

線形計画法による最良有理近似式の構成

2008MI293 吉戸成吾

指導教員：杉浦洋

1 はじめに

与えられた区間 $[a, b]$ における関数 $f(x)$ を計算するために, $f(x)$ の有理近似が使われる. 次数を固定したとき, 区間 $[a, b]$ における絶対誤差の最大値が最小となる有理近似を最良近似という. 昨年の宮脇 [2] は Remes の第 2 算法について論じたが, 本論文では, 線形計画法に基づいて, 与えられた被近似関数の最良有理近似式を求めるプログラムを作成する.

2 最良近似とミニマックス近似におけるチェビシェフの定理

区間 $[a, b]$ において, 連続関数 $f(x)$ を次数 (m, k) の既約な有理式

$$f_{mk}(x) = \frac{p_m(x)}{q_k(x)} = \frac{\sum_{j=0}^m a_j x^j}{\sum_{j=0}^k b_j x^j} \quad (1)$$

で近似する問題を考える. 誤差の指標を区間における最大絶対誤差

$$r_{mk} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - f_{mk}(x)| \quad (2)$$

とする. 次数 (m, k) を固定したとき, 最大絶対誤差 r_{mk} を最小にする有理関数近似 $f_{mk}(x)$ をミニマックス近似, あるいは最良近似という.

[定理 1](チェビシェフの定理) [1]

有限区間 $[a, b]$ における連続関数 $f(x)$ の (m, k) 次最良近似は存在して一意である. その最良近似式が実質 $(m - \nu, k - \mu)$ 次であったとして

$$f_{mk}^*(x) = \frac{\sum_{j=0}^{m-\nu} a_{j+\nu} x^j}{\sum_{j=0}^{k-\mu} b_{j+\mu} x^j} = \frac{p_m^*(x)}{q_k^*(x)} \quad (3)$$

とする. ここで, $a_m, b_k \neq 0$ である. そして, その誤差を

$$e_{mk}^*(x) = f_{mk}^*(x) - f(x)$$

と書く. また, その最大絶対誤差を r_{mk}^* とし, $r_{mk}^* \neq 0$ を仮定する.

このとき, 整数 $L = m + k + 2 - d$, $d = \min(\mu, \nu)$ に対し, 区間 $[a, b]$ の点列 $\zeta_1 < \dots < \zeta_L$ が存在して,

- (1) $|e_{mk}^*(\zeta_i)| = r_{mk}^*$ ($1 \leq i \leq L$)
- (2) $e_{mk}^*(\zeta_i) e_{mk}^*(\zeta_{i+1}) < 0$ ($1 \leq i < L$)

である. //

r_{mk}^* を最良近似度という. 最良近似式の誤差 $e_{mk}^*(x)$ は絶対値が r_{mk}^* で符号の交代する L 個の極値点をもつ. とくに, $k = 0$ の多項式近似では $L = m + 2$ である.

3 微分補正アルゴリズム

以下, $0 \in [a, b]$ を仮定し, $b_0 = 1$ と正規化する. 微分補正アルゴリズムは, 近似区間 $[a, b]$ に N 個の観測点 $x_i \in [a, b]$ ($1 \leq i \leq N$) を取り,

$$r_{mk} = \max_{1 \leq i \leq N} |f(x_i) - f_{mk}(x_i)| \quad (4)$$

を最小とする $f_{mk}(x) = f_{mk}^*(x)$ を求める. 観測点の密度が十分高ければ $f_{mk}^*(x)$ は最良近似にきわめて近いと期待できる. (4) は $f_{mk}(x)$ の係数に関する非線形最小化問題であるので, $f_{mk}^*(x)$ の第 s 近似 $f_{mk}^{(s)}(x)$ を改良して, 第 $s + 1$ 近似 $f_{mk}^{(s+1)}(x)$ を作るアルゴリズムを考える. ここで,

$$r_{mk}^{(s)} = \max_{1 \leq i \leq N} |f(x_i) - f_{mk}^{(s)}(x_i)| \quad (5)$$

とする. 微分補正アルゴリズムでは, (4) の代わりに,

$$w = \max_{1 \leq i \leq N} \frac{q_k(x_i)}{q_k^{(s)}(x_i)} (|f(x_i) - f_{mk}(x_i)| - r_{mk}^{(s)}) \quad (6)$$

を最小化する $f_{mk}(x)$ を $f_{mk}^{(s+1)}$ とする. $f_{mk}^{(s)}(x)$ が十分 $f_{mk}^*(x)$ に近く, $q_{mk}^{(s)} \cong q_{mk}^*(x) \cong q_{mk}^{(s+1)}$ なら, $q_{mk}^{(s+1)}/q_{mk}^{(s)} \cong 1$ ゆえ, (6) の最小化問題は (4) の最小化問題の近似問題と考えられる.

(6) は制約条件

$$\begin{aligned} w q_k^{(s)}(x_i) + r_{mk}^{(s)} q_k(x_i) - (f(x_i) q_k(x_i) - p_m(x_i)) &\geq 0 \\ w q_k^{(s)}(x_i) + r_{mk}^{(s)} q_k(x_i) + (f(x_i) q_k(x_i) - p_m(x_i)) &\geq 0 \end{aligned} \quad (1 \leq i \leq N)$$

の元で w を最小化する. これは,

$$\begin{aligned} p_m(x) &= a_0 + \sum_{i=1}^k a_i x^i \\ q_k(x) &= 1 + \sum_{i=1}^k b_i x^i \end{aligned}$$

の係数 a_i ($0 \leq i \leq m$), b_i ($1 \leq i \leq k$) を求める. 線形計画問題と等価である. //

4 数値実験

次数 $(m, k) = (m, m)$ ($1 \leq m \leq 5$) について実験した.

観測点は等間隔点

$$x_i = -1 + \frac{2i}{N-1} \quad (0 \leq i < N) \quad (7)$$

とチェビシェフ点

$$x_i = \cos \frac{\pi i}{N-1} \quad (0 \leq i < N) \quad (8)$$

の 2 種類を用いた .

観測点数が少ないと, 観測点間で誤差が突出する . 観測点数が多いと, 計算時間がかかる . 適切な点数を決める必要がある .

被近似関数は $f(x) = \exp x, \sin x, \cos x$ の 3 つを用いた . 近似区間はすべて $[-1, 1]$ である .

4.1 $f(x) = \exp x$ の最良近似

倍精度計算による実験では線形計画問題が悪条件となったため Mathematica の線形計画問題の求解関数 LinearProgramming が異常終了してしまった . そこで, 計算桁数を増やして異常終了を回避した . 各次数で使用した計算桁数は次数の増大につれて増加し, $(m, k)=(5,5)$ では 400 桁計算が必要であった . これは, 計算時間の増大を招くため, より少ない計算桁数で解を得るアルゴリズムの開発が課題として残った .

図 1 に $(m, k)=(5,5)$ の誤差のグラフを示す . 理論通り 12 個の符号が交代し, 絶対値の等しい極値を持つ . 係数は以下のようになった .

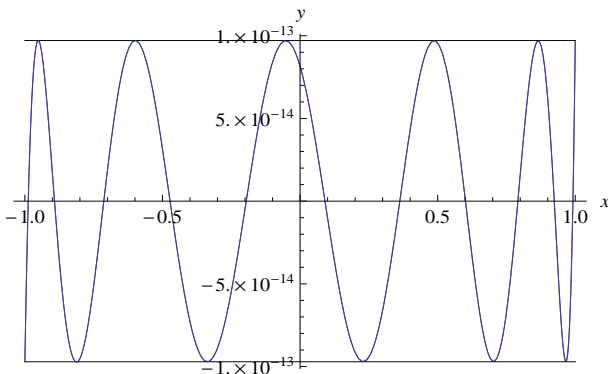


図 1 $(m, k) = (5, 5)$

$$\begin{aligned} a_0 &= 1.0000000000000082 \\ a_1 &= 0.5012663835242335 \\ a_2 &= 0.1117178809379411 \\ a_3 &= 0.01401127260989998 \\ a_4 &= 0.001004455738075724 \\ a_5 &= 0.00003359654918603794 \\ b_1 &= -0.4987336164751494 \\ b_2 &= 0.1104514974177369 \\ b_3 &= -0.01374008325036756 \\ b_4 &= 0.0009743929822026022 \\ b_5 &= -0.00003210361256381402 \\ r_{mk} &= 9.71 \times 10^{-14} \end{aligned}$$

4.2 $f(x) = \cos x$ の最良近似

この実験では $\cos x$ が偶関数であることが原因と思われる現象が現れた . まず, (m, k) が奇数の場合, 初期近似のチェビシェフ補間が解を持たないことがわかった . やむ終えず一次下の偶数次のチェビシェフ補間を初期値として用いた . 解は一次下の偶数次の解と等しくなった . 誤差のグラフ (図 2) がその事実を示す . 実際, 図 2 で極値の数を数えると 7 である . これは次数 $(m, k)=(3,3)$ の最良近似で実質次数が $(2,2)$ に退化した場合の極値の数と等しい . したがってチェビシェフの定理より分子分母を規約にすれば最良近似は次数 $(2,2)$ の最良近似と一致する . 図 2 に $(m, k)=(2,2), (3,3)$ の誤差のグラフを示す . 係数は以下のようになった .

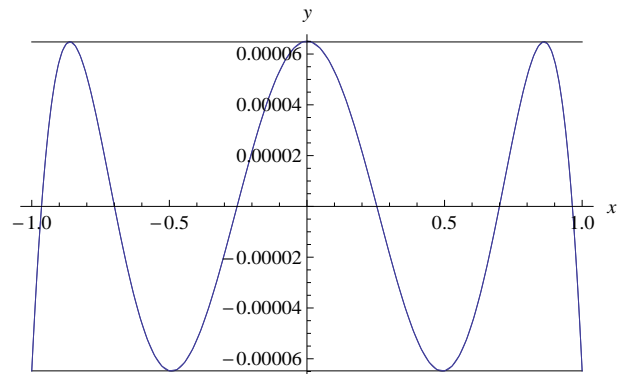


図 2 $(m, k) = (2, 2), (3, 3)$

$$\begin{aligned} a_0 &= 1.000064953405554 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= -0.4111967812601312 \\ b_1 &= 0 \\ b_2 &= 0.09001725599133048 \\ r_{mk} &= 6.48 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

5 おわりに

今回の研究により, 線形計画法に基づいて最良有理式近似式を求めるプログラムを作成することができた . それにより基本的な初等関数である指数関数, \sin 関数, \cos 関数の最良近似有理式を作成することができた . いずれの場合もプログラムは正常に終了し, 最良近似有理式を求めることに成功した . 線形計画法は数値的に不安定で計算桁数数百が必要な場合もあり, 計算時間の増大の原因となった . より数値的なアルゴリズムの開発が今後の課題である .

6 参考文献

- [1] Anthony Ralston and Philip Rabinowitz: A First Course in Numerical Analysis, Second Edition, Dover Publications, New York, 2001 .
- [2] 宮脇豊子, 最良有理式近似のための Remes の第 2 算法の実現, 南山大学数理情報学部情報システム数理学科 2010 年度卒業論文, 2011 .