H_∞ 制御理論を用いたペンダボットの安定制御

2008MI282　横山　功

指導教員：高見 勲

1　はじめに

ペンダボットは, 工学の分野全般において, 実験や理論検証等のために身近な制御対象として, しばしば用いられる倒立振子の１つとして, 幅広く知れ渡っており, 今までに数多くの研究が行われてきた. また, ペンダボットは単体では, 不安定かつ非線形であるため, 制御系設計から実験まで行うことができる制御対象として適していると思われる.

本研究では, ペンダボットの非線形モデルを導き, ミドルポジションでの線形近似を行い, ペンダボットの安定化を H_∞ 制御理論を用いて, シミュレーション及び実験を行い, 理論の有効性について検証を行う. また, 平衡点をずらした状態に対する閉ループ系の安定性を保証する.

2　制御対象

本研究で使用するペンダボットの概略図を図 1 に示す.

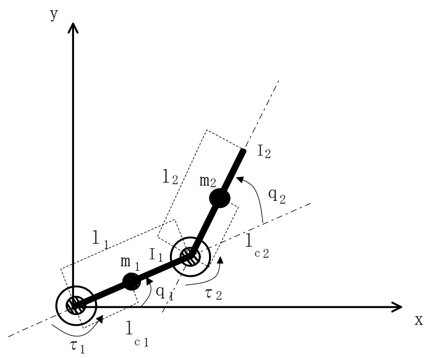

図 1　ペンダボットの概略図

本研究の制御対象は, ペンダボッドと呼ばれる倒立振子であり, モデルリングするとき, ラグランジュの運動方程式から, 状態空間表現を求める. しかし, 求めた状態空間表現は, 非線形であるので, トップポジションにおいてテーラー展開し, 線形化を行う [1]. 状態変数 x を

$$x = \begin{bmatrix} q_1 & \dot{q}_1 & q_2 & \dot{q}_2 \end{bmatrix}^t \tag{1}$$

とし, 状態空間表現を式 (2) に示す.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \tag{2}$$

ただし,A、B、C は, 次のように与えられる.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1.00 & 0 & 0 \\ -120.67 & 0 & 29.35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.00 \\ 119.76 & 0 & 41.41 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 16.36 \\ 0 \\ -8.55 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

3　制御系設計

3.1　一般化制御対象の設定

本研究で使用する一般化制御対象 $G(s)$ を図 2 に示す.

ここで,$w(t)$ は, 目標値入力,$K_f = [K\ KI]$ は状態フィードバックゲイン, W_x は状態に対する重み,W_u は入力に対する重み, W_e は目標値に追従させるための偏差に対する重み, z_x は状態に対する評価出力,z_u は入力に対する評価出力, z_e は目標値に追従させるための偏差の積分に対する評価出力とする.

また, 一般化制御対象 $G(s)$ は次式となる.

$$G(s) : \begin{cases} \dot{x}_e = A_e x_e + B_w w + B_u u \\ z_\infty = C_\infty x_e + D_\infty u \end{cases} \tag{4}$$

ただし,

$$A_e = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B_u = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_\infty = \begin{bmatrix} W_x & 0 \\ 0 & W_e \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W_u \end{bmatrix} \tag{5}$$

とする.

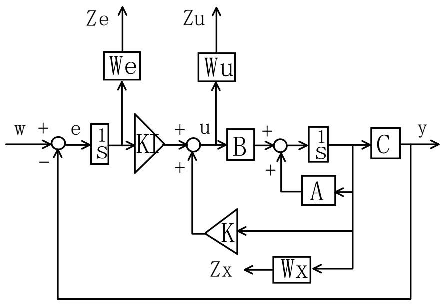

図 2　一般化制御対象

3.2　LMI の定式化

H_∞ 状態フィードバックの LMI の定式化をすると

$$\begin{bmatrix} Z & B_w & XC_\infty^T + Y^T D_\infty^T \\ B_w^T & -{\gamma_\infty}^2 I & 0 \\ C_\infty X + D_\infty Y & 0 & I \end{bmatrix} \prec 0 \tag{6}$$

となる. ただし, X, Y, Z は, 下式で与えられる.

$$X = X^T \succ 0, Y = K_f X,$$

$$Z = A_e X + X A_e^T + B_u Y + Y^T B_u^T$$

4　シミュレーションと実験

状態, 入力, 偏差に対する重みを以下のようにする．

$$W_x = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad W_u = 0.1, \quad W_e = 0.1 \quad (7)$$

また $\gamma_\infty = 0.9568$ とする．ここで制御系を導出すると,

$$K_f = [-221.18 \ -21.55 \ -263.06 \ -33.71 \ 16.99] \quad (8)$$

となる．導出した制御系を用いて、シミュレーションを行った．ただし, 初期値-1.57[rad] とし, 目標値-1.87[rad] のステップ入力を 20 秒後に与えたシミュレーションと実験結果である．その結果を図 3 に示す．

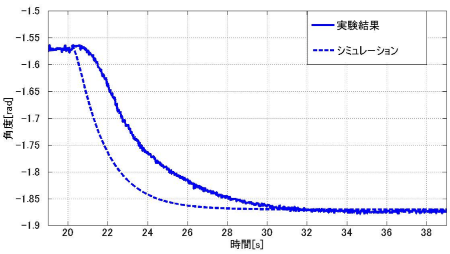

図 3　シミュレーションと実験結果

また制御対象に負荷 2.5[g] を加えた時のシミュレーションと実験結果を図 4 に示す．

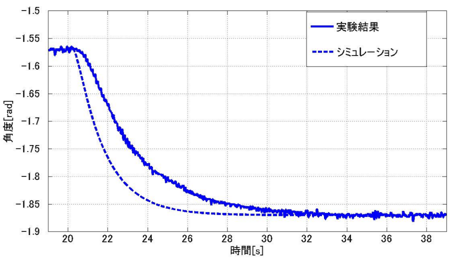

図 4　負荷 2.5[g] を加えたシミュレーションと実験結果

また制御対象に負荷 5[g] を加えた時のシミュレーションと実験結果を図 5 に示す．

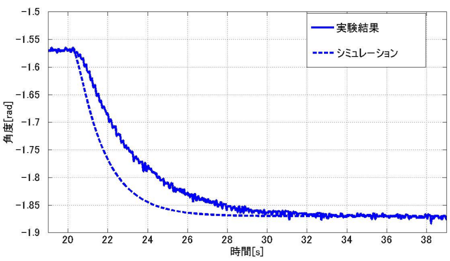

図 5　負荷 5[g] を加えたシミュレーションと実験結果

5　閉ループ系の安定

平衡点を 0.3[rad] ずらした点（$q_1 = -\frac{3}{5}\pi, q_2 = \frac{11}{10}\pi$）において, 閉ループ系が安定であることを以下に示す．ただし,A_N, B_N(N が錘 1.25[g] の数) とする．

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 \\ -112.11 & 0 & 27.27 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 \\ 117.91 & 0 & 41.86 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 15.99 \\ 0 \\ -8.72 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる時, 閉ループ系の極は, -19.64+21.24i , -19.64-21.24i , -0.653 , -5.27+0.68i , -5.27-0.68i となる．

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 \\ -111.69 & 0 & 31.36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 \\ 117.82 & 0 & 41.20 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 15.71 \\ 0 \\ -8.41 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる時, 閉ループ系の極は, -21.65+17.97i , -21.65-17.97i , -0.667 , -4.64 , -6.32 となる．

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 \\ -111.28 & 0 & 35.34 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 \\ 117.71 & 0 & 40.37 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 15.44 \\ 0 \\ -8.14 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる時, 閉ループ系の極は, -23.07+14.69i , -23.07-14.69i , -0.681 , -4.26 , -7.14 となる．以上のように極は全て左平面上にあり, 安定で,N が０ ～ ４に変動してもロバスト安定である．支配極を調べると,N が増加するに伴い, 支配極は原点から, 遠ざかる．よって,N が大きいほど速い応答が得られる．

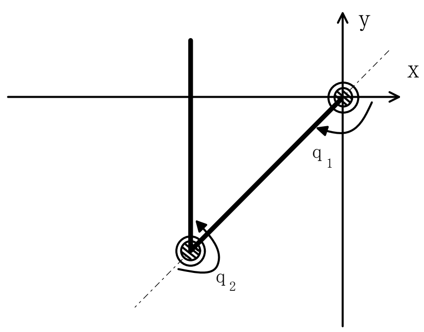

図 6　平衡点をずらした状態のペンダボットの概略図

6　おわりに

本研究で得られた成果を以下に示す．

・制御対象を, シミュレーション通りに目標値に追従させることができた．

・制御対象に負荷を加えることによる, 特性変動に対してロバスト性を保証できた．

・制御対象に負荷を加え, その状態に対する閉ループ系が安定であることを示せた．

参考文献

[1] 井上和夫監修, 川田昌克, 西岡勝博　著 ： MATLAB/SIMULINK によるわかりやすい制御工学, 森北出版