

複素力学系とフラクタル

—不動点の解析—

2008MI246 戸田圭一郎

指導教員：杉浦 洋

1 はじめ

複素領域 D から D への正則な写像 f について数学的に考察する時、 f のもとで不変な集合や、 z の f による軌道 $\{f^k(z), k \geq 0$ の漸近挙動など、 f をくりかえし施したときの諸性質に着目することがある。この写像 f と、それが定義されている「領域」 D を組にして $\{f, D\}$ と書き、これを力学系と呼ぶ。特に複素領域と、その上の正則関数を考えるとき複素力学系と呼ぶ。

コンピュータの発達により、複素力学系に関連した集合、ジュリア集合、ファトゥー集合などが具体的に画像化できるようになり、その不思議な美が人々を魅了した。

本研究では、宇敷 [1] に従って、複素力学系の世界を学ぶとともに、コンピュータを使った複素力学系の視覚表現について考察する。

2 複素力学系

2.1 不動点と固有値

単位円板 B からそれ自身への正則な写像 $f(z)$ について考える。 f によってそれ自身にうつされる点を f の不動点という。また、不動点を p としたとき、 $f'(p)$ をこの不動点の固有値という。固有値は

- (1) $f'(p) = 0$
- (2) $0 < |f'(p)| < 1$
- (3) $|f'(p)| = 1$
- (4) $|f'(p)| > 1$

のいずれかになる。(1),(2) は吸引的な不動点であるといい、(3) は無関心、(4) は反発的な不動点であるという。(1) の場合は特に吸引力が強いので、超吸引的ということもある。

2.2 吸引的不動点

不動点 p が吸引的であるとは、 p に十分近い点が、 f を繰り返すことによって p にどんどん近付いていくことをいう。このことは、次の命題により保証される。

[命題 1] 不動点 p が吸引的であれば、正の数 ε と、 $0 < k < 1$ で、

$$|z - p| < \varepsilon \quad \text{ならば} \quad |f(z) - p| < k|z - p|$$

をみたすようなものが存在する。//

この命題によれば、 $|z - p| < \varepsilon$ のとき、 $n = 1, 2, \dots$ について、

$$|f^n(z) - p| \leq k|f^{n-1}(z) - p| \leq \dots \leq k^n|z - p|$$

がわかり、それゆえ点列 $\{f^n(z)\}$ が不動点 p に収束することがわかる。

不動点 p に対して、 f によって作られる点列 $\{f^n(z)\}$ が p に収束するような、点 z のなす集合を鉢 (あるいは吸引領域) といい、 $A(p)$ であらわす。すなわち、

$$A(p) = \{z \in \mathbb{C} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = p\}$$

と表される。また、鉢 $A(p)$ は開集合である。開集合であるため、これは有限個、または無限個の連結成分を持つ。このうち p を含むものを $A^*(p)$ で表し、直接鉢と呼ぶ。

3 不動点の標準型

不動点は超吸引的、吸引的、無関心、反発的な不動点と 4 つに分類できる。その中で、前三者に関し、不動点の標準型について論ずる。

以下、不動点 $p = 0$ とする。

3.1 吸引的不動点

吸引的不動点の標準型は

$$\hat{f}(z) = \lambda z$$

である。すなわち、 0 近傍の正則同型写像 ϕ が存在し、

$$\lambda \cdot \phi(z) = \phi \circ f(z) \quad (\hat{f}(z) = \phi \circ f \circ \phi^{-1}(z))$$

が成立する。これは ϕ に関するシュレーダーの関数方程式と呼ばれる。

3.2 超吸引的不動点

ベトヒャーの定理により、ある $k \geq 2$ が存在して、

$$\hat{f}(z) = z^k$$

が標準型となることが知られている。

3.3 無関心な不動点

固有値を $\lambda = e^{i\theta}$ とすると、まず θ が有理数か無理数かで分類する。

3.3.1 θ が有理数の場合

$\theta = m/n$ は既約分数とする。このとき、整数 $k > 1$ が存在して、

$$\hat{f}(z) = \lambda z(1 + z^{kn})$$

が標準型である (花定理)。

λ は単なる回転ゆえ、 $\hat{g}(z) = z(1 + z^{kn})$ の様子を図 1~4 に示す。図 1, 3 は z と $\hat{g}(z)$ を矢印で結んだ図である。図 2~4 は点列 $\{\hat{g}^k(z)\}$ の図である。

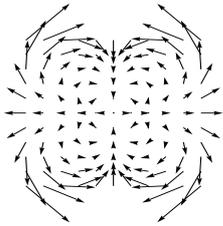


図 1 $k = 2, n = 1$

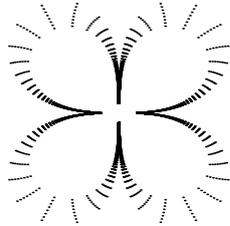


図 2 $k = 2, n = 1$

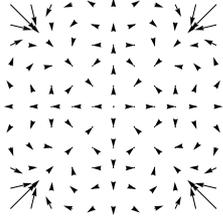


図 3 $k = 2, n = 2$

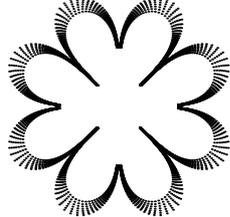


図 4 $k = 2, n = 2$

3.3.2 θ が無理数の場合

任意の自然数 q と、整数 p , 実数 α について,

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{aq^2}$$

が成り立つなら, α はディオファントス数という.
 θ がディオファントス数なら, 標準型は,

$$\hat{f}(z) = \lambda z$$

である(ジーゲル). $\{f^n(z)\}$ は, 円と同相な閉曲線上を
 回る. これを描いたものをジーゲル円板という.

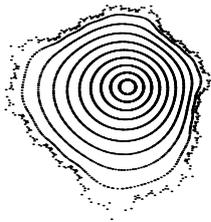


図 5 ジーゲル円板

4 応用 ブラシュケ関数

単位円板 B の二つの自己同型写像

$$\phi_1(z) = z, \phi_2(z) = \frac{z + \lambda}{1 + \lambda z}, (|\lambda| < 1)$$

の積で,

$$\phi(z) = \phi_1(z)\phi_2(z) = z \frac{z + \lambda}{1 + \lambda z}$$

をブラシュケ関数と呼ぶ. ここで, 明らかに $\phi(z)$ は
 B を B に写す.

ここで, ブラシュケを用いた図を載せる.

左の図が宇敷の方法を用いて作成した図であり, 右の図
 が新たに考えた我々の方法で作成した図である.

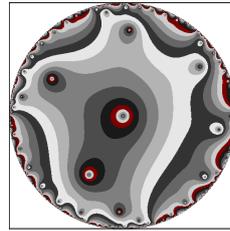


図 6 宇敷の図

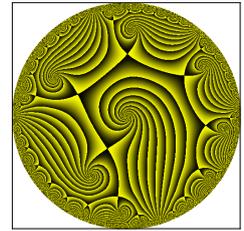


図 7 我々の方法

宇敷の方法では, 色分けの仕方を不動点の近傍 $|z| \leq 1/1000$ に何回で落ちたかを基準に考えている. z_k がはじめて $|z| \leq 1/1000$ に落ちたとき, z_0 を第 $\text{mod}(k, 9)$ 番目の色で着色している.

我々の方法では, 不動点からのびる対数らせんのパラメータで色付けしている. ここでの対数らせんは, 固有値を $\lambda = re^{i\theta}$ とするとき, パラメータ $0 \leq \tau < 2\pi$ をもつ対数らせんの族

$$L_\tau: z = r^t e^{i(t\theta + \tau)} \quad (-\infty < t \leq 0)$$

を考える.

原点近傍で 2 次項以下を無視すると,

$$f(z) = \lambda z.$$

ゆえに, $z \in L_\tau$ なら $z = r^t e^{i(t\theta + \tau)}$ で,

$$f(z) = \lambda z = r^{t+1} e^{i((t+1)\theta + \tau)} \in L_\tau.$$

すなわち, L_τ は不変集合である.

k ではじめて $|z_k| \leq \frac{1}{1000}$ となったとき, $z_k \in L_\tau$ なら, z_k を $\text{mod}(\tau, \frac{\pi}{4})$ 番目の色で着色する.

我々の図では, 不変集合が色分けされて見える. また, らせんを描いて不動点に収束する様子が分かる.

5 おわりに

今回の研究で, 複素力学系とフラクタルの基礎を学び, 加えて不動点の標準型について学んだ. また, それぞれの標準型に対して, Mathematica を用いて不動点への収束を理解しやすくする図法を考案した.

ブラシュケ関数について, 宇敷の方法とは別に, 新しく我々の考えた方法で不動点の解析を行い, パラメータを設定し Mathematica による図示を行った.

今後の課題は, ジュリア集合, ファトゥー集合など, 力学系の大域的な性質を研究することである.

参考文献

- [1] 宇敷重広『フラクタルの世界』日本評論社, 1987.