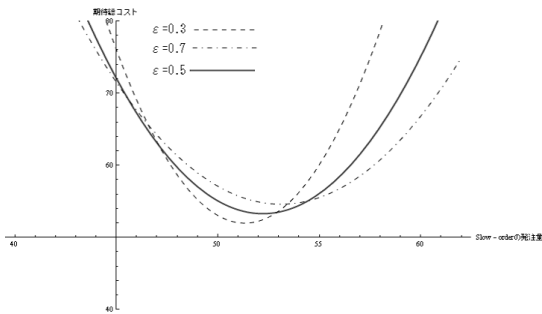


図 3 ϵ を変化

コスト関数 $G_1(z)$ は z に関して凸関数で最小値が存在することが判る. また, 各コストを増やせば期待総コストは増えたことより, 仮定が正しかったことを裏付けることができた. また, ϵ が高いほど, 期待総コストは高くなり, コスト関数の傾きが緩やかになっていることから, 一様分布の幅を決定する ϵ の仮定が正しかったことを意味している.

3 一様分布および指数分布の下での異なる需要決定による解析解

ここで需要の決定について説明する. 需要関数 $D_k = g_k(I_k^1, I_k^2, v_k)$ は, 需要の決定因子である I_k^1, I_k^2 (確率変数), v_k (定数) という 3 つの要素で決めることができる. I_k^1, I_k^2 を $[0, 1]$ の確率変数であるとする, v_k の値を任意に定めることにより表現できる.

$g_k(I_k^1, I_k^2, v_k)$ が積の形, $g_k(I_k^1, I_k^2, v_k) = I_k^1 I_k^2 v_k$ だと仮定すると, v_k は $I_k^1, I_k^2 = 1$ のとき, 上界 (upper bound) であることが判る. 一方 $g_k(I_k^1, I_k^2, v_k)$ が和の形, $g_k(I_k^1, I_k^2, v_k) = I_k^1 + I_k^2 + v_k$ だと仮定すると, v_k は $I_k^1, I_k^2 = 0$ のとき, 下界 (lower bound) であることが判る. これらを踏まえ, 2 通りの需要関数の決定の方法を, 一様分布および指数分布の 2 通りの確率分布に当てはめ, 計 4 パターンを考察する. ただし, パターン 1 を積の形, パターン 2 を和の形とする.

3.1 パターン 1 の場合の一様分布

$$g_2(i_2^1, I_2^2, v_2) = i_2^1 I_2^2 v_2,$$

$$E[H_3(y - g_2(i_2^1, I_2^2, v_2))] = \int_{i_2^1 - \frac{\epsilon a}{2}}^y h(y - i_2^1 I_2^2 v_2) \frac{1}{\epsilon a} dI_2^2 - \int_y^{i_2^1 + \frac{\epsilon a}{2}} p(y - i_2^1 I_2^2 v_2) \frac{1}{\epsilon a} dI_2^2$$

であり, 式 (9) について解くと,

$$y^* = \frac{\epsilon a (\beta - \frac{1}{2}) + i_2^1}{2 - i_2^1 v_2} \quad (13)$$

を得る. また, 価値関数 $\hat{V}_2(z, i_2^1)$ は,

$$\hat{V}_2(z, i_2^1) = \frac{(h+p)v_2}{2\epsilon a} (i_2^1)^3 + \frac{(p-h)v_2}{2} (i_2^1)^2 + Y_1(z) i_2^1 + Y_2(z) \quad (14)$$

となる. ただし, $Y_1(q_2) = \frac{(h+p)}{\epsilon a} \{-\frac{1}{2} v_2 q_2^2 - q_2 + \frac{\epsilon^2 a^2}{8} v_2\}$, $Y_2(q_2) = \frac{(h+p)}{\epsilon a} q_2^2 + \frac{(h-p)}{\epsilon a} q_2$.

3.2 パターン 2 の場合の一様分布

$$g_2(i_2^1, I_2^2, v_2) = i_2^1 + I_2^2 + v_2,$$

$$E[H_3(y - g_2(i_2^1, I_2^2, v_2))] = \int_{i_2^1 - \frac{\epsilon a}{2}}^y h(y - i_2^1 - I_2^2 - v_2) \frac{1}{\epsilon a} dI_2^2 - \int_y^{i_2^1 + \frac{\epsilon a}{2}} p(y - i_2^1 - I_2^2 - v_2) \frac{1}{\epsilon a} dI_2^2$$

であり, 式 (9) について解くと,

$$y^* = \epsilon a \cdot (\beta - \frac{1}{2}) + 2i_2^1 + v_2 \quad (15)$$

を得る. また, 価値関数 $\hat{V}_2(z, i_2^1)$ は,

$$\hat{V}_2(z, i_2^1) = \frac{3(h+p)}{2\epsilon a} (i_2^1)^2 + Y_1(z) i_2^1 + Y_2(z) \quad (16)$$

となる. ただし, $Y_1(q_2) = \frac{v_2(h+p)}{\epsilon a} + (p-h) - \frac{2(h+p)}{\epsilon a} q_2$, $Y_2(q_2) = \frac{(h+p)}{2\epsilon a} q_2^2 + \{\frac{h-p}{2} - \frac{v_2(h+p)}{\epsilon a}\} q_2 + \frac{v_2(p-h)}{2} + \frac{\epsilon a(h+p)}{8}$.

3.3 数値例

パターン 2 の場合の一様分布の, 期待総コストと z^* の関係をグラフで示す (図 4).

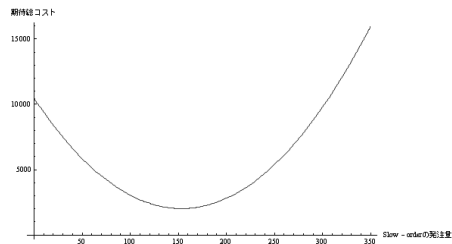


図 4 期待総コストと z^* の関係

3.4 パターン 1 の場合の指数分布

指数分布は、本来 $[0, \infty]$ で計算するべきであるが、範囲 $0 < i_2^1 \leq x$ として計算をおこない、その後、 x を十分に大きくするという手順で解析解を求めることにする。

$$g_2(i_2^1, I_2^2, v_2) = i_2^1 I_2^2 v_2, \psi(i_2^2 | i_2^1) = \lambda e^{-\lambda i_2^2},$$

$$E[H_3(y - g_2(i_2^1, I_2^2, v_2))] = \int_0^x \int_{i_2^1 - \frac{\epsilon a}{2}}^y h(y - i_2^1 I_2^2 v_2) \lambda e^{-\lambda i_2^2} dI_2^2 di_2^1 - \int_0^x \int_y^{i_2^1 + \frac{\epsilon a}{2}} p(y - i_2^1 I_2^2 v_2) \lambda e^{-\lambda i_2^2} dI_2^2 di_2^1$$

であり、式 (9) について解くと、

$$y^* = \frac{1}{\gamma} (e^{\lambda x} - 1) \left\{ 1 - \frac{\epsilon a \lambda (h - p)}{2(h + p)} \right\} - \frac{c_2^f \lambda e^{\lambda x}}{(h + p)\gamma} - \frac{2}{\gamma} \lambda x \quad (17)$$

を得る。ただし、 $\gamma = 2e^{\lambda x} - e^{\lambda x} v_2 + \lambda v_2 x + v_2 - 2\lambda$ 。

3.5 パターン 2 の場合の指数分布

$$g_2(i_2^1, I_2^2, v_2) = i_2^1 + I_2^2 + v_2, \psi(i_2^2 | i_2^1) = \lambda e^{-\lambda i_2^2},$$

$$E[H_3(y - g_2(i_2^1, I_2^2, v_2))] = \int_0^x \int_{i_2^1 - \frac{\epsilon a}{2}}^y h(y - i_2^1 - I_2^2 - v_2) \lambda e^{-\lambda i_2^2} dI_2^2 di_2^1 - \int_0^x \int_y^{i_2^1 + \frac{\epsilon a}{2}} p(y - i_2^1 - I_2^2 - v_2) \lambda e^{-\lambda i_2^2} dI_2^2 di_2^1$$

であり、式 (9) について解き、 $x \rightarrow \infty$ とする。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y^* = \frac{\epsilon a (p - h) - 2c_2^f}{2(p + h)} + \frac{2}{\lambda} + v_2 \quad (18)$$

となり、価値関数 $\hat{V}_2(z, i_2^1)$ は、 $\hat{V}_2(z, i_2^1) = \frac{1}{6} e^{-\lambda i_2^1} p \lambda z^3 + \left\{ \frac{h}{2} - \frac{1}{4} \epsilon a e^{-\lambda i_2^1} p \lambda - e^{-\lambda i_2^1} i_2^1 p \lambda - \frac{1}{2} e^{-\lambda i_2^1} p \lambda v_2 \right\} z^2 + \left\{ 2h + \frac{\epsilon a h}{2} - \frac{2h}{\lambda} + \frac{1}{8} \epsilon^2 a^2 e^{-\lambda i_2^1} p \lambda + \epsilon a e^{-\lambda i_2^1} i_2^1 p \lambda + \frac{3}{2} e^{-\lambda i_2^1} (i_2^1)^2 p \lambda + e^{-\lambda i_2^1} i_2^1 p \lambda v_2 - \frac{1}{2} \epsilon a e^{-\lambda i_2^1} h p \lambda (v_2)^2 \right\} z + ah + \frac{1}{8} \epsilon^2 a^2 h + \frac{3h}{\lambda^2} - \frac{3h}{\lambda} - \frac{\epsilon a h}{\lambda} - h v_2 + \frac{h v_2}{\lambda}$ となる。

3.6 数値例

パターン 2 の場合の指数分布の、期待総コストと z^* の関係をグラフで示す (図 5)。

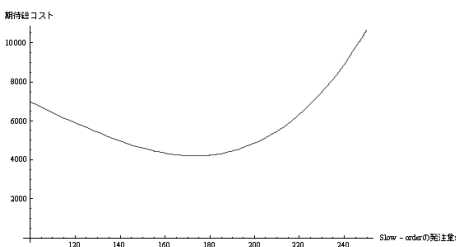


図 5 期待総コストと z^* の関係

3.7 考察

需要決定の仕方を提案し、需要関数を積の形、和の形と仮定し、一様分布および指数分布で計算をおこなった。

パターン 1 の積の形では、一様分布、指数分布ともに妥当性を証明できなかった。パターン 1 の場合の一様分布では、コスト関数が上に凸になってしまい、パターン 1 の場合の指数分布では、 $x \rightarrow \infty$ で収束せず、コスト関数も上に凸のグラフとなり、fast-order の最適発注後在庫量である y^* を求めるに留まった。これは最初の、需要の決定因子同士の積の形にするという仮定が現実的でないことと結論付けることができる。

パターン 2 の和の形では、一様分布、指数分布ともに妥当性を証明できた。パターン 2 の場合の一様分布では、 $\hat{V}_2(z, i_2^1)$ の z^2 の係数 $= \frac{p+h}{2\epsilon a}$ となり、明らかに $\frac{p+h}{2\epsilon a} > 0$ でコスト関数が下に凸になり最小値の存在を確認でき、数値計算も妥当な結果となった。パターン 2 の場合の指数分布では、 $x \rightarrow \infty$ で収束した。コスト関数は 3 次関数となったが、 $\hat{V}_2(z, i_2^1)$ の z^3 の係数 $= \frac{1}{6} e^{-\lambda i_2^1} p \lambda$ となり、 $\frac{1}{6} e^{-\lambda i_2^1} p \lambda > 0$ より、右側の極小値で最小化することができた。

4 おわりに

本論文では需要予測を考慮した 2 つの配送モードにおける在庫管理モデルを考察した。リードタイムの長さに応じて発注を分けて考えることで、費用を抑えることができた。

今後の発展としては、補充リードタイムを 3 パターン設定し、3 つの配送モードのある在庫管理モデルに拡張、あるいは固定費用を加えたモデルに拡張することができる。また、一様分布や指数分布で解析解を求めたが、正規分布で解析解を求めることができれば、より現実に近い、実際の現場において大きな指針となる。

参考文献

- [1] F. S. Hillier and G. J. Lieberman: *Introduction to Operations Research*, McGraw-Hill Professional, New York (2004) .
- [2] S. P. Sethi, H. Yan and H. Zhang: Inventory Models with Fixed Costs, Forecast Updates, and Two Delivery Modes, *INFORMS, Journal of Operations Research*, Vol.51, No.2, pp.321-328 (2003) .
- [3] S. P. Sethi, H. Yan and H. Zhang: *Inventory and Supply Chain Models with Forecast Updates*, Springer, United Kingdom (2005) .
- [4] 小和田正, 澤木勝茂, 加藤豊: *OR 入門*, 実教出版, 東京 (1994) .
- [5] 早田義也: 配置場所を考慮した陳腐化商品の在庫管理に関する研究, 南山大学数理工学研究所修士論文, 愛知 (2009) .
- [6] 広中平祐: *現代数理科学事典*, 大阪書籍, 大阪 (1991) .
- [7] 森村英典, 刀根薫, 伊理正夫: *経営科学 OR 用語大辞典*, 朝倉書店, 東京 (1999) .