

H 制御理論に基づく低次元制御器の実現

M2007MM023 大迫佑磨

指導教員: 高見勲

1 はじめに

世の中のプラントは一般に高次元である。高次元プラントをそのままの次元で設計すると、制御器は複雑になる。高次元制御器は、低次元制御器と比較すると、いくつかの問題点が挙げられる。

- 精度の高いコンピュータを使わなければならないことからコストが多くなる。
- 制御器のチューニングが、困難である。

上記の理由から、高次元制御器は扱いやすいものではないため、一般に好まれない。また、産業界ではコスト面などの理由から出力フィードバック系が多く用いられている。これは、状態フィードバックと比較し、単純な制御器を設計することにつながる。よって、本研究では、構造が単純でありながら、制御性を保証する制御器を H 制御理論に基づき設計することを目的とし、間接法、直接法の2つのアプローチ方法を提案する。1つ目のアプローチ方法として、間接法と呼ばれている手法で、高次元モデルを平衡化打ち切り法により低次元化させ、この低次元モデルに対して制御器を設計する。しかし、この方法は、制御器を設計する上で、早い段階で近似しているので、制御器を設計するまでの段階で、小さな誤差が最終的に大きな誤差を生じる結果となり得ることが考えられる。この問題は、感度低減問題、ロバスト安定化問題を同時に考える混合感度問題として扱うことで、追従性、ロバスト性が保証される。2つ目のアプローチ方法として、直接法の一つの手法として考えられている方法で、制御器の構造をPID制御器に固定し、制御器を設計する[3],[4]。具体的には、評価関数として閉ループ系の H ノルムと目標値応答と目標値との誤差面積を用い、最小化を図ることで、構造が単純かつ、制御性の保証される制御器を設計する。産業界ではPID制御器が多く使われていることは知られている。その理由のうちの1つとして、構造の単純さが挙げられる。よって、後者の設計方法は本研究の目的と一致する。また、2つのアプローチを考えると、それぞれに対してパラメータのチューニングが必要である。パラメータの決定には、幾度の試行錯誤が余儀なくされる。よって、メタヒューリスティクスの分野で、最も普及しているGA (Genetic Algorithm) を用いて、自動的に求める[6]。二つのアプローチを検証する実験装置として、三慣性実験装置を用いる。

2 低次元化-間接法-

2.1 平衡化実現

p 出力 m 入力 n 状態の次式のような安定な LTI モデル $P(s)$ を考える。

$$P(s) = \{A, B, C, D\} \in RH^p \times m \quad (1)$$

つぎの、リアプノフ方程式

$$AX + XA^T + BB^T = 0 \quad (2)$$

$$YA + A^TY + C^TC = 0 \quad (3)$$

の解、すなわち、可制御グラミアン X 、可観測グラミアン Y を次式のように同時対角化、すなわち平衡化する。

$$T^{-1}XT^{-T} = T^TYT = \text{diag}\{\sigma_1 \dots \sigma_n\} \quad (4)$$

σ_i をハンケル特異値という。 T を用いて平衡化実現をおこなった。

$$P(s) = \{T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D\} \quad (5)$$

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0 \quad (6)$$

2.2 平衡化打ち切り法

平衡化されたモデル $P(s)$ の状態空間表現において、状態変数は可制御・可観測性の大きい順に並べられている。よって $n_r < n$ 次元モデルを切り取ることで、低次元モデルを構成する。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + Du(t) \end{cases} \quad (7)$$

$$y \in R^p, u \in R^m, x_1 \in R^{n_r}, x_2 \in R^{n-n_r}$$

このとき、 x_1 が x_2 よりも大きいハンケル特異値をもつことから、その部分のみをモデルとして残して、 n_r 次元モデルを次のように構成する。

$$\hat{P}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right] \quad (8)$$

2.3 H 制御問題

H 制御系における一般化制御対象を考える (図1)

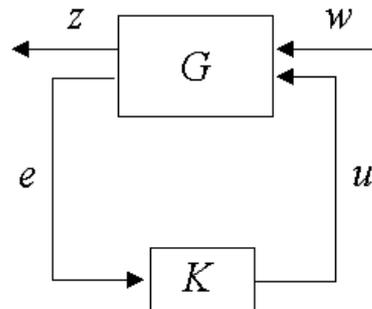


図1 H 制御系

このとき、 G は、ノミナルプラントおよび周波数重み関数から構成される。 G に関する入出力の関係は、

$$\begin{bmatrix} z \\ e \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$y \in R^q, e \in R^p, w \in R^r, u \in R^m$$

で表される。 w は外部入力であり、制御系に外部から加えられる入力を表し、 z は制御量で、制御によって小さくしたい量を表す。また、 u は制御入力で、 e は、偏差である。 G を n 次元システムとして状態空間表現で表すと下式のようなになる。

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (10)$$

ただし、 $A \in R^{n \times n}$ である。式 (10) に対して以下の可解条件を満足するような標準 H 制御問題を考える。

A1. (A, B_2) が可安定、 (C_2, A) が可検出

A2. $D_{22} = 0$

この条件を満たすとき、閉ループ系 $F_L(G, K)$ を内部安定化し、

$$\| F_L(G, K) \| < \gamma \quad (11)$$

を満たす制御器を設計する。

2.4 混合感度問題

図 2 において w から、 z までの H ノルムを γ 未満にすることで、閉ループ系の安定化を図る。

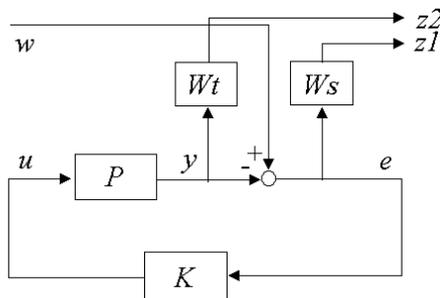


図 2 混合感度問題

図 2 において、 w から e までの伝達関数を感度関数といい、 S とあわせ、 w から y までの伝達関数を相補感度関数といい、 T とあわせ。このとき、

$$\| W_s S \| < \gamma \quad (12)$$

$$\| W_t T \| < \gamma \quad (13)$$

を満たす制御器を求める問題を混合感度問題という。一般に、 S は追従特性にかかわるので、低周波数帯域で大きくなるように、 T はロバスト安定性にかかわるので、高周波数帯域で小さくなるように、周波数重み関数 W_s, W_t を設定する。

3 低次元化-直接法-

3.1 構造制約のある H 制御器

図 3 の I-PD 制御系において、制御器の構造を PID 制御器に固定し、 H 制御問題を考える。

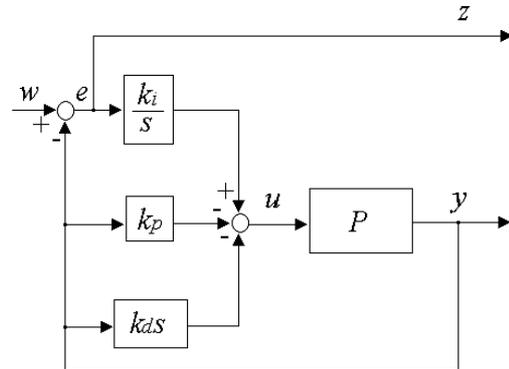


図 3 I-PD 制御系

このとき、

$$\| T_{zw} \| < \gamma \quad (14)$$

を満足する k_p, k_i, k_d を GA を用い求める。

ただし、各 PID パラメータをランダムに与えると、系が不安定になることが考えられる。この問題は、あらかじめ系が安定になる PID パラメータのみを用いて GA を考えることで解決される。

4 三慣性実験装置への適用

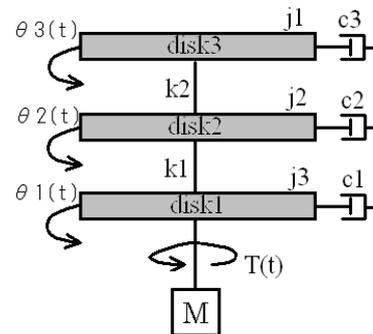


図 4 三慣性実験装置

j_1, j_2 : モータの慣性モーメント [kgm^2]

j_3 : 負荷の慣性モーメント [kgm^2]

c_1, c_2 : モータの粘性係数 [$\text{Nm}/(\text{rad}/\text{s})$]

c_3 : 負荷の粘性係数 [$\text{Nm}/(\text{rad}/\text{s})$]

k_1, k_2 : ねじり剛性 [Nm/rad]

$T(t)$: 制御入力 [Nm]

$\theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t)$: 円盤の回転角度 [rad]

三慣性実験装置は disc1 の下部にあるモータを回すことにより、disc3 の位置を制御する。このとき、運動方程式より、プラントモデルの伝達関数は、下記のようなになる。

$$G(s) = \frac{5.2 \times 10^8}{s^6 + 3.911s^5 + 5472s^4 + 15930s^3 + 5294000s^2 + 7800000s} \quad (15)$$

4.1 低次元制御器の実現-間接法-

式 (15) より, システムは積分特性を持つといえる. 平衡化打ち切り法の条件として, 可到達, 可観測で安定なシステムであることが必要である.

よって, 式 (15) より $1/s$ をはずして低次元モデルを設計することにする. なお, $1/s$ は低次元モデルを求めた後にもどすこととする. 平衡化打ち切り法を用い, 5 次数である元のプラントモデルを, 3 次数に低次元化した. 低次元化を行う際, 元のモデルを P と低次元のモデル \hat{P} のインパルス応答を調べた. この結果を下に示す.

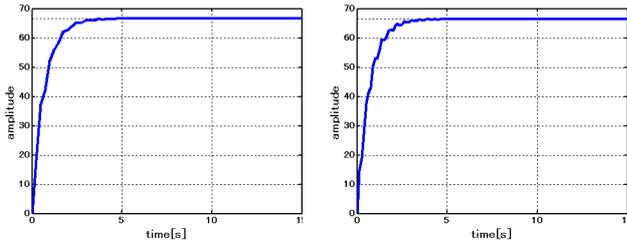


図 5 高次元モデル (P) 図 6 低次元モデル (\hat{P})

このように, ほぼ一致する結果が得られた. また, 下にボード線図を示す. この図より, 周波数応答は低周波数帯域では完全に一致していることがわかる.

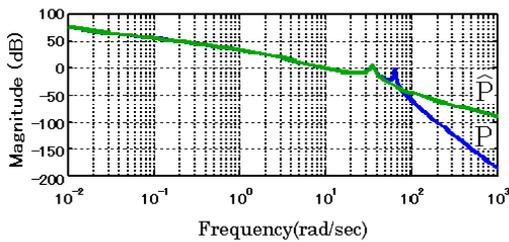


図 7 P と \hat{P} のボード線図

次に, W_t を決定し, ロバスト安定性を保証する制御器を設計する.

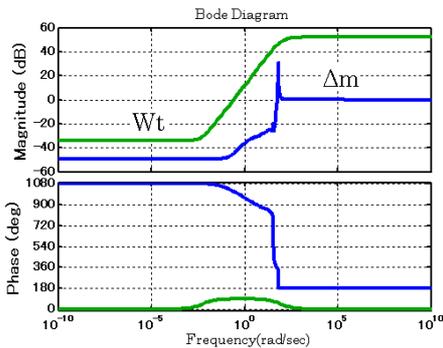


図 8 乗法的誤差 Δ_m と重み関数 W_t のボード線図

図 8 の Δ_m より, W_t を決定した. W_t を以下に示す.

$$W_t = \frac{398.1s + 2}{s + 100} \quad (16)$$

このときの目標値応答, 及び入力電圧のシミュレーション結果を以下に示す.

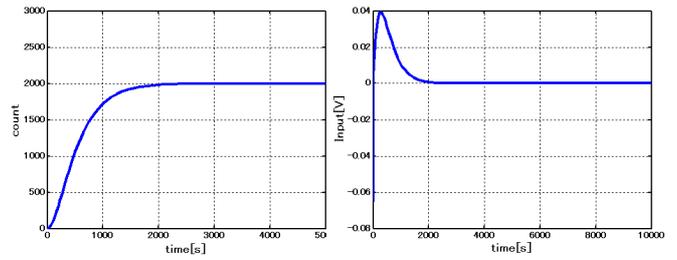


図 9 目標値応答

図 10 入力電圧 (U)

図 9 より, ロバスト性を保証する制御器を設計できたことがわかる. しかし, 整定時間が約 2000 秒かかる. よって, 次に W_s を設定することにより, 制御性能を向上させる. W_s, W_t を用いる混合感度問題を考える. 重み関数 W_s に GA を適用し求める.

$$W_s = \frac{K}{Ts + 1} \quad (17)$$

とし, 最良化する決定変数を K, T とした.

評価関数を, 目標値応答と目標値との誤差面積, オーバーシュート, 定常偏差とした. 各パラメータとして, 世代を 50, 個体数を 10, 交叉率を 0.6, 突然変異率を 0.02, K, T の各ビット数を 10 とした.

W_s は GA を適用させた結果, 次式となった.

$$W_s = \frac{5033}{72.34s + 1} \quad (18)$$

ここで得られた W_s, W_t を用い, 制御器を設計した. 図 11 に Δ_m と W_t, W_s のボード線図, 図 12, 13 にシミュレーション結果を以下に示す.

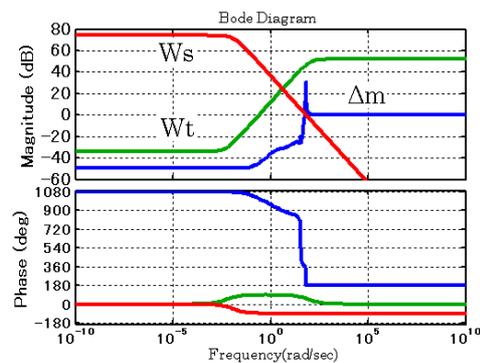


図 11 乗法的誤差 Δ_m と重み関数 W_t, W_s のボード線図

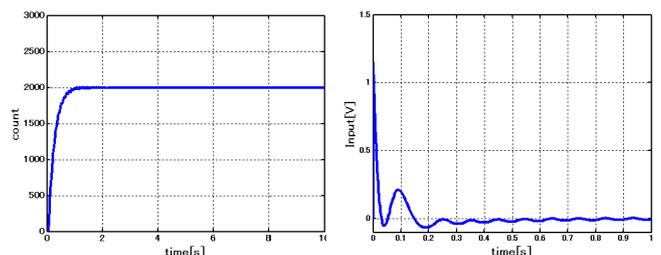


図 12 目標値応答

図 13 入力電圧 (U)

図 12 より、整定時間も約 1 秒と早く、良い応答性が得られたことがわかる。また、図 13 より、モータの最大電圧が約 5[V] ということを考慮すると、約 1.3[V] と適度な電圧であることがわかる。

4.2 低次元制御器の実現-直接法-

図 3 の I-PD 制御系において、入力 w から制御量 z までの H ノルムを γ 未満にする PID 制御器のパラメータ k_p, k_i, k_d を求める。

$$\|T_{zw}\| = \left\| \frac{1 + P(k_p + k_d s)}{1 + P\{(k_p + k_d s) + \frac{k_I}{s}\}} \right\| < \gamma \quad (19)$$

この H 制御問題を GA を用いて解き、 k_p, k_i, k_d を求めた。最良化する決定変数を k_p, k_i, k_d とし、評価関数を $\|T_{zw}\|$ とした。また、各 GA のパラメータとして、世代を 200、個体数を 50、交叉率を 0.6、突然変異率を 0.02、 k_p, k_i, k_d の各ビット数を 10 とした。

ここで、各 PID パラメータをランダムに与えると、特性方程式 $1 + P(s)K(s) = 0$ の根である閉ループ系の極の実部が正になると応答が不安定になってしまうことがある。この問題は、あらかじめ、系が安定になる PID パラメータのみを用いて GA を考えることで解決される。GA を適用した結果、得られた k_p, k_i, k_d はそれぞれ 0.9179, 0.0235, 0.0049 となった。このときの H ノルムは 1.0146 だった。シミュレーション結果を下に示す。

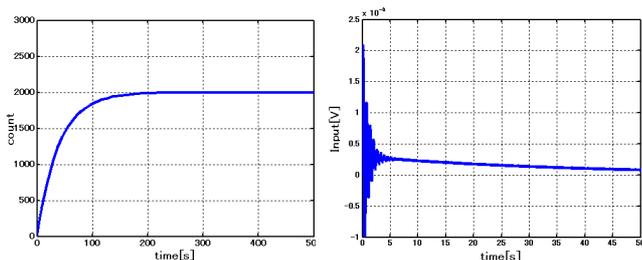


図 14 目標値応答

図 15 入力電圧 (U)

図 14 より、安定化されていることがわかる。しかし、整定時間が約 200 秒と遅い。よって次に、評価関数に、目標値応答と目標値との誤差面積を加えることで制御性の向上を目指した。得られた k_p, k_i, k_d はそれぞれ 0.9316, 0.7986, 0.0029 となった。このときの H ノルムは 2.122 だった。シミュレーション結果を以下に示す。

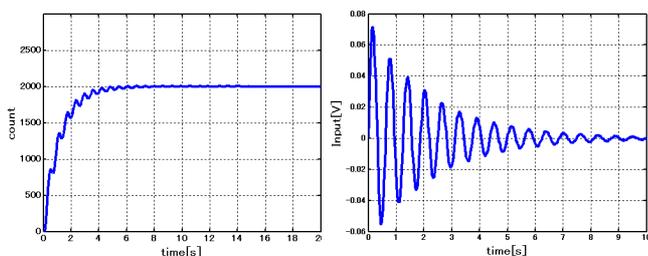


図 16 目標値応答

図 17 入力電圧 (U)

この結果より、整定時間も約 4 秒と良い結果が得られたことがわかる。

5 検証

下にシミュレーション結果と実験結果を示す。

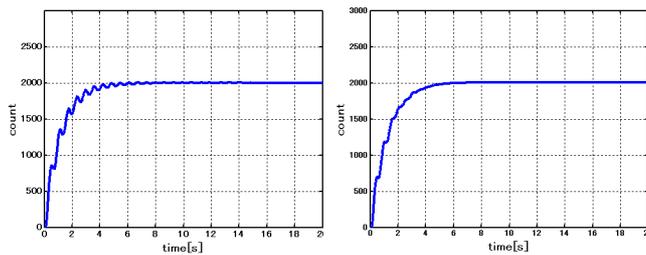


図 18 目標値応答

図 19 実験結果

この結果から、シミュレーション結果と実験結果がほぼ同じになったことがわかる。

6 おわりに

本研究では、構造が単純かつ、制御性を保証する制御器の設計をすることを目的とし、アプローチ法として、2つの設計方法を提案した。1つ目のアプローチ方法では、モデル低次元化の際に生まれる誤差を許容する制御器を設計するために、ロバスト安定化問題を解き、ロバスト性を保証した上で、感度低減問題を考えた。その結果、ロバスト性、制御性、共に保証する低次元制御器の設計を実現した。問題点として、さらなる制御性の向上を目指すとき、制御器の次元が高次元になってしまうことが予測される。2つ目のアプローチ方法では、制御器を PID 制御器に固定し、閉ループ系の H ノルムと、目標値応答と目標値との誤差面積を最小化することで、低次元制御器の設計を実現した。

この結果、アプローチ 1 と比較し、アプローチ 2 の方が制御器の導出において計算量が多くなるが、制御器の構造が単純なので実用性があるといえる。

参考文献

- [1] D.F.Enns: Model reduction with balanced realizations:an error bound and a frequency weighted generalization, IEEE, Decision and Control, 1984, the 23rd IEEE conference on23, 127/132 (1984)
- [2] Banpei Kaji, Gan Chen and Hiroshi Shibata: Design of Reduced-order Controller by using Real-coded Genetic Algorithm, IEEE, System Theor, 2003, proceedings of the 35th Southeastern Symposium on, 48/52 (2003)
- [3] 佐伯: 制御構造制約のある H 制御問題に対する PID 制御器設計, SICE, 41-2, 149/156 (2005)
- [4] 川津: 構造制約のあるロバスト補償器設計-PID 補償器への応用-, 南山大学大学院修士論文 (2005)
- [5] 長堂, 臼井: H 制御器の一般表現を用いたブロック平衡実現による制御器低次元化, IEEJ Trans, EIS, 126-5 (2006)
- [6] 安藤: GA を用いた極配置による PID 制御, 高速信号処理応用技術学会誌, 10-2 (2006)