

時間割自動編成システムの研究

M2005MM022 太田 正和

指導教員 鈴木 敦夫

1 はじめに

現在,多くの中学校・高等学校において,少なくとも毎年1回教職員によって時間割編成が行なわれている.しかしながら,大規模な時間割を手作業で編成することは困難であるため,多大な時間を要するうえに,不完全な時間割編成しかできていない.

近年,時間割編成の担当者の負担を軽減し,確実な時間割編成を行なうために,計算機を用いて時間割を自動的に編成する研究がなされている.時間割編成問題は組合せ最適化問題の一種であり,NP完全問題として知られており,大規模な問題を解くには膨大な時間を要する.これに対して,メタヒューリスティクスを用いたアルゴリズムの研究などが行なわれており,時間割編成問題を専門とする国際会議も2年に1度開かれている[1].

本研究では,時間割編成を整数計画法の問題として定式化し,PCを用いて実用的な時間で時間割が編成できることを示す.その際,定式化に工夫をし,より少ない変数と制約式で問題を表現できるようにする.ここでは実例として私立S高等学校の実データおよび2008年度開校予定の南山大学附属小学校のデータを用いて時間割編成を行なう.その結果,1つあたりの時間割を約10秒の計算時間で編成することに成功した.

2 時間割編成問題

2.1 問題の説明

時間割編成問題(Timetable Problem)とは,決められた時間帯,教員,科目,クラス,教室などを考慮し,すべての授業をそれぞれの時間帯および教室に割当て,与えられたすべての条件を満たすような時間割を編成する問題である.この問題は,NP完全問題として知られ,厳密解を求めることが困難だと言われている.厳密解にこだわらず,許容範囲に解(以下,許容解と呼ぶ)があればよいとされ,制約充足問題(Constraint Satisfaction Problem,CSP)として定式化されることがしばしばみられる.こ

こでいう許容解とは,実行可能解の一部であり,制約条件によって許容範囲を定めて解を定めることをさす.

一般に,時間割編成を行なうにあたって,以下の条件を満たさなければならない.

- 各クラスの履修科目および単位数を守る
- 教室が同じ時間帯で重複しない
- 教員は1つの時間帯に,1つの授業しかできない
- 決められた時間帯に割当てる

これらの条件を絶対条件と呼ぶ.

それに加えて,各中学校・高等学校などの教育機関で定められた条件も考慮する必要がある.例えば,

- 教員の希望日程を考慮する
- 基本的に1つの科目は1日に複数時間行なわない
- 曜日毎の同じ時間帯に同じ科目をなるべく割当てない
- 実習科目などは,連続して時間帯を割当てる(以下,連続科目と呼ぶ)
- 選択科目などは,予め決められた時間帯へ割当てる(以下,固定科目と呼ぶ)
- なるべく教員が1日に全時間帯授業を行なわない

などである.これらの条件を考慮条件と呼ぶ.

これらの条件をもとに,0-1混合整数計画法の問題として定式化し,目的関数無しの実行可能解を許容解として求める.その際,固定科目に関わる変数はすべて変数から外して1で固定し,定数とみなす.そして,科目を担当する教員毎に分割し,科目と教員および科目とクラスの組合せを用いて,なるべく変数を減らすように工夫を施す.時間帯には土曜日・日曜日を考えず,月曜日から金曜日のみを取り扱う.1日の最大授業数は,各教育機関に合わせて設定を行なう.

考慮条件に関して,教員の希望日程および連続科目における制約は必ず満たすようにする.その他

の条件は予め許容する範囲を設定して定式化を行なう。

2.2 定式化

2.2.1 記号の定義

定数

I : 科目の添字集合

I_1 : 連続科目の添字集合 $I_1 \subset I$

I_2 : 毎週 1 日だけ授業を行なう科目の添字集合
 $I_2 \subset I$

J : 教員の添字集合

T : 時間帯の添字集合

C : クラスの添字集合

f : 1 日に行なえる最大授業数

d_i : 科目 i のクラス毎に必要な教員数 $i \in I$

b_{ic} : クラス c における科目 i の必要単位数
 $i \in I, c \in C$

$$k_{tc} = \begin{cases} 1 : \text{クラス } c \text{ で時間帯 } t \text{ に授業をする} \\ 0 : \text{クラス } c \text{ で時間帯 } t \text{ に授業をしない} \end{cases} \\ t \in T, c \in C$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 : \text{教員 } j \text{ が科目 } i \text{ を受け持つ} \\ 0 : \text{教員 } j \text{ が科目 } i \text{ を受け持たない} \end{cases} \\ i \in I, j \in J$$

$$R_1 = \{(i, j) \mid a_{ij} = 1, i \in I, j \in J\}$$

$$R_2 = \{(i, c) \mid b_{ic} \geq 1, i \in I, c \in C\}$$

変数

$$x_{ijt} = \begin{cases} 1 : \text{時間帯 } t \text{ に教員 } j \text{ が科目 } i \text{ の授業をする} \\ 0 : \text{時間帯 } t \text{ に教員 } j \text{ が科目 } i \text{ の授業をしない} \end{cases} \\ (i, j) \in R_1, t \in T$$

$$y_{itc} = \begin{cases} 1 : \text{時間帯 } t \text{ にクラス } c \text{ で科目 } i \text{ の授業をする} \\ 0 : \text{時間帯 } t \text{ にクラス } c \text{ で科目 } i \text{ の授業をしない} \end{cases} \\ (i, c) \in R_2, t \in T$$

2.2.2 目的関数

この問題は制約条件を満たす解を求めれば良いので、目的関数は設定しない。

2.2.3 制約条件

絶対条件

(A.1) 教員が同じ時間帯で重複しない

$$\sum_{i \in \{(i, j) \in R_1\}} x_{ijt} \leq 1, \quad \forall j, \forall t$$

(A.2) 各クラスの履修科目および単位数を守る

$$\sum_{t \in T} y_{itc} = b_{ic}, \quad (i, c) \in R_2$$

(A.3) 各クラスで決められた時間帯に割当てする

$$\sum_{i \in \{(i, c) \in R_2\}} y_{itc} = k_{tc}, \quad \forall t, \forall c$$

(A.4) 他教室を使用する科目の場合、その科目は各クラス同じ時間帯で 1 科目まで (今回は連続科目のみ)

$$\sum_{c \in \{(i, c) \in R_2\}} y_{itc} \leq 1, \quad i \in I_1, \forall t$$

(A.5) 各時間帯の教員数は、各クラスの科目かけるその科目に必要な教員数の総数に等しい

$$\sum_{j \in \{(i, j) \in R_1\}} x_{ijt} = \sum_{c \in \{(i, c) \in R_2\}} d_i y_{itc}, \quad \forall i, \forall t$$

考慮条件

(F.1) 各クラスで同じ科目は 1 日で m_1 回まで
($m_1 = 1, 2, \dots, f$)

$$\sum_{s=f(t-1)+1}^{ft} y_{isc} \leq m_1, \quad t = 1, 2, \dots, f, \\ (i, c) \in \{(i, c) \mid i \in (I \setminus I_1), c \in C\}$$

(F.2) 各クラスで同じ科目は曜日毎の各時間帯で m_2 回まで
($m_2 = 1, 2, \dots, 5$)

$$\sum_{s=1}^5 y_{i(fs-t+1)c} \leq m_2, \quad t = 1, 2, \dots, f, \\ (i, c) \in \{(i, c) \mid i \in (I \setminus I_2), c \in C\}$$

(F.3) 各教員が 1 日にできる授業数は m_3 回まで
($m_3 = 1, 2, \dots, f$)

$$\sum_{i \in \{(i, j) \in R_1\}} \sum_{s=f(t-1)+1}^{ft} x_{ijs} \leq m_3, \quad t = 1, 2, \dots, f, \forall j$$

(F.4) 連続科目は 2 時間連続の時間帯に割当てる

case1 f : 偶数

$$y_{i(2t-1)c} = y_{i(2t)c}, \quad t = 1, 2, \dots, \frac{5f}{2}, \\ i \in I_1, \forall c$$

case2 f : 奇数

$$y_{i(2t-1)c} = y_{i(2t)c}, \\ t = \frac{(s-1)f+2}{2}, \frac{(s-1)f+4}{2}, \dots, \frac{sf-1}{2}, \\ s = 1, 2, \dots, 5, \quad i \in I_1, \forall c$$

変数制約

(V.1) 教員時間割における変数

$$x_{ijt} \geq 0, \quad (i, j) \in R_1, \forall t$$

(V.2) クラス時間割における変数

$$y_{itc} \in \{0, 1\}, \quad (i, c) \in R_2, \forall t.$$

2.3 定式化についての考察

2.2 節での定式化では、あらかじめ許容範囲である m_1, m_2, m_3 を決める必要があり、それぞれの値は小さくなるほど制約は強くなり、大きくなるほど制約は弱くなる。制約が強ければ強いほど、問題を解く時間が長くなるか、解が存在しない場合があるが、解が見つければ理想的な時間割となる。逆に、制約を弱めれば問題を解く時間が短くなるが、理想的な時間割から遠ざかる。

また、この定式化は変数 y_{itc} を定数として考えると、絶対条件の式より、輸送問題の形になることが分かる。このことから、 x_{ijt} は実数制約のまま整数解が求められ、計算時間が短縮されることを示唆している。

3 事例 1: 私立 S 高等学校

3.1 問題の説明

私立 S 高等学校では、1 学年 6 クラスの全 18 クラスで構成されており、教員数は 65 人である。各学年の履修科目および単位数は表 1 のとおりである。

表 1 各学年の履修科目および単位数

1 年		2 年		3 年	
HR	1	HR	1	HR	1
総合学習	1	総合学習	1	選択 A2	2
国語総合	3	選択 A1	2	選択 B2	3
古典	2	選択 B1	3	選択 B3	3
世界史 A	2	英語選択	4	選択 C	2
数学 I	3	現代文	3	選択 D	2
数学 A	2	古典	2	選択 E	2
理科総合 A	2	数学 II	3	英語選択	4
体育	2	化学 I	3	現代文	3
音楽 I	2	体育	2	現代社会	2
家庭総合	2	保健	1	体育	2
宗教	1	家庭一般	2	保健	1
情報 A	2	宗教	1	宗教	1
英語 I	4	英語 IIR	2	英語 II	2
OC	1				

本校での 1 日の最大授業数は 6 時間で、空き時間は存在しない。原則として、各クラスで同じ科目は 1 日 1 時間まで、各クラスで同じ科目は曜日毎の各時間帯で 2 時間まで、各教員が 1 日で受け持てる上限は原則として 5 時間までである。HR(Home Room)、総合学習、選択 A1、選択 A2、選択 C、選択 D、選択 E、英語選択は固定科目である。選択 B1、選択 B2 はクラスによって教員が 2 人必要になる。情報 A、家庭総合、家庭一般は連続科目かつ教室制約のため各クラス同じ時間で 1 科目までとする。OC(Oral Communication) は教員が 2 人で授業を行なう。数学 I は 2 クラスを 3 クラスのグレードに分割し、それに伴い教員も 3 人必要になる。英語選択は 3 クラスを 4 クラスのグレードに分割し、それに伴い教員も 4 人必要になる。

3.2 定式化について

3.1 節の問題の説明より、 $f = 6, k_{tc} = 1 (\forall t, \forall c), m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 5$ として、定式化へ組込む。そして、HR などの固定科目に関する変数はすべて 1 の定数とみなし、変数の数には換算しない。

3.3 実行結果と計算時間

今回の定式化では、変数の数は、 x_{ijt} が 1860、 y_{itc} が 5760、制約条件の数は 6518 である。使用した PC の CPU は Intel PentiumD 3.73GHz、メモリ

2GB, OS は Microsoft Windows XP Professional SP2 である. この PC で LINDO 社の数理計画ソフトウェア What's Best!8.0.4.2 を用いて, この問題を約 7 秒で解くことができた. 以下の表 2 および表 3 が得られた結果の一部である.

表 2 1 年 1 組 時間割

	月	火	水	木	金
1	国語	英語	音楽	国語	数学 A
2	世界史	数学 I	体育	世界史	数学 I
3	家庭	OC	数学 I	情報 A	英語
4	家庭	理科	総学	情報 A	理科
5	数学 A	宗教	古典	英語	音楽
6	英語	古典	国語	体育	HR

表 3 1 年 1 組担任 時間割

	月	火	水	木	金
1	数学 A				数学 A
2		数学 I			数学 I
3		数学 I	数学 I		数学 I
4		数学 I	総学		
5	数学 A	数学 A	数学 A	数学 A	数学 I
6	数学 I			数学 I	HR

4 事例 2: 南山大学附属小学校

4.1 問題の説明

2008 年度開校予定の南山大学附属小学校では, 1 学年 3 クラスの全 18 クラスで構成されており, 教員数は 28 人である. 各クラスが履修する科目およびその単位数, 担当教員はあらかじめ決まっており, ほとんどの科目をクラス担任が受け持つことになっている. 全 13 科目 (国語, 社会, 算数, 理科, 生活, 体育, HR, 総合, 英語, 音楽, 図工, 家庭, 宗教) のうち, 前半 8 科目をクラス担任が受け持ち, 残りの 5 科目を専科の教員が受け持つ. 年間平均授業時数が 2.7 という科目もあるので, 学期毎の時間割編成が強いられる.

本校での 1 日の最大授業数は 7 時間で, 空き時間が存在する. 原則として, 各クラスで国語を除く同じ科目は 1 日 1 時間まで, 各クラスで同じ科目は曜日毎の各時間帯で 2 時間まで, 各教員が 1 日で受け持てる上限は原則として 6 時間までである. HR のみを固定科目, 図工, 家庭を連続科目とする.

4.2 定式化について

4.1 節の問題の説明より, $f = 7$, k_{tc} は学年および学期毎に異なり, $m_1 = 1$ (国語を除く), $m_2 = 2$, $m_3 = 6$ として, 定式化へ組込む. そして, 科目 HR に関する変数はすべて 1 の定数とみなし, 変数の数には換算しない.

4.3 実行結果と計算時間

今回の定式化では, 変数の数は, x_{ijt} が 3710, y_{itc} が 4968, 制約条件の数は 7348 である. 使用した PC スペックおよびソフトウェアは 3.3 節と同様であり, 1 学期毎に約 10 秒の計算時間で解くことができた. 以下の表 4 および表 5 が得られた結果の一部である.

表 4 1 年 1 組 時間割

	月	火	水	木	金
1	国語	算数	生活	図工	HR
2	英語	宗教	算数	図工	国語
3	国語	生活	英語	国語	音楽
4	算数	国語	国語	体育	生活
5	体育	体育	音楽	国語	算数
6		国語		算数	
7					

表 5 1 年 1 組担任 時間割

	月	火	水	木	金
1	国語	算数	生活		HR
2			算数		国語
3	国語	生活		国語	
4	算数	国語	国語	体育	生活
5	体育	体育		国語	算数
6		国語		算数	
7					

5 おわりに

本研究では, 私立 S 高等学校 3 学年分の時間割および南山大学附属小学校 6 学年分の時間割を実用的な時間で編成することに成功した.

参考文献

- [1] E. Burke and M. Trick (Eds.): *Practice and Theory of Automated Timetabling V*, Lecture Notes in Computer Science Series Volume 3616, Springer, Berlin, 2005.