遅れを有するシステムの PID制御に関する現代制御理論からのアプローチ

M2005MM004 原田新也
指導教員: 高見勲

1　はじめに

現在最も多く用いられている制御手法は古典制御の1つであるPID制御である．PID制御は一般的に馴染みが深く，構造が簡単で実用性に優れているといえる．代表的なPIDパラメータ決定法として，経験的に与えられたパラメータを使ってコントローラを導出するZiegler-Nichols法[1]，チェン・フローネス・レスウィック法がある．しかし，これらの方法は十分な制御性能が得られていないのが実状である．一方，現代制御理論は数学的，また理論的に制御コントローラを導出できる点が優れている．厳密な数式モデルを得ることができれば，自分の希望した応答性能を満足するコントローラを理論的に導出することができる．しかし，コントローラが複雑であったり，厳密な数式モデルやコントローラの導出が容易ではないなどの点から現実にはあまり使われていない．そこで本研究では現代制御理論とPID制御（古典制御）の融合を行い，制御対象に対して希望の応答を実現することをテーマとした．

2　積分特性を持つ系

入力$u(t)$，出力$y(t)$の間に

$$y(t) = k_I \int_0^t u(\tau) d\tau$$

の関係がある場合，その伝達関数は，

$$G(s) = \frac{k_I}{s(s^n + d_1 s^{n-1} + \ldots + d_n)} \tag{1}$$

となる．これを積分特性という．伝達関数の極を求めると$s=0$が表れる．安定性の条件（システムの伝達関数の分母をゼロとおいた方程式の根が，すべて負の実部を持つこと）より，このシステムは厳密には安定であるとは言えない．本研究では積分特性を持つ系の制御対象の例として三慣性システムを取り扱う．

三慣性システムは，工作機械や産業用ロボットなどに代表される位置決め制御装置の製品モデルとしてよく知られている．図1の三慣性システムを考える． モータを回すことにより，$disk3$の位置を制御する．ここで，

J_1，J_2：モータの慣性モーメント　[kgm^2]
J_3：負荷の慣性モーメント　[kgm^2]
c_1，c_2：モータの粘性係数　[Nm/(rad/s)]
c_3：負荷の粘性係数　[Nm/(rad/s)]
k_1，k_2：ねじり剛性　[Nm/rad]
$T(t)$：制御入力　[Nm]
$\theta_1(t)$，$\theta_2(t)$，$\theta_3(t)$：円盤の回転角度　[rad]

である．

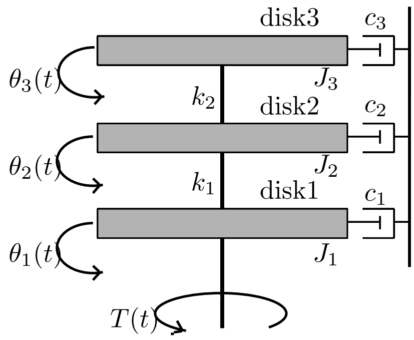

図 1: 三慣性システム

制御対象の伝達関数は，

$$G_p(s) = \frac{num}{den(s)}$$

$$num = 5.2 \times 10^8$$
$$den(s) = s^6 + 3.911 s^5 + 5.472 \times 10^3 s^4 + 1.593 \times 10^4 s^3 + 5.294 \times 10^6 s^2 + 7.8 \times 10^6 s$$

で与えられる．これは(1)式の形になっているので，積分特性を持っていることがわかる．

3　PID制御における高ゲイン出力フィードバックを用いた極配置法

本研究では，古典制御の一つであるPIDコントローラを決定する方法として，現代制御理論の疑似極配置法[2]を用いる．疑似極配置法では高ゲイン出力フィードバック[3]の条件の一つである「制御対象の伝達関数が最小位相系である（零点がすべて負の実部を持つ）」ことを利用している．この高ゲイン出力フィードバックにより，高速な応答性を目指す．

3.1　PID制御の安定化

次のような線形システムを考える．

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = cx \tag{2}$$

ここで，$x(t) \in R^n, u(t) \in R, y(t) \in R$はそれぞれ状態ベクトル，制御入力，出力である．$\{A, b\}$は可安定と仮定する．$y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t)$とPIDパラメータ$\eta_I, \eta_P, \eta_D, \beta$で記述された動的システム

$$\dot{u}(t) = -\eta_I y(t) - \eta_P \dot{y}(t) - \eta_D \ddot{y}(t) - \beta u(t) \tag{3}$$

を仮想的に考える．後述するが，このβによって，漸近安定化できるプラントが大幅に広がる．ここで，(2)式より

$$
\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= cAx(t) + cbu(t) \\
\ddot{y}(t) &= cA^2x(t) + cAbu(t) + cb\dot{u}(t)
\end{aligned}
$$

を(3)式に代入すると

$$
\begin{aligned}
\dot{u} = &-(1+\eta_D cb)^{-1}(\eta_I c + \eta_P cA + \eta_D cA^2)x \\
&-(1+\eta_D cb)^{-1}(\eta_P cb + \eta_D cAb + \beta)u
\end{aligned}
$$

をうる．ここで，

$$
v(t) = \dot{u}(t) \tag{4}
$$

としたときの次のような拡大システムを考える．

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t) \tag{5}
$$

設計上の仮想的出力$Y(t)$を次のように選ぶ．

$$
Y(t) = \tilde{c}_1 x(t) + \tilde{c}_2 u(t) = \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{c}_1 &= (1+\eta_D cb)^{-1}(\eta_I c + \eta_P cA + \eta_D cA^2) \\
\tilde{c}_2 &= (1+\eta_D cb)^{-1}(\eta_P cb + \eta_D cAb + \beta)
\end{aligned}
$$

このとき，システム(5)，(6)式に対して高ゲイン出力フィードバックを適用することによって拡大システム(5)式の制御入力$v(t)$を次のように与える．

$$
v(t) = -\alpha Y(t) = -\alpha\tilde{c}_1 x(t) - \alpha\tilde{c}_2 u(t) \tag{7}
$$

ここでαは出力フィードバックゲイン係数である．出力フィードバック則(7)式は拡張されたPIDコントローラ

$$
\begin{aligned}
\dot{u}(t) &= -k_I y(t) - k_P\dot{y}(t) - k_D\ddot{y}(t) - \tilde{\beta}u(t) \\
&= -\alpha\eta_I y(t) - \alpha\eta_P\dot{y}(t) - \alpha\eta_D\ddot{y}(t) - \alpha\beta u(t)
\end{aligned} \tag{8}
$$

で実現される．この新しく付加した$-\tilde{\beta}u(t)$によって，漸近安定化できるプラントが大幅に広がることになる（後で述べる零ダイナミクスの最小位相化が容易となる）．

3.2　疑似極配置法

疑似極配置法とは零ダイナミクスが漸近安定になるようなη_I,η_P,η_Dを極配置によって決定する方法である．次のような一般の線形システムを考える．

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{b}v(t) \\
\tilde{y}(t) &= \tilde{c}\tilde{x}(t)
\end{aligned} \tag{9}
$$

ここで$\tilde{x}(t) \in R^n$，$v(t) \in R$，$\tilde{y}(t) \in R$である．
線形システムが$\tilde{c}\tilde{b} \neq 0$であれば，次のような標準形に変換することができる．つまり，

$$
\begin{bmatrix} \xi \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{c} \\ T \end{bmatrix} \tilde{x}, \quad \xi \in R, \quad z \in R^{n-1}
$$

$$
Tb = 0
$$

によって，線形システム(9)式を次のような標準形へ変換することができる．

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}(t) &= q_{11}\xi(t) + \mathbf{q_{12}}z(t) + cbv(t) \\
\dot{z}(t) &= \mathbf{q_{21}}\xi(t) + Q_{22}z(t) \\
\tilde{y}(t) &= \xi(t)
\end{aligned}
$$

ただし，$q_{11} \in R$，$\mathbf{q_{12}} \in R^{1\times(n-1)}$，$\mathbf{q_{21}} \in R^{n-1}$，$Q_{22} \in R^{(n-1)\times(n-1)}$ はそれぞれ変数変換後のスカラ値，ベクトル，係数行列である．ここで，

$$
\dot{z}(t) = Q_{22}z(t) \tag{10}
$$

は零ダイナミクスと呼ばれる（**図2**点線部）．

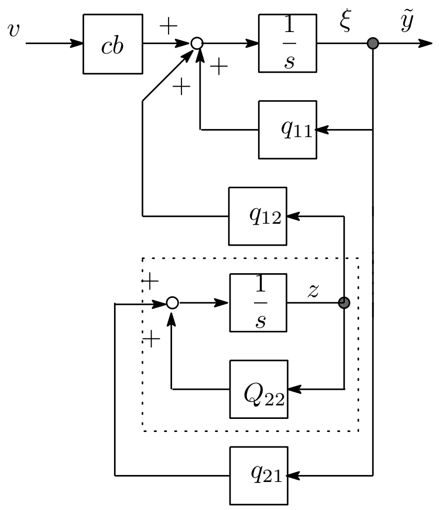

図 2: 零ダイナミクスの概念図

3.3　高ゲイン出力フィードバック

[**命題１**]次のような一般の線形システムを考える．

$$
\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{b}v(t)
$$

$$
\tilde{y}(t) = \tilde{c}\tilde{x}(t) \tag{11}
$$

ここで，$\tilde{x}(t) \in R^N$，$v(t) \in R$，$\tilde{y}(t) \in R$である．システム(11)式が$\tilde{c}\tilde{b} \neq 0$となり，またこのシステムは最小位相（すなわち零ダイナミクスが漸近安定）と仮定する．このとき，ある出力フィードバック則

$$
v(t) = -kY(t), \begin{cases} k > 0, & \tilde{c}\tilde{b} > 0\text{のとき} \\ k < 0, & \tilde{c}\tilde{b} < 0\text{のとき} \end{cases} \tag{12}
$$

が存在して，線形システム(11)式を漸近安定化することができる．ただし，$|k| > k_0 > 0$である．

拡大システム(5)，(6)式に命題１を応用して拡張速度型PIDコントローラを設計する．(6)式の時間微分は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\dot{Y}(t) &= \tilde{c}_1(Ax(t)+bu(t))+\tilde{c}_2 v(t) \\
&= (1+\eta_D cb)^{-1}(\eta_I c+\eta_P cA+\eta_D cA^2) \\
&\quad \times (Ax(t)+bu(t))+(1+\eta_D cb)^{-1} \\
&\quad \times (\eta_P cb+\eta_D cAb+\beta)v(t)
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
\frac{\partial \dot{Y}(t)}{\partial v(t)} = \tilde{c}_2 = (1+\eta_D cb)^{-1}(\eta_P cb+\eta_D cAb+\beta) \quad (13)
$$

である．

命題１における$\tilde{c}\tilde{b}$は，拡大系(5)，(6)式における

$$
\begin{bmatrix} \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \tilde{c}_2
$$

のことである．それゆえ命題１の$\tilde{c}\tilde{b} \neq 0$の仮定から

$$
\tilde{c}_2 = (1+\eta_D cb)^{-1}(\eta_P cb+\eta_D cAb+\beta) \neq 0 \quad (14)
$$

を満足していなければならない．

拡大システム(5)，(6)式で$cb=0$，かつ$cAb=0$の場合は$\beta \neq 0$に設定しなければならないが，その他の場合には$\beta=0$に設定できる．ここで，次のような変換を考える．

$$
\begin{bmatrix} \xi_1 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \quad (15)
$$

出力Yの次元は1であり，そのときの相対次数は$q=1$である．ゆえにzの次元は$z \in R^n$，また$\xi \in R$である．

(15)式より

$$
\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \tilde{c}_2^{-1}(\xi-\tilde{c}_1 z) \end{bmatrix}
$$

これを(5)式に代入すると，

$$
\begin{aligned}
&\dot{z} = Az + b\tilde{c}_2^{-1}(\xi_1-\tilde{c}_1 z) \\
&\tilde{c}_2^{-1}(\dot{\xi}_1-\tilde{c}_1\dot{z}) = v
\end{aligned}
$$

整理すると

$$
\begin{aligned}
&\dot{\xi} = \tilde{c}_1 b\tilde{c}_2^{-1}\tilde{\xi}_1 + \tilde{c}_1(A-b\tilde{c}_2^{-1}\tilde{c}_1)z + \tilde{c}_2 v \\
&\dot{z} = b\tilde{c}_2^{-1}\xi_1 + (A-b\tilde{c}_2^{-1}\tilde{c}_1)z
\end{aligned}
$$

をうる．また(6)式と(15)式より

$$
Y = \xi_1
$$

である．すなわち標準形へ変換された．ゆえに零ダイナミクスは

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= (A-b\tilde{c}_2^{-1}\tilde{c}_1)z \\
&= [A-b\{(1+\eta_D cb)^{-1}(\eta_P cb+\eta_D cAb+\beta)\}^{-1} \\
&\quad \times (1+\eta_D cb)^{-1}(\eta_I c+\eta_P cA+\eta_D cA^2)]z
\end{aligned} \quad (16)
$$

となる．この零ダイナミクス(16)式の分母にβが含まれることで，$\eta_P cb+\eta_D cAb=0$となる場合でも$\beta>0$と設定すれば最小位相化がしやすくなる．またβが含まれないと（つまり$\beta=0$）最小位相化できるシステムの範囲が狭まる．実際の計算手順を以下で示す．

[計算手順]

(1)　$A-bf$が漸近安定となるようなfを求める．そのようなfを得るための一つの手法は，代数リカッチ方程式$PA+A^TP-Pbr^{-1}bP+Q=0$を解き，$f=br^{-1}b^TP$と定めることである．ただし，$Q=I$ あるいは$Q=c^Tc, r=1$とする．

(2)　状態フィードバック$-fz$を施したときの閉ループ系$\dot{z}=\left(A-br^{-1}b^TP\right)z$の極を求める．

(3)　(2)で求めた極に(16)式の極が最良近似されるようにη_I，η_P，η_D を擬似極配置法を用いて決定する．

(4)　命題１を適用して(7)式の適当なαを選び，コントローラ(8)式を求める．さらにパラメータαにより，応答速度を調整することができる．最終的にPIDパラメータは，$(k_I,k_P,k_D) \to (\alpha\eta_I,\alpha\eta_P,\alpha\eta_D)$ として決定し，$\tilde{\beta}=\alpha\beta$とすると，速度型PIDコントローラ(8)式が求まる．$\beta=0$としても$\tilde{c}_2 \neq 0$($cb \neq 0$ or $cAb \neq 0$のとき)が成立する場合には$\tilde{\beta}=0$となり，(8)式は通常のPIDコントローラである．そうでない場合($cb=0$ and $cAb=0$のとき) には，$\beta>0$にとらねばならない．

4　実機による検証

4.1　実験結果

三慣性システムのモデルにおいてシミュレーション，および実験を行った．計算手順に基づき，$MATLAB$を用いてη_P，η_I，η_Dを決定すると，パラメータ値と近似値は次のように求まった．

$$
\begin{aligned}
&(\eta_P,\eta_I,\eta_D,\beta) = (0.00485, 0.00455, 0.000145, 0.06982) \\
&s = --6.15 \pm 67.2j, -20.1 \pm 45.1j, -31.6 \pm 15.6j
\end{aligned}
$$

ここで，高ゲイン出力フィードバック係数$\alpha=3.5$と設定し，I-PD制御を用いてシミュレーションを行った．また，平衡点近傍におけるチャタリング抑制のためにローバスフィルタも設定した．ブロック線図は**図3**のようになる．ここで，

gain1：比例ゲイン　$k_P=0.017$
gain2：積分ゲイン　$k_I=0.016$
gain3：微分ゲイン　$k_D=0.00508$
Transfer Fcn1：制御対象　$G_p(s)$
Transfer Fcn2：速度型PIDコントローラβ項　$\dfrac{s}{s+0.244}$
Transfer Fcn3：ローパスフィルタ　$\dfrac{1}{0.01s+1}$

である．

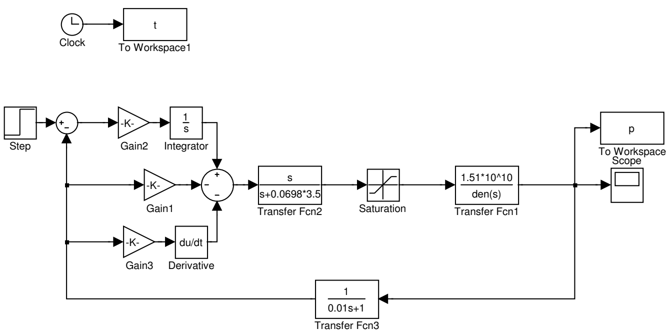

図 3: プラントとコントローラの閉ループ系

三慣性システムのステップ応答のシミュレーションおよび実験結果は**図4**となった．ここで，2000[count]= $\frac{\pi}{4}$ [rad]である．実線が実験結果，破線がシミュレーション結果である．

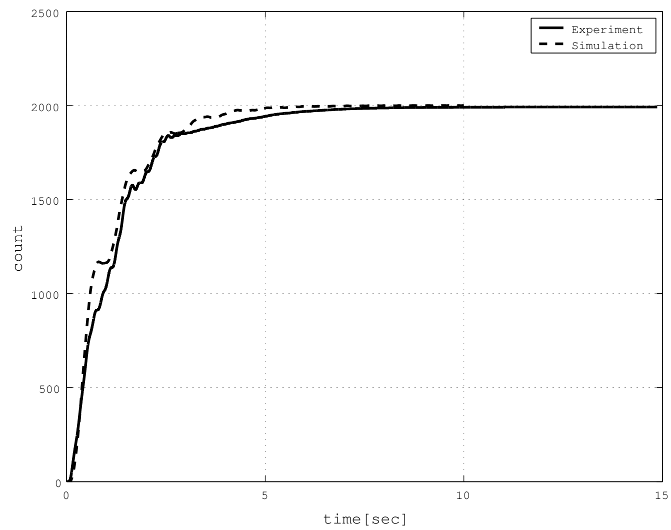

図 4: 三慣性システムの時間変化

図4より，実験結果とシミュレーション結果はほぼ同じとなった．なお，オーバーシュートはシミュレーション結果，実験結果共にない．安定かつ振動の少ない良好な制御結果であるといえる．

4.2　得られた成果

本研究ではPID制御における高ゲイン出力フィードバックを用いた極配置法による三慣性システムの制御シミュレーション，および実機による理論の検証を行った．高ゲイン出力フィードバック係数αを最適に設定することにより，応答性能のよいコントローラを設計した．$\alpha=1$の場合と$\alpha=3.5$の場合における実験結果の波形を比べると**図5**となる．ここで，破線が$\alpha=1$の場合，実線が$\alpha=3.5$の場合である．また，$\alpha=1$の場合と$\alpha=3.5$の場合の立ち上がり時間，整定時間をまとめると**表1**となる．

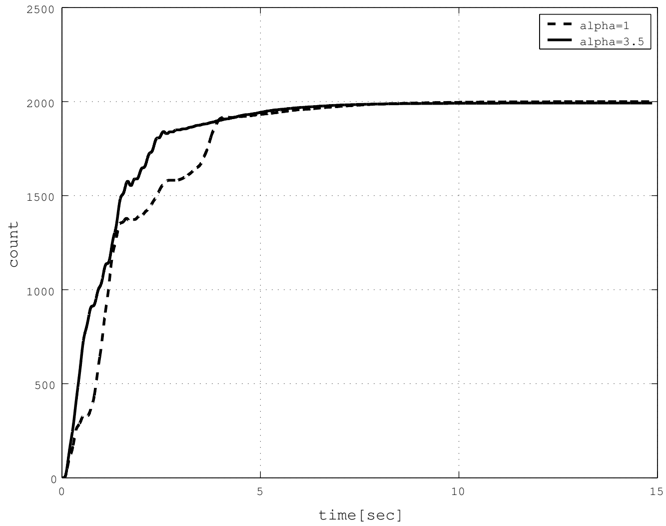

図 5: 三慣性システムの時間変化

表 1: 応答性の比較表

	立ち上がり時間[sec]	整定時間[sec]
$\alpha=1$	3.5	7.7
$\alpha=3.5$	2.0	6.2

図5，**表1**より，$\alpha=3.5$の結果の方が立ち上がり時間，整定時間ともに早い結果となっていることがわかる．高ゲイン出力フィードバックの特徴が顕著に表れているといえる．また，実機による理論の検証では**図4**より，立ち上がり時間，整定時間およびオーバーシュートはほぼ同じとなり，実機においても本研究の理論は有効であることが検証できた．得られた成果をまとめると以下となる．

積分特性を持つ系に対し，

零ダイナミクス安定化によるPIDの構造を持った高ゲイン出力フィードバックの導出に成功した．

希望する応答を実現するための理論としての計算アルゴリズムの有効性を確認した．

実機により理論の有効性を検証した．

参考文献

[1] Katsuhiro Ogata：Modern Control Engineering Fourth Edition, Prentice-Hall,New Jersey (2002)

[2] 志水，本城，山口：疑似極配置法によるPIDコントローラ調節法，計測自動制御学会論文集，**38**-8，686/693 (2002)

[3] 山口，志水：PID制御による漸近安定化制御-最小位相性と高ゲインフィードバックに基づく安定化-，電気学会論文集，**125**-5，739/746 (2005)

[4] Alberto Isidori：Nonlinear Control Systems Third Edition, Springer,London (1995)

[5] H.Nijmeijer：Nonlinear Dynamical Control Systems, Springer, New York (1990)