

# ノックイン条項型リンク債の評価

M2004MM012 稲熊 敏和

指導教員 澤木 勝茂

## 1 はじめに

仕組債とは、本来の債券が持つ信用リスク、為替リスク、価格変動リスク以外のリスクを組み込み、発行体と投資家のニーズに合うように設計される債券である。また、為替レートや株価指数の変動により、利率（クーポン）や償還額が変動する。つまり、債券の額面が何らかの危険資産価格によって依存し元本が保証されない場合がある債券とも言える。

本研究では、このような仕組債のなかでも一般的なノックイン条項型リンク債についてバリアオプションと同じ枠組みでモデル化し価格を導出する。そして、ブラウン運動の鏡像原理を用いることにより、満期において参照株価と最大値・最小値に依存するようなノックインタイプの仕組債の価格が導出できることを示す。さらに、モンテカルル口法を用いて数値計算をおこない解析解と比較する。また、期間の途中からバリアが存在したり消滅したりするノックイン条項型リンク債についてもモンテカルル口法を用いて数値計算し、解析解と比較する。

## 2 商品の説明

ノックイン条項型リンク債の簡単な概要や本研究で用いる記号の定義について述べる。

### 2.1 記号の定義

各記号の定義を次のように与える。

$S_t$ : 時刻  $t$  における株価

$S_0$ : 時刻 0 における株価

$F$ : 額面

$C$ : 指定されたバリア水準

$r$ : 利率

$\sigma$ : ボラティリティ

$V(S_t, t)$ : 時刻  $t$  における株価が  $S_t$  のときのノックイン条項型リンク債の価格

### 2.2 商品の説明

本研究で考察するノックイン条項型リンク債とは、運用期間中株価が以下の 1~3 のような変動に対応して満期でのペイオフが変化する債券である。ただし、クーポンについては考えないものとする。

1. 一度もバリア水準  $C$  まで下落しない。
2. 残存期間中にバリア水準  $C$  まで下落するが、満期において初期株価よりも高い。
3. 残存期間内にバリア水準  $C$  まで下落し、さらに初期株価より低い。

1, 2 の場合は満期に元本  $F$  を保証し償還されるが、3 の場合は満期に元本は保証されず、株価に連動した基準価額 ( $=F \cdot \frac{S_T}{S_0}$ ) となる。このように債券でありながら、株価の下落によって元本割れのリスクが存在する。

## 3 定式化・解法

本節では、ノックイン条項型リンク債について定式化し、解析解を求める。まず、確率測度  $\tilde{P}$  のもとで株価の変動が確率微分方程式

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma d\tilde{W}_t) \quad (1)$$

にしたがうと仮定する。ここで、 $\tilde{W}_t$  は確率測度  $\tilde{P}$  のもとでの標準ブラウン運動である。

次に株価の最大値・最小値を

$$\begin{cases} \hat{S}_T = \max_{t \leq u \leq T} S_u \\ S_T^* = \min_{t \leq u \leq T} S_u \end{cases} \quad (2)$$

で定義する。

ここで満期でのペイオフを議論する。2.2 節で述べたノックイン条項型リンク債の満期でのペイオフは

$$F \mathbf{1}_{\{\hat{S}_T > C\}} + \min \left\{ F, F \frac{S_T}{S_0} \right\} \mathbf{1}_{\{S_T^* \leq C\}}$$

と表現することができる。したがって、この商品の価格は満期でのペイオフを割引いて確率測度  $\tilde{P}$  のもとで期待値をとったものである。

よって、価格は

$$\begin{aligned} V(S, t) &= e^{-r\tau} \tilde{E} \left[ F \mathbf{1}_{\{\hat{S}_T > C\}} + \min \left\{ F, F \frac{S_T}{S_0} \right\} \mathbf{1}_{\{S_T^* \leq C\}} \mid S_t = S \right] \end{aligned} \quad (3)$$

である。ここで  $\tilde{E}$  は確率測度  $\tilde{P}$  のもとでの期待値を表し、 $\tau (=T-t)$  は残存期間を表す。

また、(1) 式の解は

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \tilde{W}_t \right\}$$

である。この解を変形し

$$Y_t \equiv \log \frac{S_t}{S_0} = \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \tilde{W}_t \quad (4)$$

のようにおく。

また、 $Y_t$  に関して

$$\begin{cases} M_Y(T) = \max_{t \leq u \leq T} Y_u \\ m_Y(T) = \min_{t \leq u \leq T} Y_u \end{cases} \quad (5)$$

と定義すれば明らかに

$$\begin{cases} \hat{S}_T = S_t \exp(M_Y(T)) \\ S_T^* = S_t \exp(m_Y(T)) \end{cases} \quad (6)$$

となる。ここで、ノックイン条項型リンク債は次のように分解できることを示す。

定理 1 ノックイン条項型リンク債  $V(S, t)$  は

$$V(S, t) = B(r, t; F) - \frac{F}{S_0} V^b(S, t; S_0) \quad (7)$$

のように分解することができる。ここで、

$$\begin{aligned} B(r, t; F) &= e^{-r\tau} F \\ V^b(S, t; S_0) &= e^{-r\tau} \tilde{E} \left[ \max \{S_0 - S_T, 0\} \mathbf{1}_{\{S_T^* \leq C\}} \middle| S_t = S \right] \end{aligned}$$

である。 $B(r, t; F)$  は割引債の価値であり、 $V^b(S, t; S_0)$  は時刻  $t$  で行使価格が  $S_0$  のヨーロピアンノックインプットオプションの価値である。

また、(4), (6) 式を用いて (7) 式を整理することにより、

$$\begin{aligned} V(S, t) &= e^{-r\tau} F - e^{-r\tau} F \cdot \tilde{E} \left[ \mathbf{1}_{\{Y_T \leq \log \frac{S_0}{S}, m_Y(T) \leq \log \frac{C}{S}\}} \right] \\ &\quad + e^{-r\tau} F \cdot \tilde{E} \left[ \frac{S_T}{S_0} \mathbf{1}_{\{Y_T \leq \log \frac{S_0}{S}, m_Y(T) \leq \log \frac{C}{S}\}} \right] \quad (8) \end{aligned}$$

に書き換えることができる。したがって、(8) 式からもわかるように  $Y_T$  と  $m_Y(T)$  に関する同時分布関数を求めればよい。この同時分布は

$$\begin{aligned} \Pr \left( Y_T \leq \log \frac{S_0}{S}, m_Y(T) \leq \log \frac{C}{S} \right) &= \Pr \left( m_Y(T) \leq \log \frac{C}{S} \right) \\ &\quad - \Pr \left( Y_T > \log \frac{S_0}{S}, m_Y(T) \leq \log \frac{C}{S} \right) \quad (9) \end{aligned}$$

と変形できる。また、(9) 式の右辺第 1 項、第 2 項はブラウン運動の鏡像原理 (詳しくはブローディ [3] を参照せよ。) や Harrison[2], Conze and Viswanathan[1] を応用することにより以下のように導出することができる。

$$\Pr \left( m_Y(T) \leq \log \frac{C}{S} \right) = \Phi(d_1) + \left( \frac{C}{S} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} \Phi(d_2)$$

$$\Pr \left( Y_T > \log \frac{S_0}{S}, m_Y(T) \leq \log \frac{C}{S} \right) = \left( \frac{C}{S} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} \Phi(d_3)$$

ここで、

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left( \log \frac{C}{S} - \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right)$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left( \log \frac{C}{S} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right)$$

$$d_3 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left( -\log \frac{S_0}{S} + 2 \log \frac{C}{S} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right)$$

であり、

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

である。したがって、(9) 式の同時分布は

$$\begin{aligned} \Pr \left( Y_T \leq \log \frac{S_0}{S}, m_Y(T) \leq \log \frac{C}{S} \right) &= \Phi(d_1) + \left( \frac{C}{S} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} \{ \Phi(d_2) - \Phi(d_3) \} \quad (10) \end{aligned}$$

となる。よってノックイン条項型リンク債の価格 (解析解) は (10) 式を用いれば

$$\begin{aligned} V(S, t) &= e^{-r\tau} F \\ &\quad - e^{-r\tau} F \left[ \Phi(d_1) + \left( \frac{C}{S} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} \{ \Phi(d_2) - \Phi(d_3) \} \right] \\ &\quad + F \frac{S}{S_0} \left[ \Phi(d_4) + \left( \frac{C}{S} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2} + 1} \{ \Phi(d_5) - \Phi(d_6) \} \right] \quad (11) \end{aligned}$$

と求まる。ただし、

$$d_4 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left( \log \frac{C}{S} - \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right)$$

$$d_5 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left( \log \frac{C}{S} + \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right)$$

$$d_6 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left( -\log \frac{S_0}{S} + 2 \log \frac{C}{S} + \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right)$$

である。

#### 4 ペイオフ関数の一般化

本節では、ペイオフ関数を特定化せず、一般的なペイオフ構造をもつノックインタイプの仕組債について述べる。また、例として具体的な商品进行评估する。

##### 4.1 最大値に依存するノックイン条項型リンク債

本節では、株価とその最大値に依存するような仕組債について述べる。まず、満期でのペイオフを  $g(S_T, \hat{S}_T)$  とする。すると、価格は満期でのペイオフを割引いて確率測度  $\tilde{P}$  のもとで期待値をとったものであるので、

$$V(S, t) = \tilde{E} \left[ e^{-r\tau} g(S_T, \hat{S}_T) \middle| S_t = S \right]$$

となる。したがって、この商品の価格は確率測度  $\tilde{P}$  のもとで  $S_T$  と  $\hat{S}_T$  の同時密度を求めればよい。さらに、(4), (6) 式を用いることにより  $Y_T$  と  $M_Y(T)$  の同時密度を求めればよい。前節と同様に、ブラウン運動の反射原理等を用いることにより、

$$\begin{aligned} \Pr(Y_t < b, M_Y(t) < c) &= \Phi \left( \frac{b - at}{\sigma\sqrt{t}} \right) - e^{\frac{2ac}{\sigma^2}} \Phi \left( \frac{b - 2c - at}{\sigma\sqrt{t}} \right) \end{aligned}$$

となるので、 $Y_T$  と  $M_Y(T)$  の同時密度は、

$$f_T^{Y,M}(b,c) = \frac{2(2c-b)}{\sigma T \sqrt{T}} \phi\left(\frac{2c-b}{\sigma \sqrt{T}}\right) \exp\left\{\frac{ab - \frac{a^2}{2}T}{\sigma^2}\right\}$$

となる。ここで、 $a = r - \frac{\sigma^2}{2}$  である。したがって、株価とその最大値に依存するノックイン条項型リンク債の価格は

$$\begin{aligned} V(S,t) &= \tilde{E}\left[e^{-r\tau}g(S_T, \hat{S}_T) \mid S_t = S\right] \\ &= e^{-r\tau} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty g(x,y) f_T^{Y,M}(x,y) dx dy \end{aligned} \quad (12)$$

となる。つまり、株価とその最大値に依存するような仕組債は (12) 式を用いることにより、その価格を導出することができる。

#### 4.2 最小値に依存するノックイン条項型リンク債

本節では、株価とその最小値に依存するような仕組債について述べる。まず、満期でのペイオフを  $g(S_T, S_T^*)$  とする。すると、価格は満期でのペイオフを割引いて確率測度  $\tilde{P}$  のもとで期待値をとったものであるので、

$$V(S,t) = \tilde{E}\left[e^{-r\tau}g(S_T, S_T^*) \mid S_t = S\right]$$

となる。したがって、この商品の価格は確率測度  $\tilde{P}$  のもとで  $S_T$  と  $S_T^*$  の同時密度を求めればよい。さらに、(4)、(6) 式を用いることにより  $Y_T$  と  $m_Y(T)$  の同時密度を求めればよい。しかしながら、

$$m_Y(T) = -M_{-Y}(T)$$

を利用することにより、 $-Y_T$  と  $M_{-Y}(T)$  の同時密度を求めればよいことがわかる。したがって、前節と同様にブラウン運動の鏡像原理等を用いることにより、

$$\begin{aligned} \Pr(-Y_t \leq b, M_{-Y}(t) \leq c) \\ = \Phi\left(\frac{b - \gamma t}{\sigma \sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2\gamma c}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{b - 2c - \gamma t}{\sigma \sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

となるので、 $-Y_T$  と  $M_{-Y}(T)$  の同時密度は、

$$f_T^{-Y,M}(b,c) = \frac{2(2c-b)}{\sigma T \sqrt{T}} \phi\left(\frac{2c-b}{\sigma \sqrt{T}}\right) \exp\left\{\frac{\gamma b - \frac{\gamma^2}{2}T}{\sigma^2}\right\}$$

となる。ここで、 $\gamma = -(r - \frac{\sigma^2}{2})$  である。したがって、株価とその最小値に依存するノックイン条項型リンク債の価格は

$$\begin{aligned} V(S,t) &= \tilde{E}\left[e^{-r\tau}g(S_T, S_T^*) \mid S_t = S\right] \\ &= \tilde{E}\left[e^{-r\tau}g(Y_T, m_Y(T)) \mid S_t = S\right] \\ &= e^{-r\tau} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty g(x,y) f_T^{-Y,M}(x,y) dx dy \end{aligned} \quad (13)$$

となる。つまり、株価とその最小値に依存するような仕組債は (13) 式を用いることにより、その価格を導出することができる。

#### 4.3 具体例

本節では、4.2 節を利用して具体的な商品の価格を導出する。

##### 例 1 ペイオフの下限・上限のないノックイン条項型リンク債の評価

この商品は運用期間中株価が以下の 1, 2 のような変動に対応して満期でのペイオフが変化する債券である。ただし、クーポンは考えないものとする。

1. 一度もバリア水準  $C$  まで下落しない。
2. 残存期間中にバリア水準  $C$  まで下落する。

1 の場合は満期に元本  $F$  を保証し償還されるが、2 の場合は株価に連動した基準価額 ( $=F \cdot \frac{S_T}{S_0}$ ) となる。つまり、株価の下落によって元本割れの場合もあるが、株価の上昇により元本以上の額を受け取ることができる場合もある債券である。

3 節と同様に定式化して、この債券を評価する。まず、満期でのペイオフは

$$F \mathbf{1}_{\{S_T^* > C\}} + F \frac{S_T}{S_0} \mathbf{1}_{\{S_T^* \leq C\}}$$

と表現することができる。したがって、この商品の価格は満期でのペイオフを割引いて確率測度  $\tilde{P}$  のもとで期待値をとったものである。よって、価格は

$$V(S,t) = e^{-r\tau} \tilde{E}\left[F \mathbf{1}_{\{S_T^* > C\}} + F \frac{S_T}{S_0} \mathbf{1}_{\{S_T^* \leq C\}} \mid S_t = S\right] \quad (14)$$

となる。ここで、4.2 節で得た結果を用いれば、この商品の価格は

$$\begin{aligned} V(S,t) &= e^{-r\tau} F \left( \Phi(-d_1) - \left(\frac{C}{S}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \Phi(d_2) \right) \\ &\quad + F \frac{S}{S_0} \left( \Phi(d_4) + \left(\frac{C}{S}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1} \Phi(d_5) \right) \end{aligned}$$

と求まる。

#### 5 数値計算

3 節で導出した解析解とモンテカルル法で数値計算した結果を比較する。また、期間の途中からバリアが存在したり消えたりする場合（以降、window バリアとよぶ）のノックイン条項型リンク債についてもモンテカルル法を用い計算し、比較する。

表 1 にノックイン条項型リンク債の価格を求めるパラメータを示す。

まず、時刻  $t$  での株価  $S$  を変動させたときのノックイン条項型リンク債の価格を図 1 に示す。ここで、kaiseki, monte, window, discount はそれぞれ解析解、モンテカルル法による計算結果、window タイプのバリアに対するモンテカルル法の計算結果、割引債の価格である。次に、無

表 1 各パラメータ

|                     |          |
|---------------------|----------|
| 時刻 0 での株価 $S_0$     | 10000    |
| バリア水準 $C$           | 7500     |
| 額面 $F$              | 100      |
| 残存時間 $\tau$         | 0.75     |
| 満期 $T$              | 1        |
| シミュレーション回数 $M$      | 10000    |
| バリア判定回数 (時間分割数) $N$ | 100      |
| window バリアの存在期間     | 0.75 ~ 1 |

リスク利率  $r$  を変動させたときのノックイン条項型リンク債の価格を図 2 に示し、ボラティリティ  $\sigma$  を変動させたときのノックイン条項型リンク債の価格を図 3 に示す。図 1 において、割引債の価格は株価  $S$  とは独立なので定数となる。株価  $S$  を増加させていくとノックイン条項型リンク債の価格は割引債に近づくことがわかる。これは、株価  $S$  が増加するとバリアに触れる確率が小さくなり、定理 1 におけるヨーロピアンノックインプットの価値が 0 に近づくからである。また、図 2 において、無リスク利率  $r$  を増加させるとノックイン条項型リンク債の価格は下がっている。これは、通常の債券がもつ性質と同じであり、ノックイン条項型リンク債が無リスク利率  $r$  にたいして通常の債券と同様の性質をもつことがわかる。図 3 において、ボラティリティ  $\sigma$  を増加させるとノックイン条項型リンク債の価格は下がっている。これは、ボラティリティ  $\sigma$  が増加することによってバリアに触れる確率が高くなり、その結果価格が下がると考えられる。また、図 1 のときと同様に割引債の価格はボラティリティ  $\sigma$  とは独立なので定数となる。図 1 ~ 図 3 において、解析解よりもシミュレーションの結果の方が価格が高くなるのはバリアの判定を連続的におこなっているのか、離散的におこなっているのかの違いである。

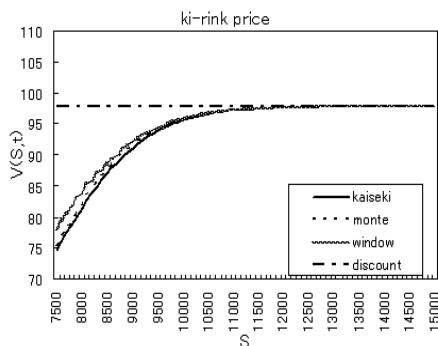


図 1 株価  $S$  を変動させたときのノックイン条項型リンク債の価格,  $r = 0.03$ ,  $\sigma = 0.2$

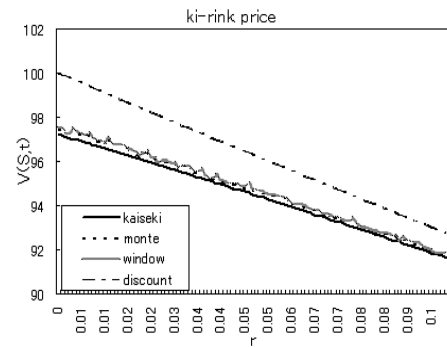


図 2 無リスク利率  $r$  を変動させたときのノックイン条項型リンク債の価格,  $S = 10000$ ,  $\sigma = 0.2$

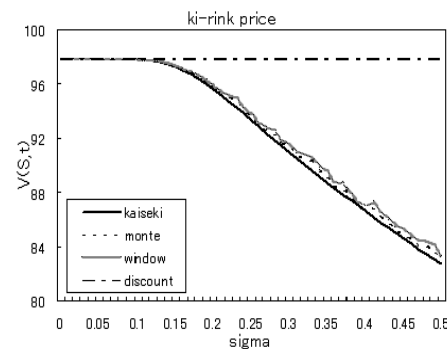


図 3 ボラティリティ  $\sigma$  を変動させたときのノックイン条項型リンク債の価格,  $S = 10000$ ,  $r = 0.03$

## 6 おわりに

前述のように、仕組債は発行体と投資家のニーズにあわせて設計されるため商品の内容や構造がわかり多岐にわたる。そのため、仕組債を単一の商品として定式化するのは難しい。本研究ではその中でも一般的なバリアに触れることによりペイオフが変化するノックイン条項型リンク債についてブラウン運動の鏡像原理を用いることにより解析解を導出した。また、ノックイン条項型リンク債が割引債とヨーロピアンノックインプットオプションとの差に分解できることを示した。さらに、ペイオフが満期における参照株価とその最大値・最小値に依存するようなタイプの仕組債の価格が導出できることを示した。

## 参考文献

- [1] Conze, A. and Viswanathan, "Path Dependent Options: The Case of Lookback Options", *Journal of Finance*, **46**, 1893-1907, 1991.
- [2] Harrison, J.M., *Brownian Motion and Stochastic Flow Systems.*, Wiley, New York, 1985.
- [3] ドージェ・ブローディ, 現代ファイナンス数理, 日本評論社, 2000.