

構造制約のあるロバスト補償器設計 - PID 補償器への応用 -

M2004MM023 川津 勇治

指導教員 高見 勲

1 はじめに

産業界で使われる補償器の90%以上は、 PID 補償器である。その理由を二つ挙げる。第一に、 PID 補償器のもつ構造が簡単だからである。 PID 補償器は、比例、微分、積分ゲインの三つのパラメータより構成される。各パラメータは、物理的な性質が明らかであり、現場での柔軟な対応が可能となる。したがって、突発的な異常に対して調整が必要になる状況を考えると、現場にとっては理想的な補償器である。第二に、三つのパラメータを決定するための調整法が確立されているからである。調整法には、現場でつちかわれた膨大なノウハウや経験も含まれる。そのため、これまでの実績もあわせて、エンジニアからの支持は大きい。

一方、補償器設計のために用いる設計用モデルに、実プラントの情報を全て反映させることはできないから、設計用モデルを用いて設計した補償器を、実プラントに実装してもうまく制御できないということが問題視された。そのため、実プラントと設計用モデルとのモデル化誤差を陽に扱える、1989年に完成した H_∞ 制御理論が注目を集めた[8]。いわゆるロバスト制御である。当時、 H_∞ 制御は PID 制御に代わる画期的な制御手法として広まっていくことが期待された。しかしながら、そうはならなかった。その理由には、 PID 補償器のようなメリットの欠如が指摘できる。一般に、 H_∞ 補償器の次数は高くなりやすいから、実装時の計算コストは大きくなる。さらには、線形補償器のもつ自明な構造以外に、物理的な構造や情報については何一つ分からない。結局、これまでの技術を捨ててまで採用するには、リスクが大きいわけである。

本研究の目的は、補償器の構造を PID 補償器に固定した上で、 H_2 、 H_∞ ノルムなど、ロバスト制御で使われる評価仕様や、付加的な評価仕様である閉ループ系の極領域制約[2]も扱える設計法を提案することである。つまり、多目的 PID 制御の枠組について考える。確立されている PID 補償器の調整法は経験則でしかなく、理論的な立場から見れば、制御仕様である安定性すら保証するものではない。また、プラントが一入出力系かつ安定であることが前提であり、理論的に安定性も保証する設計法が提案されたのはごく最近である[1, 7]。なぜなら、安定化 PID 補償器を設計する問題は、未解決課題である静的出力フィードバック (SOF) 補償器を設計する問題に帰着でき、NP 困難なクラスに属すからである[5, 6]。本研究でも、文献[1, 7]にならぬ、 PID 補償器設計問題を SOF 補償器設計問題に帰着させて解く方法について考える。 H_∞ 制御問題を PID 補償器の構造に固定した上で解くという研究は、12

年前からされており、最近多入出力系に拡張された[3]。ただし、安定化 PID 補償器が初期解として簡単に得られる問題に限定されており、いわゆる初期値問題には触れていない。文献[1, 7]では、初期値問題から扱ってはいるが、 H_2 、 H_∞ ノルムなどの評価仕様に対して、必要十分な解析条件を解いていないため、得られる結果が保守的になっている。そこで、本研究では必要十分な条件を導出し、文献[1, 4]のアルゴリズムをベースに、多目的仕様も扱えるようなアルゴリズムを提案する。

本文では以下の記号を用いる。 M^T は、行列 M の転置を表す。 $M > (\geq) 0$ は、行列 $M = M^T$ が (半) 正定であることを表す。 $\text{diag}\{M_1, \dots, M_n\}$ は、行列 M_1, \dots, M_n を対角成分にもつブロック対角行列を表す。 $\text{Tr}(A)$ は行列 A のトレースを表す。 \otimes はクロネッカー積を表す。 $\|\cdot\|_2$ で H_2 ノルムを表す。また、 $\text{He}\{M\} := M + M^T$ とする。

2 定式化

はじめに、本研究で扱いたい問題について提起する。次に、 PID 補償器を SOF に帰着させる方法について述べる。

2.1 問題設定

一般化プラント、

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w \\ x \in \mathcal{R}^n, z \in \mathcal{R}^{p_1}, y \in \mathcal{R}^{p_2}, w \in \mathcal{R}^{m_1}, u \in \mathcal{R}^{m_2} \end{cases} \quad (1)$$

について考える。ただし、本文で制御仕様として安定性しか要求していない場合は、仮想的な評価信号である z, w は考慮しない。また、可安定可検出などの一般的な標準仮定は満たされているものとする。このとき SOF ,

$$u = Fy, F \in \mathcal{R}^{m_2 \times p_2} \quad (2)$$

によって構成される閉ループ系は、

$$\Sigma_{cl}^{(s)} : \begin{cases} \dot{x} = A_{cl} x + B_{cl} w \\ z = C_{cl} x + D_{cl} w \end{cases} \quad (3)$$

となり、各行列パラメータは、

$$\begin{bmatrix} A_{cl} & B_{cl} \\ C_{cl} & D_{cl} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & D_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \quad (4)$$

で与えられる。

定義 1 $\Sigma_{cl}^{(s)}$ を安定化する SOF ゲイン F を設計する問題を SOF 安定化問題という。 $\Sigma_{cl}^{(s)}$ を安定化する SOF ゲイン F が存在するとき、 Σ は SOF により安定化可能である

という。さらに、複素平面上で極を $\text{Re}(s) = \alpha$ より左に配置する SOF ゲイン F が存在するとき、 Σ は SOF により α -安定化可能であるという。

紙面の都合により、本研究で扱う問題を簡略化する。

問題 1 ある与えられた $\kappa < 0$ に対して、 κ -安定性を達成する PID 補償器、

$$\Sigma_{PID} : \begin{cases} u(s) = K(s)y(s) \\ K(s) = K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d \frac{s}{1+\tau s} \\ K_p, K_i, K_d \in \mathcal{R}^{m_2 \times p_2} \end{cases} \quad (5)$$

を設計し、 κ -安定性を達成しつつ、 $\gamma_2 > \|\mathcal{T}_{zw}\|_2$ を最小化せよ。ただし、 PID 補償器の各ゲイン構造には、LMI 制約が与えられるものとし、 \mathcal{T}_{zw} は、 w から z までの閉ループ伝達関数行列を表す。

この問題は、いわゆる多目的 PID 補償器設計問題の一つと位置づけることができる。すなわち、 κ -安定性を満たした上で \mathcal{H}_2 最適化問題を解かなければならない。ここで、LMI 制約とはブロック分散型 PID 補償器のように、各ゲイン構造に、

$$\begin{bmatrix} K_p & K_i & K_d \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \text{diag}\{K_p^{(1)}, \dots, K_p^{(v)}\} & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (6)$$

ような制約が加わる状況である [3]。ただし、 v は入出力信号の適切な分割である。

2.2 SOF への帰着

PID 補償器設計問題を SOF 補償器設計問題に帰着させる方法について述べる。(5) 式で与えられる不完全微分を含む PID 補償器は、 Σ と Σ_{PID} の動的要素を含んだ拡大系に対し、 SOF ゲイン \mathcal{F} を設計する問題に帰着できる。したがって、図 1 に示す拡大系に対し、 SOF 安定化問題を解くことができれば、 PID 補償器が設計できる。ここに、行列 $C_p \in \mathcal{R}^{p_p \times p_2}$ 、 $C_i \in \mathcal{R}^{p_i \times p_2}$ 、 $C_d \in \mathcal{R}^{p_d \times p_2}$ は、拡大系を作るときに次数を調節するために用いる。

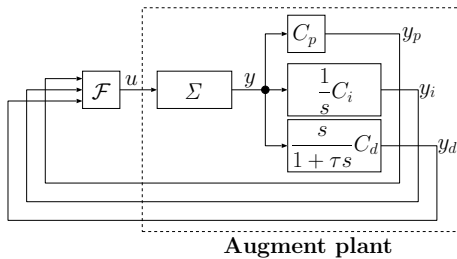


図 1 Augment plant with PID controller

3 主要結果

前節で示した問題は、多目的 SOF 安定化問題を解くことで設計できる。本節では、文献 [1] の結果を一般化した条件と、十分条件でない SOF \mathcal{H}_2 制御の結果をまとめる。さらに、文献 [1] で提案されたアルゴリズムとあわせて、多

目的 SOF 安定化問題を解くためのアルゴリズムを提案する。

3.1 \mathcal{D} -安定性条件と文献 [1] の結果

定義 2 ある $\zeta = \zeta^T \in \mathcal{R}^{m \times m}$ 、 $\xi \in \mathcal{R}^{m \times m}$ に対し、

$$\mathcal{D} := \{z \in \mathcal{C} : f_{\mathcal{D}} := \zeta + z\xi + \bar{z}\xi^T < 0\} \quad (7)$$

で定義される領域 \mathcal{D} を LMI 領域と呼ぶ [2]。さらに、領域 \mathcal{D} を複素左半平面の部分集合になるようにとる。極を領域 \mathcal{D} に配置する SOF ゲイン F が存在するとき、 Σ は SOF により \mathcal{D} -安定化可能であるという。

LMI 領域には、 α -安定領域、楕円領域、コニックセクタ領域などが含まれる。また、各領域の共通部分も表すことができる。文献 [2] によると、 Σ が SOF により \mathcal{D} -安定化可能であるための必要十分条件は、

$$M_{\mathcal{D}}(A_{cl}, P_{\mathcal{D}}) < 0 \quad (8)$$

$$M_{\mathcal{D}}(A_{cl}, P_{\mathcal{D}}) := \zeta \otimes P_{\mathcal{D}} + \text{He}\{\xi \otimes A_{cl}^T P_{\mathcal{D}}\} \quad (9)$$

を満たす SOF ゲイン F と $P_{\mathcal{D}} > 0$ が存在することである。

定理 1 $P_{\mathcal{D}}$ に依存しない任意の $W \geq 0$ に対して、

$$M_{\mathcal{D}}(A_{cl}, P_{\mathcal{D}}) + W < 0 \quad (10)$$

は (9) 式と等価である。

証明 十分性は明らかである。必要性のみ示す。十分大きなスカラー $\rho > 0$ が存在し、

$$M_{\mathcal{D}}(A_{cl}, P_{\mathcal{D}}) + \frac{1}{\rho}W < 0 \iff M_{\mathcal{D}}(A_{cl}, \rho P_{\mathcal{D}}) + W < 0 \quad (11)$$

が成り立つ。これより、新たに $\rho P_{\mathcal{D}} \rightarrow P_{\mathcal{D}}$ とおく。

したがって、領域 \mathcal{D} を解析するにあたり、(10) 式を用いても必要十分な解析が可能となる。(10) 式において、 $\zeta = -\alpha$ 、 $\xi = 1$ 、 $P_{\mathcal{D}} = P_s > 0$ 、 $W = (FC_2)^T FC_2$ と選び、平方完成すれば文献 [1] の α -安定化条件、

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{P_s A - \alpha P_s\} - P_s B_2 B_2^T P_s & * \\ B_2^T P_s + FC_2 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

がただちに得られる。したがって、(10) 式は文献 [1] の結果を含む。ここで、* は非対角ブロック項の対称を表す。(12) 式は、負の二次項 $-P_s B_2 B_2^T P_s$ が存在するため非凸な条件となる。文献 [1] で、負の二次項 $-P_s B_2 B_2^T P_s$ を、その上界 ((14) 式左辺)、

$$\forall X_s, (X_s - P_s)^T B_2 B_2^T (X_s - P_s) \geq 0 \quad (13)$$

$$X_s^T B_2 B_2^T X_s - \text{He}\{X_s^T B_2 B_2^T P_s\} \geq -P_s^T B_2 B_2^T P_s \quad (14)$$

でおきかえた条件も必要十分条件になることが示された。

補題 1 Σ が SOF により α -安定化可能であるための必要十分条件は、

$$\begin{bmatrix} \Phi(P_s, X_s, \alpha) & * \\ B_2^T P_s + FC_2 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

$$\Phi(P_s, X_s, \alpha) := \text{He}\{P_s A - X_s B_2 B_2^T P_s - \alpha P_s\} + X_s B_2 B_2^T X_s \quad (16)$$

を満たす SOF ゲイン F と $P_s > 0$, $X_s > 0$, $\alpha < 0$ が存在することである。

3.2 $SOF\mathcal{H}_2$ 制御

\mathcal{H}_2 制御は直達項 D_{cl} が存在すると、 \mathcal{H}_2 ノルムが有界にならない。そこで、 $D_{11} = 0$ かつ $D_{12} = 0$, または、 $D_{11} = 0$ かつ $D_{21} = 0$ であることを仮定する。本文では、 $D_{11} = 0$ かつ $D_{12} = 0$ の場合のみを考える。 $\|\mathcal{T}_{zw}\|_2 < \gamma_2$ かつ Σ が SOF で安定化可能であるための必要十分条件は、

$$\text{Tr}(Z) < \gamma_2^2 \quad (17)$$

$$-Z + B_1^T P_2 B_1 < 0 \quad (18)$$

$$A_{cl}^T P_2 + P_2 A_{cl} + C_{cl}^T C_{cl} < 0 \quad (19)$$

を満たす SOF ゲイン F と $P_2 > 0$, Z が存在することである [4]. 文献 [7] では、補題 1 に帰着させることで $SOF\mathcal{H}_2$ 制御問題を解いている。しかしながら、(19) 式には定数項 $C_{cl}^T C_{cl}$ が存在するから、帰着させるだけでは定理 1 の証明で現れる ρ が残ってしまう。文献 [7] では、 $\rho = 1$ と固定して十分条件を解いているため、当然ながら保守的な結果になっている。そこで、本来現れるべき負の二次項 $-C_2^T F^T F C_2$ (もしくは $-W$) を残し、その上界 ((21) 式左辺),

$$\forall L_2, C_2^T (L_2 - F)^T (L_2 - F) C_2 \geq 0 \quad (20)$$

$$C_2^T L_2^T L_2 C_2 - \text{He} \{ C_2^T F^T L_2 C_2 \} \geq -C_2^T F^T F C_2 \quad (21)$$

でおきかえた条件を考える。

定理 2 $\|\mathcal{T}_{zw}\|_2 < \gamma_2$ かつ Σ が SOF により安定化可能であるための必要十分条件は (17), (18) 式と、

$$\begin{bmatrix} \Lambda(P_2, X_2, F, L_2) & * & * \\ B_1^T P_2 + F C_2 & -I & * \\ C_1 + D_{12} F C_2 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

$$\Lambda(P_2, X_2, F, L_2) := \Phi(P_2, X_2, 0) - \text{He} \{ C_2^T L_2^T F_2 C_2 \} + C_2^T L_2^T L_2 C_2 \quad (23)$$

を満たす SOF ゲイン F と $P_2 > 0$, $X_2 > 0$, $L_2, Z > 0$ が存在することである。

3.3 多目的 SOF 補償器設計のためのアルゴリズム

(15), (17), (18), (22) 式を同時に満足する各変数が存在すれば、前節の問題が解ける。特に触れなかったが、(15), (22) 式には BMI 項が (1, 1) ブロックに存在するから、簡単には解けない。文献 [1] のアルゴリズムを拡張し、各条件を段階的に満たしていくアルゴリズムを提案する。

アルゴリズム 1

ステップ 1 $\kappa < 0$ を与える。適当な $S > 0$ を選び、(24) 式を解いて $i = 1$, $\alpha_i = \infty$, $X_s = P_s$ とおく。

$$A^T P_s + P_s A - P_s B_2 B_2^T P_s + S = 0 \quad (24)$$

ステップ 2 次の準凸最適化問題を解く。

$$\inf_{P_s, F, \alpha} \alpha, \text{ s.t. (15) holds.}$$

$i = i + 1$, $\alpha_i = \alpha$ とする。 $\alpha \leq \kappa$ ならば、 $\alpha = \kappa$, $X_s = P_s$ とおいて **ステップ 4** へ。 $|\alpha_i - \alpha_{i-1}| < \delta$ ならば、 Σ を κ -安定化する SOF ゲインが見つからないとして終了。

ステップ 3 次の凸最適化問題を解く。

$$\inf_{P_s, F} \text{Tr}(P_s), \text{ s.t. } \alpha = \alpha_i, (15) \text{ hold.}$$

$\|B_2^T X_s - B_2^T P_s\| < \delta$ ならば、 Σ を κ -安定化する SOF ゲインが見つからないとして終了。 そうでなければ $X_s = P_s$ とおいて **ステップ 2** へ。

ステップ 4 次の凸最適化問題を解く。

$$\inf_{P_2, Z} \text{Tr}(Z), \text{ s.t. (18), (19) hold.}$$

$j = 1$, $\gamma_2^{(j)} = \sqrt{\text{Tr}(Z)}$, $X_2 = P_2$, $L_2 = F$ とおく。

ステップ 5 次の凸最適化問題と解く。

$$\inf_{P_s, P_2, F, Z} \text{Tr}(Z), \text{ s.t. (15), (18), (22) hold.}$$

$j = j + 1$, $\gamma_2^{(j)} = \sqrt{\text{Tr}(Z)}$ とおく。

ステップ 6 $|\gamma_2^{(j)} - \gamma_2^{(j-1)}| < \delta$ ならば、 F を SOF ゲインとして終了。 そうでなければ、 $X_s = P_s$, $X_2 = P_2$, $L_2 = F$ とおいて **ステップ 5** へ。

κ -安定化を達成させるために必要な **ステップ 1** から **ステップ 3** までは、文献 [1] と同じである。 κ -安定化を達成できれば、 \mathcal{H}_2 ノルムを最小化する手続きが始まる **ステップ 4** に移る。 **ステップ 4** は、**ステップ 5** で必要となる X_2 の初期値を解析する手続きである。

命題 1 アルゴリズム 1 において、**ステップ 3** の $X_s = P_s$ および **ステップ 6** の $X_s = P_s$, $X_2 = P_2$, $L_2 = F$ という更新は、**ステップ 2** および **ステップ 5** の目的関数の単調非増加性を保証する。

証明 更新前の解を解を含むという性質を容易に証明できる [4]. したがって、少なくとも次回更新時に悪くならない。

命題 1 より、アルゴリズム 1 は収束解を必ず約束する。 したがって、**ステップ 2** で $\alpha \leq \kappa$ を満たす SOF ゲイン F が得られれば、必ず何らかの $\|\mathcal{T}_{zw}\|_2 < \gamma_2$ を満たす SOF ゲイン F も得られる。 また、このアルゴリズムを一般化することで、制御仕様がさらに複雑にからみあった問題も解くことができる。

4 設計例および実験結果

図 2(左) の PENDUBOT[9] を制御対象とし、アルゴリズム 2 を用いて κ -安定化 PID 型 \mathcal{H}_2 補償器を設計する。

4.1 設計

PENDUBOT の各行列パラメータは、

$$\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -128 & 0 & 29.42 & 0 & 16.41 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 123.59 & 0 & 41.37 & 0 & -8.57 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \end{array} \right] \quad (25)$$

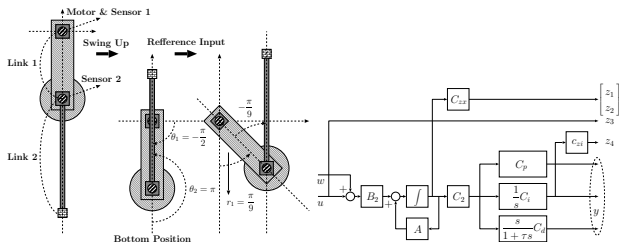


図 2 Situation of experiment for the PEN-DUBOT(right), generalized plant(left)

で与えられる [9]. 以下では,

$$C_p = C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \tau = 0.01 \quad (26)$$

とする. すなわち, 積分補償が一つとなるように PID 補償器の構造を制約する. 一般化プラントは, 図 2(右) とした. ただし,

$$C_{zx} = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \end{bmatrix}, c_{zi} = 1 \quad (27)$$

である. ステップ 2 を 2 回, ステップ 1 を 1 回手続きし, $\alpha = -4.69$ に収束した. $\kappa = -4.4$ から $\kappa = 0$ まで 0.2 刻みで大きくしていったときの, γ_2 の収束値とそのときの $\|\mathcal{T}_{zw}\|_2$ を図 3 に示す. $\kappa = 0$ で, PID 型 \mathcal{H}_2 補償器を設計した場合, $\gamma_2 = 6.985$ に収束し, $\|\mathcal{T}_{zw}\|_2 = 6.9849$ であった. 図 3 から分かるように, γ_2 はかなりタイトな上界となっている. 一方で, 図 2(右) に対して状態フィードバック型 \mathcal{H}_2 補償器を設計した場合, $\|\mathcal{T}_{zw}\|_2 = 6.3689$ であった. PID 型 \mathcal{H}_2 補償器は, 物理的には状態フィードバックと同質であるから, 必要十分条件に近い解析ができています. これは, 文献 [7] では扱えない非共通リアプノフ解を用いているからにほかならない.

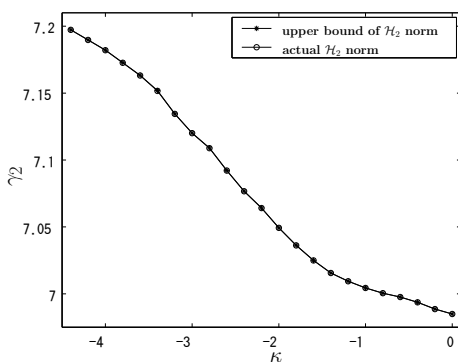


図 3 Relation between κ and γ_2 , case PID -type \mathcal{H}_2 control

4.2 シミュレーションと実験の比較

$\kappa = -4.4$ において, 設計した PID 型 \mathcal{H}_2 補償器,

$$K(s) = - \left[151.6 \ 198.4 \right] + \left[66.7 \ 0 \right] \frac{1}{s} - \left[15 \ 24.3 \right] \frac{s}{1 + 0.01s} \quad (28)$$

を用いて, シミュレーションと実験の比較を行った. 図 4(左) は, 図 2(左) に示すような実験を行ったときの様子を

表している. すなわち, 振り上げ制御から, ボトムポジション (平衡点) において PID 型 \mathcal{H}_2 補償器に切り替えた後, 10 秒後に参照入力として $r_1 = \pi/9$ と与えたときの様子である. 振り上げ制御の詳細は省略する. 図 4(右) は, 図 4(左) の 5 秒間から 20 秒間を線形シミュレーションと比較した様子である. ただし, 原点を平衡点としてスケールした. 現象を忠実に再現できている様子が確認できる.

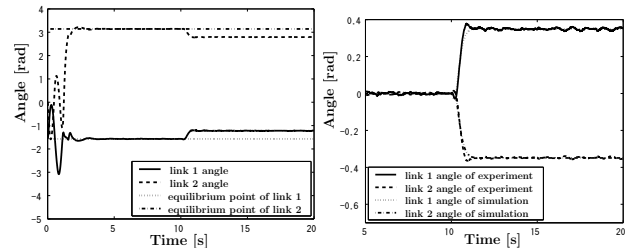


図 4 All the situation of experiment(right), comparison between simulation and experiment(left), case PID -type \mathcal{H}_2 control

5 おわりに

構造に制約のある線形補償器を設計する方法として, SOF に帰着させる方法を示した. 達成できた制御仕様を新たに制約条件として連立させるというアルゴリズムの構成法を示し, 多目的 SOF を設計するための枠組を提案し, シミュレーションと実験からその有効性を検証した.

参考文献

- [1] Y.-Y. Cao, J. Lam and Y.-X. Sun, Static Output Feedback Stabilization: An LMI Approach, Automatica, Vol. 34, No. 12, pp. 1641/1645(1998)
- [2] M. Chilali and P. Gahinet, \mathcal{H}_∞ Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-41, No. 3, pp. 358/367(1996)
- [3] 佐伯, 制御構造制約のある \mathcal{H}_∞ 制御問題に対する PID 制御器設計, 計測自動制御学会論文集, Vol. 41, No. 2, pp. 149/156(2005)
- [4] 下村, 玉越, 藤井, LMI 非共通解による多目的制御系設計-反復計算による方法-, 計測自動制御学会論文集, Vol. 36, No. 11, pp. 943/951(2001)
- [5] R. E. Skelton, T. Iwasaki and K. Grigoriadis, A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design, Taylor & Francis(1998)
- [6] V. L. Syrmos, C. T. Abdallah, P. Dorato and K. Grigoriadis, Static Output Feedback - A Survey, Automatica, Vol. 33, No. 2, pp. 125/137(1997)
- [7] F. Zheng, Q.-G. Wang and T. H. Lee, Design of multivariable PID controllers via LMI approach, Automatica, Vol. 38, pp. 517/526(2002)
- [8] K. Zhou, J. C. Doyle and K. Glover, Robust and Optimal Control, Prentice hall(1996).
- [9] Mechatronics Control Kit Model M-1 Use's Manual, Mechatronic Systems, Incorporated(2001)